


Stanford University Libraries
3 6105 000 992 714

# Journal

für die

# reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.



## Sechszehnter Band.

vier Hefte

Mit drei Figurentafeln.

Berlin, 1837.
Bei G. Reimer.
Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier).
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

# Inhalts-Verzeichnifs
## des sechszehnten Bandes, nach den Gegenständen.

---

## I. Reine Mathematik.

### 1. Analysis.



### 2. Geometrie.

### 3. Mechanik.



## II. Angewandte Mathematik.



### Aufgaben und Lehrsätze.

# 1.
# Über den Mittelpunct nicht paralleler Kräfte.

(Von Herrn *A. F. Möbius,* Professor in Leipzig.)

---

Herr Dr. Minding hat in einer sehr scharfsinnigen Abhandlung, im 4ten Hefte des 14. Bandes dieses Journals, die Lehre vom Mittelpuncte paralleler Kräfte auf ein System nicht paralleler Kräfte auszudehnen gesucht. Da ich gleichfalls — bei Gelegenheit statischer Untersuchungen, mit denen ich mich seit längerer Zeit beschäftige, — diesen Gegenstand in Betracht gezogen habe, so dürfte es dem Hrn. Dr. Minding und den Lesern seines Aufsatzes vielleicht nicht unangenehm sein, wenn ich ihnen die Ergebnisse meiner Untersuchungen hier kürzlich vorlege. Eine ausführlichere Darstellung derselben verspare ich für eine Statik fester Körper, die ich mit Nächstem herauszugeben beabsichtige.

---

Die Hauptaufgabe, um welche es sich hier handelt, läfst sich folgendergestalt in Worte fassen:

Ein frei beweglicher fester Körper ist der Wirkung von Kräften unterworfen. Die Veränderung dieser Wirkung zu bestimmen, wenn der Körper beliebig aus seiner Lage verrückt wird, und dabei jede Kraft mit unveränderter Intensität, und parallel mit ihrer anfänglichen Richtung, auf ihren Angriffspunct zu wirken fortfährt.

Die auf den Körper wirkenden Kräfte können nun entweder sich das Gleichgewicht halten, oder auf eine, oder auf zwei Kräfte reducirbar sein. Sie können ferner ihrer Lage nach entweder parallel, oder nicht parallel, und dann in einer Ebene, oder im Raume überhaupt enthalten sein. Die Fälle, welche sich hieraus zusammensetzen lassen, will ich jetzt einzeln durchgehen, und zuvor nur noch erinnern, dafs die überall vorauszusetzende Bedingung, dafs jede Kraft ihren Angriffspunct und ihre Intensität behalte und ihrer anfänglichen Richtung parallel bleibe, um der Kürze willen nicht wieder besonders erwähnt, sondern überall bei der Verrückung mit hinzugedacht werden soll.

Betrachten wir nun zuerst ein

### *A.* System paralleler Kräfte.

*a*) Haben die parallelen Kräfte eine einzelne Kraft zur Resultante, so ist diese ihnen parallel; sie selbst bleiben bei jeder Verrückung des Körpers auf eine Resultante von der nämlichen Intensität und Richtung reducirbar, und es läfst sich ein mit ihren Angriffspuncten in fester Verbindung stehender Punct angeben, der Mittelpunct der parallelen Kräfte, welchem die Resultante stets begegnet. Die parallelen Kräfte sind daher bei allen Verrückungen des Körpers gleichwirkend einer und derselben, mit ihnen parallelen, an diesem Mittelpuncte anzubringenden Kraft.

*b*) Halten die parallelen Kräfte einander das Gleichgewicht, und ist $A$ der Mittelpunct eines Theils derselben und $R$ die Resultante dieses Theils, $B$ der Mittelpunct und $S$ die Resultante der übrigen, so sind die Kräfte $R$ und $S$ einander gleich und direct entgegengesetzt, wirken also in der Geraden $AB$, die mit den Kräften des Systems selbst parallel ist. Wird hierauf der Körper verrückt, so bilden die Kräfte $R$ und $S, =-R,$ ein sogenanntes Kräftepaar; die Fälle ausgenommen, wenn die nachherige Lage des Körpers der anfänglichen parallel ist, oder die Verrückung in einer Drehung des Körpers um eine mit den Kräften parallele Axe besteht, oder endlich, wenn $A$ und $B$ coïncidiren, als in welchem Falle der Angriffspunct jeder Kraft des Systems der Mittelpunct der jedesmal übrigen Kräfte ist.

Bei Verrückung eines Körpers, an welchem parallele Kräfte im Gleichgewicht sind, geht demnach, mit Ausnahme der oben gedachten drei Fälle, das Gleichgewicht verloren, und die Kräfte werden gleichwirkend mit einem Paare, dessen Kräfte mit den erstern parallele Richtung haben und auf zwei bestimmte Puncte des Körpers wirken. — Auch kann man diesen Satz folgendergestalt ausdrücken:

Sind an einem Körper parallele Kräfte im Gleichgewicht, so kann man immer an zwei Puncten des Körpers, die mit den Kräften in einer Parallele liegen, zwei neue, mit den Kräften ebenfalls parallele, sich das Gleichgewicht haltende und daher das vorige Gleichgewicht nicht störende Kräfte ($-R$ an $A$ und $+R$ an $B$) hinzufügen; wodurch es geschieht, dafs, wie auch die Lage des Körpers geändert werden mag, das anfangs bestehende Gleichgewicht nicht unterbrochen wird.

Uebrigens erhellet aus der Theorie der Kräftepaare, dafs man, statt der an $A$ und $B$ anzubringenden Kräfte $R$, auch in irgend zwei andern Puncten des Körpers, die in einer Parallele mit den ursprünglichen Kräften enthalten sind, zwei einander gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte $R'$ anbringen kann, wenn nur $A'B'.R' = AB.R$ ist, und die Kräfte $R'$ die Puncte $A'$ und $B'$ einander zu nähern oder von einander zu entfernen streben, je nachdem das Eine oder das Andere bei den Kräften $R$ in Bezug auf die Puncte $A$ und $B$ der Fall ist.

*c*) Da die Kräfte, wenn sie anfangs im Gleichgewicht sind, sich nach der Verrückung des Körpers im Allgemeinen auf ein Paar reduciren, so ist der dritte mögliche Fall, wenn die Kräfte schon bei der anfänglichen Lage des Körpers einem Paare gleichwirkend sind, von dem vorigen nicht wesentlich verschieden und bedarf daher keiner weiteren Erörterung.

## *B*. System von Kräften, die in einer Ebene enthalten sind.

*a*) Bei jedem System von Kräften in einer Ebene läfst sich, wenn sie eine Resultante haben, in der Richtung derselben ein Mittelpunct, d. h. ein Punct des Körpers angeben, welchem die Resultante bei jeder Verrückung des Körpers, wobei die Ebene sich selbst parallel bleibt, also bei jeder parallelen Fortbewegung und bei jeder Drehung um eine auf der Ebene normale Axe, immer begegnet. Das System bleibt also nach jeder solchen Verrückung gleichwirkend einer einzigen, an einem bestimmten Puncte des Körpers anzubringenden Kraft.

Besteht das System nur aus zwei Kräften, so findet sich der Mittelpunct, als der zweite Durchschnitt ihrer Resultante mit dem durch die Angriffspuncte und den Durchschnitt der Richtungen der beiden Kräfte zu beschreibenden Kreise. (Der erste Durchschnitt der Resultante mit dem Kreise ist der Durchschnitt der Richtungen selbst.)

Durch wiederholte Anwendung dieser Regel läfst sich auch bei einem System von mehr als zwei Kräften der Mittelpunct bestimmen. Denn zuerst kann man statt irgend zweier Kräfte des Systems und ihrer Angriffspuncte eine einzige Kraft und deren Angriffspunct setzen, von denen erstere die Resultante und letzterer der Mittelpunct jener beiden ist. Auf diese Art ist das System, wenn es anfangs aus $n$ Kräften bestand, auf $n-1$ reducirt worden; dieses System von $n-1$ Kräften kann man gleicherweise

auf $n-2$ reduciren, und so fort, bis man zuletzt auf die Resultante und den Mittelpunct des ganzen Systems kommt. Da das System nur einen einzigen Mittelpunct hat, so ist es gleichgültig, in welcher Ordnung man die Kräfte nach und nach mit einander verbindet. Dies giebt zu einigen eleganten geometrischen Sätzen Veranlassung, bei denen ich mich aber hier nicht aufhalten will.

*b*) Aus dem jetzt betrachteten Falle, wenn die in einer Ebene wirkenden Kräfte eine Resultante haben, lassen sich die Umstände für den zweiten Fall, wenn sie einander das Gleichgewicht halten, ganz eben so herleiten, wie vorhin bei parallelen Kräften, und wir gelangen damit zu folgendem Satze:

Ein System von Kräften in einer Ebene, welche sich das Gleichgewicht halten, wird bei Drehung der Ebene in sich selbst, im Allgemeinen gleichwirkend mit einem Paare, dessen Kräfte, eben so wie die des Systems, fortwährend auf dieselben zwei Puncte der Ebene wirkend sich annehmen lassen. Dabei können die eine Kraft und deren Angriffspunct, oder, wenn man statt dessen lieber will, die Angriffspuncte beider Kräfte nach Willkühr bestimmt werden, indem nur das Product aus der gegenseitigen Entfernung der beiden Angriffspuncte in die gemeinschaftliche Intensität der beiden Kräfte eine durch die Beschaffenheit des Systems gegebene Gröfse ist. Oder mit andern Worten:

Zu einem in einer Ebene enthaltenen und im Gleichgewicht befindlichen Systeme von Kräften lassen sich immer an zwei beliebigen Puncten der Ebene zwei sich ebenfalls das Gleichgewicht haltende Kräfte von solcher Intensität hinzusetzen, dafs das Gleichgewicht bei Drehung der Ebene in sich selbst fortdauert.

Findet eine solche Fortdauer des Gleichgewichts statt, ohne dafs man zwei Kräfte hinzuzufügen genöthigt ist, so ist der Angriffspunct jeder Kraft der Mittelpunct der jedesmal übrigen Kräfte.

*c*) Der dritte Fall, wenn die Kräfte mit einem Paare gleiche Wirkung haben, reducirt sich hier eben so, wie vorhin bei den parallelen Kräften, auf den vorhergehenden zweiten.

### *C.* System von Kräften im Raume überhaupt.

Wir wollen hier zuerst die Sätze aufstellen, welche ein im Zustande des Gleichgewichts befindliches System betreffen. Es sind folgende:

*a.* 1) Zu zwei einander nicht parallelen Lagen eines Körpers läfst sich immer eine solche Richtung finden, dafs der Körper durch Drehung um eine mit dieser Richtung parallele Axe aus der einen Lage in eine mit der andern parallele Lage gebracht werden kann; und wenn der Körper unter Einwirkung von Kräften, die beliebige Richtungen im Raume haben, in jeder dieser beiden Lagen im Gleichgewicht ist, so ist er es auch in jeder dritten, in welche er durch weitere Drehung um jene Axe und durch parallele Fortbewegung versetzt wird.

Wenn das Gleichgewicht durch Drehung des Körpers um eine Axe nicht aufgehoben wird, so wollen wir die Axe eine Axe des Gleichgewichts nennen. Jede mit einer solchen parallele Axe ist ebenfalls eine Axe des Gleichgewichts. — So ist es z. B. bei einem System paralleler Kräfte, welche sich das Gleichgewicht halten, jede Gerade, welche mit den Kräften parallel läuft. (Vergl. *A. b.*)

*a.* 2) Damit eine Axe des Körpers eine solche Gleichgewichtsaxe sei, ist es nöthig und hinreichend, dafs, erstens, wenn die Kräfte und ihre Angriffspuncte auf eine die Axe rechtwinklig schneidende Ebene projicirt werden, das Gleichgewicht zwischen den projicirten Kräften bei der Drehung des Körpers um die Axe nicht aufhöre, und dafs zweitens die Projectionen der Kräfte auf Linien, welche man parallel mit der Axe durch die Angriffspuncte der Kräfte legt, für sich im Gleichgewicht sind *).

*a.* 3) Sind bei einem System zwei einander nicht parallele Axen des Gleichgewichts vorhanden, so ist es auch noch jede dritte, welche, mit den beiden erstern, einer und derselben Ebene parallel läuft.

---

*) Wird jede Kraft des Systems parallel mit drei Axen eines rechtwinligen Coordinatensystems in drei andere $X$, $Y$, $Z$ zerlegt, und sind $x$, $y$, $z$ die Coordinaten des Angriffspunctes der Kraft, so ist, wegen des vorausgesetzten Gleichgewichts:

$$\Sigma Yz - \Sigma Zy = 0, \quad \Sigma Zx - \Sigma Xz = 0, \quad \Sigma Xy - \Sigma Yx = 0.$$

Setzt man nun

$$\Sigma Yz = \Sigma Zy = F, \quad \Sigma Zx = \Sigma Xz = G, \quad \Sigma Xy = \Sigma Yx = H \text{ und}$$
$$\Sigma Yy + \Sigma Zz = f, \quad \Sigma Zz + \Sigma Xx = g, \quad \Sigma Xx + \Sigma Yy = h,$$

so ist

$$2FGH + FFf + GGg + HHh - fgh = 0$$

die Bedingung, unter welcher das System eine Gleichgewichtsaxe hat.

Wird diese Gleichung erfüllt, so ergeben sich die Cosinus $p$, $q$, $r$ der Winkel, welche die Gleichgewichtsaxe mit den Axen $x$, $y$, $z$ bildet, durch Verbindung zweier der drei Gleichungen:

$$Gr + Hq = fp, \quad Hp + Fr = gq, \quad Fq + Gp = hr,$$

aus denen, wenn $p$, $q$, $r$ sämmtlich eliminirt werden, jene Bildungsgleichung hervorgeht.

Hieraus ist leicht weiter zu folgern, dafs, wenn ein System drei Gleichgewichtsaxen hat, welche nicht einer und derselben Ebene parallel sind, auch jede vierte Axe eine solche ist, oder mit andern Worten: *Ist* ein Körper im Gleichgewicht, und wird dieses durch drei verschiedene Verrückungen des Körpers nicht aufgehoben, so dauert es im Allgemeinen auch nach jeder vierten Verrückung fort; oder noch anders ausgedrückt: Ist ein Körper in vier verschiedenen Lagen im Gleichgewicht, so ist er es im Allgemeinen auch in jeder fünften.

*a.* 4) Ein im Gleichgewicht befindliches System hat im Allgemeinen keine Axe des Gleichgewichts. Indessen ist es immer möglich, zu den sich anfangs das Gleichgewicht haltenden Kräften zwei neue, einander gleiche und direct entgegengesetzte, also das Gleichgewicht nicht störende Kräfte hinzuzufügen, welche eben so, wie die schon vorhandenen, auf bestimmte Puncte des Körpers, nach sich parallel bleibenden Richtungen wirken, und wodurch es geschieht, dafs der Körper eine Gleichgewichtsaxe von gegebener Richtung erhält.

Da die zwei neuen, sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte bei Drehung des Körpers nicht mehr einander direct entgegengesetzt sind, sondern parallel werden und in ein Paar übergehen, so kann man den vorigen Satz auch also ausdrücken:

Wird ein Körper, auf welchen mehrere sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte wirken, um eine Axe gedreht, so hört das Gleichgewicht im Allgemeinen auf und die Wirkung der Kräfte reducirt sich auf die eines Paars, dessen Kräfte $R$ und $-R$ man eben so, wie die erstern Kräfte, auf zwei gewisse Puncte $A$, $B$ des Körpers mit unveränderter Richtung und Intensität wirkend, setzen kann.

Dabei bleibt, wie in (*A. b.*), der eine dieser Puncte $A$, $B$ und ihre Entfernung $AB$ der Willkühr überlassen, indem durch die Beschaffenheit des Systems und die Richtung der Gleichgewichtsaxe nur die Richtung, mit welcher $AB$ parallel sein mufs, und das Product $AB.R$ bestimmt werden.

*b.* 1) Der zweite Fall, den wir jetzt in Betrachtung ziehen, ist der, wenn die auf den Körper wirkenden Kräfte nicht im Gleichgewicht sind, sondern nur durch Hinzufügung zweier neuen, nicht in einer Ebene liegenden Kräfte, ins Gleichgewicht gebracht werden können. Diese zwei Kräfte lassen sich nun immer, und auf unendlich viele Arten, so bestimmen, dafs ein, auch bei der Drehung um eine gegebene Axe fortdauerndes Gleichgewicht zu Wege

gebracht wird. Es läfst sich nämlich ein, durch die Beschaffenheit des Systems und die Lage der Drehungsaxe bestimmtes hyperbolisches Hyperboloïd angeben, von dessen zwei, die Fläche erzeugenden Geraden die eine die Eigenschaft besitzt, dafs die Angriffspuncte der zwei Kräfte willkührlich in irgend einer der Lagen dieser Geraden genommen werden können.

*b.* 2) Die zwei zu einem solchen Systeme hinzuzusetzenden Kräfte, damit dasselbe in's Gleichgewicht komme, lassen sich, nebst ihren Angriffspuncten, entweder auf doppelte Weise, oder gar nicht, so bestimmen, dafs die Gerade durch die beiden Angriffspuncte selbst eine Gleichgewichtsaxe wird, und dafs daher, wenn man diese Axe unbeweglich und den Körper mit ihr fest verbunden annimmt, ein auch während der Drehung um die Axe dauerndes Gleichgewicht hervorgebracht wird, und ohne dafs man zwei Kräfte hinzuzufügen nöthig hat; und dafs die Pressungen, welche die Axe erleidet, ihrer Richtung und Stärke nach, bei der Drehung unverändert bleiben. Eine solche Axe mag eine Hauptaxe des Gleichgewichts heifsen.

So geht z. B. bei einem Systeme von zwei Kräften, welche nicht in einer Ebene liegen, die eine der beiden Hauptaxen durch die zwei Angriffspuncte selbst; die andere ist auf der Ebene, welche mit beiden Kräften parallel läuft, normal und trifft diese Ebene in dem Mittelpuncte der auf sie projicirten Kräfte. Dasselbe gilt auch, wenn die zwei Kräfte einander nicht parallel aber in derselben Ebene enthalten sind, und nicht blofs die Drehungen der Ebene in sich selbst, (wie in $B$), sondern auch alle übrigen Drehungen berücksichtigt werden.

Auf solch ein einfaches System von nur zwei Kräften reducirt sich auch jedes andere, dessen Kräfte einer Ebene parallel sind, oder in einer Ebene selbst wirken. Denn zieht man in der Ebene zwei beliebige Geraden $a$ und $b$, zerlegt jede Kraft $P$ des Systems, an ihrem Angriffspuncte, in zwei andere $X$ und $Y$, welche diesen Geraden parallel sind, und bestimmt von den parallelen Kräften $X$ die Resultante, welche $X_1$ und den Mittelpunct, welcher $A$ sei, und von den parallelen Kräften $Y$ die Resultante $Y_1$ und den Mittelpunct $B$: so ist das System bei jeder Verrückung gleichwirkend den aus $A$ und $B$ wirkenden Kräften $X_1$ und $Y_1$, und hat folglich zwei Hauptaxen, von denen die eine die Verbindungslinie von $A$ mit $B$ ist und die andere die Ebene in dem Mittelpuncte der auf sie projicirten Kräfte $X_1$ und $Y_1$, wenn sie nicht schon in der Ebene selbst liegen,

rechtwinklig schneidet. Da nun das System nicht mehr als zwei Hauptaxen haben kann, und gleichwohl die Geraden $a$ und $b$ in der Ebene ganz nach Willkühr gelegt werden können, so ziehen wir den merkwürdigen Schlufs:

*a*) Hat man ein System von Kräften, welche mit einer und derselben Ebene parallel sind und sich weder das Gleichgewicht halten, noch mit einem Paare gleiche Wirkung haben, und zerlegt man jede Kraft an ihrem Angriffspuncte in zwei andere $X$ und $Y$, welche parallel mit zwei sich schneidenden Geraden $a$ und $b$ der Ebene sind: so sind der Mittelpunct der parallelen Kräfte $X$ und der Mittelpunct der parallelen Kräfte $Y$ in einer von der Lage der Linien $a$ und $b$ unabhängigen Geraden enthalten. Sie heifse die Centrallinie des Systems. Oder mit andern Worten:

Werden durch die Angriffspuncte parallel mit einer Ebene wirkender Kräfte Parallelen mit irgend einer Geraden der Ebene gezogen, und auf diese Parallelen die Kräfte durch Parallelen mit irgend einer andern Geraden der Ebene projicirt: so ist der Ort des Mittelpuncts der projicirten Kräfte, wenn sie anders einen solchen haben, eine gerade Linie, — die Centrallinie.

Dieser, auch ohne die vorhergehende Theorie leicht erweisliche Satz läfst sich auch auf ein System im Raume ausdehnen und lautet dann also:

*β*) Hat man ein System von Kräften im Raume, welche sich weder das Gleichgewicht halten, noch auf ein Paar reducirbar sind, und zerlegt man jede Kraft, an ihrem Angriffspuncte, parallel mit drei beliebigen Geraden $a$, $b$, $c$, welche nicht einer und derselben Ebene parallel sind, in drei andere $X$, $Y$ und $Z$: so liegen der Mittelpunct der Kräfte $X$, der Mittelpunct der $Y$ und der der $Z$ in einer von der Lage der Geraden $a$, $b$, $c$ unabhängigen Ebene, welche die Centralebene des Systems genannt werde. Oder:

Zieht man durch die Angriffspuncte nach beliebigen Richtungen im Raume wirkender Kräfte Parallelen mit irgend einer Geraden $a$ und projicirt auf diese Parallelen die Kräfte durch Linien, welche einer beliebig angenommenen, die Gerade $a$ schneidenden, Ebene parallel sind; so ist der Ort des Mittelpuncts der projicirten Kräfte, wenn anders ein solcher statt findet, eine Ebene, — die Centralebene.

Haben die vorigen drei Geraden $a$, $b$, $c$ gegen die Centralebene eine solche Lage, dafs $a$ und $b$ mit ihr parallel sind und $c$ auf ihr nor-

mal steht, so liegen die Mittelpuncte der Kräfte $X$ und der Kräfte $Y$ nach $\alpha$) in einer bestimmten Geraden, welche nach $\beta$) in der Centralebene selbst enthalten ist. Sie heifsen die Centrallinie des Systems beliebig im Raume wirkender Kräfte. Wenn überdies, bei derselben Lage von $a, b, c$ gegen die Centralebene, die Gerade $a$ mit der Centrallinie parallel läuft und $b$ auf $a$ normal ist, so wollen wir auf gleiche Weise den Mittelpunct der mit $a$ parallelen Kräfte $X$, welcher nach $\alpha$ in die Centrallinie selbst fällt, den Centralpunct des Systems nennen.

In Bezug auf die eben bestimmten Central-Punct, Linie und Ebene. haben nun die beiden Hauptaxen folgende merkwürdige Lage:

*b.* 3) Die zwei Hauptaxen des Gleichgewichts, wenn solche anders möglich sind, und die Centrallinie des Systems, sind einer und derselben Ebene parallel. Die Puncte, in denen die zwei Hauptaxen die Centralebene schneiden, liegen mit dem Centralpuncte in einer Geraden, und diese Gerade ist normal auf der Resultante aller Kräfte, wenn diese, parallel mit ihren Richtungen, an einen und denselben Punct getragen werden.

*c.* 1) Wird ein System von Kräften im Raume, das eine einzelne Kraft zur Resultante hat, um eine Axe gedreht, so wird es im Allgemeinen eben so, wie die bisher betrachteten Systeme, gleichwirkend mit zwei Kräften, die man mit unveränderter Intensität und Richtung auf zwei bestimmte Puncte des Körpers wirkend setzen kann, und die nur in der anfänglichen Lage des Körpers und nach einer halben Umdrehung sich auf eine einzelne Kraft — auf die anfängliche Resultante — reduciren lassen.

*c.* 2) Bei einem auf eine einzelne Kraft reducirbaren System im Raume sind die zwei Hauptaxen immer möglich. Es lassen sich nämlich zwei die Richtung dieser Kraft schneidende Axen angeben, von der Beschaffenheit, dafs wenn der Körper um die eine oder die andere Axe gedreht wird, das System nicht aufhört, sich auf eine einzige, mit der anfänglichen Resultante der Lage und Intensität nach identische Kraft zu reduciren; dafs folglich, wenn der Körper, in dem Durchschnittspuncte der einen oder der andern Axe mit der Resultante befestigt wird, ein auch bei Drehung des Körpers um die bezügliche Axe fortdauerndes Gleichgewicht entsteht, und dafs somit diese beiden Durchschnitte als wahrhafte Mittelpuncte des Systems, obwohl jeder nur rücksichtlich der Drehung um eine bestimmte Axe, betrachtet werden können.

Die zwei Hauptaxen haben übrigens eine solche Lage, dafs 1) ihre Projectionen auf eine die Resultante normal treffende Ebene, so wie 2) ihre Projectionen auf die Centralebene sich rechtwinklig schneiden; dafs 3) eine mit den beiden Axen parallele Ebene zugleich der Centrallinie parallel ist, und dafs 4) die zwei Puncte, in denen die Centralebene von den Axen getroffen wird, mit dem Centralpuncte in einer Geraden liegen, welche 5) mit der Resultante rechte Winkel bildet.

*d*) Ein System im Raume, welches auf ein Paar reducirbar ist, hat im Allgemeinen keine Hauptaxen. Sind aber dergleichen vorhanden, so sind sie es in unendlicher Zahl, indem dann jede mit einer gewissen Richtung parallele Axe eine Hauptaxe abgiebt.

Zum Schlusse noch folgende Bemerkung. Wird ein Körper, auf welchen Kräfte wirken, an einer unbeweglichen Axe befestigt, und soll er bei Drehung um die Axe fortwährend im Gleichgewicht sein; wird aber nicht zugleich gefordert, dafs die Axe, wie eine Hauptaxe des Gleichgewichts, während der Drehung einen seiner Richtung und Intensität nach unveränderlichen Druck erleide: so kann, wenn die Kräfte auf eine einzelne Kraft, oder auf zwei nicht in einer Ebene liegende Kräfte reducirbar sind, die Axe jeder gegebenen Richtung parallel sein. Man projicire nämlich die Kräfte auf eine die gegebene Richtung rechtwinklig schneidende Ebene, und bestimme von den projicirten Kräften den Mittelpunct (*B. a.*), so wird eine durch letztern mit der Richtung parallel gelegte Axe die verlangte Eigenschaft besitzen. Eine Ausnahme hievon macht der Fall, wenn die Kräfte eine einzelne Kraft zur Resultante haben, die Axe mit der Resultante parallel sein soll, und wenn nicht von den, auf eine die Resultante rechtwinklig schneidende Ebene, projicirten Kräften der Angriffspunct einer jeden der Mittelpunct der jedesmal übrigen ist. Wird aber letztere Bedingung erfüllt, so kann hinwiederum jede mit der Resultante parallele Gerade zu der in Rede stehenden Axe genommen werden.

# 2.

# Sur les développement des coefficiens différentiels d'une fonction au moyen des ces différences finies, et réciproquement.

(Par Mr. *R. Lobatto,* Docteur en sciences à la Haye.)

---

1.

En representant par $u$ une fonction quelconque de la variable $x$, on aura d'après le calcul aux différences finies, et dans l'hypothèse $\Delta x = 1$, les deux formules générales,

$$1. \quad \frac{d^r u}{dx^r} = \Delta^r u + A_1 \Delta^{r+1} u + A_2 \Delta^{r+2} u + A_3 \Delta^{r+3} u + \text{etc.}$$

$$2. \quad \Delta^r u = \frac{d^r u}{dx^r} + \alpha_1 \frac{d^{r+1} u}{dx^{r+1}} + \alpha^2 \frac{d^{r+2} u}{dx^{r+2}} + \alpha^3 \frac{d^{r+3} u}{dx^{r+3}} + \text{etc.}$$

où $A_1 . A_2 . A_3 \ldots .$, $\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots .$, désignent des coefficiens constans dont les valeurs dependent seulement de l'indice $r$.

On sait d'ailleurs que les coefficiens de la première série s'accordent avec ceux du développement $[\log(1+z)]^r$, et ceux de la seconde série avec les coefficiens du développement $(e^z - 1)^r$; analogie qui a donné lieu aux deux expressions suivantes dues au célèbre Lagrange:

$$\frac{d^r u}{dx^r} = [\log(1 + \Delta u)]^r,$$

$$\Delta^r u = \left(e^{\frac{dy}{dx}} - 1\right)^r$$

en observant de changer dans leurs développement $(\Delta u)^n$, $\frac{dy^n}{dx^n}$ en $\Delta^n u$ et $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Quelques élégantes que soient ces deux dernières formules, on ne peut les considérer cependant, que comme un moyen d'énoncer sous une forme simplifiée les deux séries (1.) et (2.) et elles ne paroissent nullement propres à faire connaître la dépendance des termes successifs dont la loi est d'autant moins facile à saisir, que ces termes proviennent du développement d'une série infinie élevée a une puissance donnée.

On pourrait donc désirer un procédé pour dériver facilement les uns des autres les coefficiens numériques de chacune des séries dont il

s'agit, sans être obligé de recourir aux formules prolixes de l'analyse combinatoire servant au développement d'un polynome. Un tel procédé remplirait une lacune qui semble exister jusqu'ici dans le calcul aux différences finies. En effet *Euler* est le seul géomètre qui s'en soit occupé; mais ses recherches ne concernent que les coefficiens $\alpha_1.\alpha_2....$ du développement de $\Delta^r u$ *).

2.

La route que nous avons suivie pour y parvenir, nous a paru assez naturelle, et pourra peut être s'appliquer avec succès à des fonctions d'un d'autre genre.

Soit $u_n$, ce que devient la fonction $u$, si l'on y change $x$ en $x+n$; le calcul aux différences finies fournit la série connue

$$3. \quad u_n = u + n\Delta u + \frac{n.n-1}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.}$$

Mais on a en même temps, en vertu de la formule de *Taylor*,

$$4. \quad u_n = u + n\cdot\frac{du}{dx} + \frac{n^2}{2}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{n^3}{2.3}\cdot\frac{d^3u}{dx^3} + \dots$$

Ces deux séries devant être identiques, on pourrait, en développant la première suivant les puissances de $n$, et la comparant ensuite à la seconde, en déduire les relations qui existent entre les coefficiens différentiels des divers ordres et les différences finies de la fonction $u$. Mais ce procédé, employé jusqu'ici par les géomètres, exige nécessairement des calculs assez compliqués, sans qu'il puisse conduire facilement à decouvrir la loi que nous cherchons. C'est pour cela que nous allons proposer a cet effet la méthode suivante.

3.

Désignons par $P_m$ le coefficient de $\Delta^m u$ dans la série (3.) et par $P_m^{(1)}$, $P_m^{(2)}$, $P_m^{(3)}$ etc., les valeurs de ses coefficiens différentiels successifs pris par rapport à $n$, et en y supposant ensuite $n=0$.

Si l'on différencie dans ce sens, la série

$$u_n = u + P_1\Delta u + P_2\Delta^2 u + P_3\Delta^3 u + \text{etc.}$$

il viendra, en observant qu'alors $\frac{d^r u_n}{dn^r} = \frac{d^r u}{dx^n}$, et que les quantités $u$, $\Delta u$, $\Delta^2 u$ .... sont des fonctions de $x$ seulement,

*) Voyez les *Institut. calc. diff. Pars post. Cap. III.*

$$\frac{du}{dx} = P_1^{(1)}\Delta u + P_2^{(1)}\Delta^2 u + P_3^{(1)}\Delta^3 u + P_4^{(1)}\Delta^4 u + \text{etc.}$$
$$\frac{d^2u}{dx^2} = \qquad P_2^{(2)}\Delta^2 u + P_3^{(2)}\Delta^3 u + P_4^{(2)}\Delta^4 u + \text{etc.}$$
$$\frac{d^3u}{dx^3} = \qquad\qquad P_3^{(3)}\Delta^3 u + P_4^{(3)}\Delta^4 u + \text{etc.}$$
etc. etc.

Et l'on pourra poser généralement l'équation

$$5. \quad \frac{d^ru}{dx^r} = P_r^{(r)}\Delta^r u + P_{r+1}^{(r)}\Delta^{r+1} u + P_{r+2}^{(r)}\Delta^{r+2} u + \text{etc.}$$

Or, puisque le coefficient général $P_r$ indique une fonction rationnelle de $n$, du dégré $r$, il résulte de la composition de cette fonction, qu'on aura toujours $P_r^{(r)} = 1$, ce qui explique en même temps pourquoi la formule précédente ne peut contenir des différence d'un ordre inférieur au $r^{\text{ième}}$.

4.

Il s'agit maintenant de rechercher la dependance mutuelle des coefficiens $P_m^{(r)}$. A cet effet nous remarquerons d'abord que la nature de la fonction $P_m$ donne lieu à la relation

$$P_m = \frac{(n-m+1)}{m} P_{m-1},$$

d'où l'on déduit par des différentiations successives par rapport à $n$:

$$\frac{dP_m}{dn} = \frac{1}{m} P_{m-1} + \frac{n-m+1}{m}\cdot\frac{dP_{m-1}}{dn},$$
$$\frac{d^2P_m}{dn^2} = \frac{2}{m}\cdot\frac{dP_{m-1}}{dn} + \frac{n-m+1}{m}\cdot\frac{d^2P_{m-1}}{dn^2},$$
$$\frac{d^3P_m}{dn^3} = \frac{3}{m}\cdot\frac{d^2P_{n-1}}{dn^2} + \frac{n-m+1}{m}\cdot\frac{d^3P_{m-1}}{dn^3}$$
etc. etc.

Faisons $n = 0$ dans chacune des relations précédentes. Cette hypothèse réduira $P_{m-1}$ a zéro, et l'on obtiendra, d'après la notation adoptée:

$$6. \quad \begin{cases} mP_m^{(1)} + (m-1)P_{m-1}^{(1)} = 0, \\ mP_m^{(2)} + (m-1)P_{m-1}^{(2)} = 2P_{m-1}^{(1)}, \\ mP_m^{(3)} + (m-1)P_{m-1}^{(3)} = 3P_{m+1}^{(2)}, \end{cases}$$

d'où l'on conclut généralement l'équation:

$$7. \quad mP_m^{(r)} + (m-1)P_{m-1}^{(r)} = rP_{m-1}^{(r-1)}.$$

Si l'on fait attention que $P_1^{(1)}$, on déduira de suite de la première des équa-

tions (6.), $mP_m^{(1)} = \mp 1$ ou bien $P_m^{(1)} = \mp \frac{1}{m}$ selon que $m$ est pair ou impair, de sorte que l'on pourra écrire $P_m^{(1)} = \frac{1}{m}(-1)^{m-1}$.

Au moyen de cette dernière valeur, l'équation (5.) fournit immédiatement le développement connu

$$\frac{du}{dx} = \Delta u - \tfrac{1}{2}\Delta^2 u + \tfrac{1}{3}\Delta^3 u - \tfrac{1}{4}\Delta^4 u + \text{etc.}$$

5.

Pour résoudre la seconde des équations (6.), changeons y successivement $m$, en $m-1$, $m-2$ etc.; nous en tirérons les rélations suivantes:

$$\begin{aligned} mP_m^{(2)} + (m-1)P_{m-1}^{(2)} &= 2P_{m-1}^{(1)}, \\ (m-1)P_{m-1}^{(2)} + (m-2)P_{m-2}^{(2)} &= 2P_{m-2}^{(1)}, \\ (m-2)P_{m-2}^{(2)} + (m-3)P_{m-3}^{(2)} &= 2P_{m-3}^{(1)} \\ \text{etc.} \qquad\qquad & \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

d'où l'on dérive sans peine par des additions et des soustractions

$$mP_m^{(2)} = 2[P_{m-1}^{(1)} - P_{m-2}^{(1)} + P_{m-3}^{(1)} - \dots \mp P_1^{(1)}],$$

ou bien, en vertu de l'équation $P_m^{(1)} = \frac{1}{m}(-1)^{m-1}$,

$$P_m^{(2)} = \pm\frac{2}{m}[P_1^{(1)} + P_2^{(1)} + P_3^{(1)} + \dots P_{m-1}^{(1)}]$$

selon que $m$ est pair ou impair.

Par un procédé semblable on déduira de la troisième des équations (6.), la rélation

$$P_m^{(3)} = \mp\frac{3}{m}[P_2^{(2)} + P_3^{(2)} + P_4^{(2)} + \dots P_{m-1}^{(2)}]$$

selon que $m$ est pair ou impair. Il est aisé maintenant d'entrevoir que l'équation (7.) conduira à la rélation générale

$$8. \quad P_m^{(r)} = \pm\frac{r}{m}[P_{r-1}^{(r-1)} + P_r^{(r-1)} + P_{r+1}^{(r-1)} + \dots P_{m-1}^{(r-1)}].$$

6.

Cette dernière rélation va nous fournir un moyen assez simple pour dériver les coefficiens du développement de $\frac{d^r u}{dx^r}$ de ceux qui se rapportent au développement précédent de $\frac{d^{r-1}u}{dx^{r-1}}$. En effet, il ne s'agira que de prendre la somme de ces derniers coefficiens jusqu'au terme $\Delta^{m-1}u$ inclusivement, sans avoir égard aux signes qui les affectent; de multiplier ensuite cette somme par l'indice $r$ du coefficient differentiel, et de diviser

le produit par le nombre $m$ indiquant l'ordre de la différence finie $\Delta u$, auquel chaque coefficient se rapporte. Ayant déterminé de cette manière les divers coefficiens, il faudra leur donner alternativement le signe $+$ et $-$ à commencer du premier. Le calcul de leurs valeurs numériques pourra s'effectuer d'une manière très régulière et assez expéditive, ainsi qu'on va le voir dans le type suivant que nous joignons ici pour faire mieux comprendre l'application de la formule (8.)

| | $m=1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | etc. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Coefficiens de $\frac{du}{dx}$ . . | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{7}$ | etc. |
| | | 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{11}{6}$ | $\frac{25}{12}$ | $\frac{137}{60}$ | $\frac{147}{60}$ | etc. |
| - - - $\frac{d^2u}{dx^2}$ . . . | | 1 | 1 | $\frac{11}{12}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{137}{180}$ | $\frac{21}{30}$ | etc. |
| | | | 1 | 2 | $\frac{35}{12}$ | $\frac{15}{4}$ | $\frac{203}{45}$ | etc. |
| - - - $\frac{d^3u}{dx^3}$ . . . . | | | 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{7}{4}$ | $\frac{15}{8}$ | $\frac{29}{15}$ | etc. |
| | | | | 1 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{17}{4}$ | $\frac{49}{8}$ | etc. |
| - - - $\frac{d^4u}{dx^4}$ . . . . . | | | | 1 | 2 | $\frac{17}{6}$ | $\frac{7}{2}$ | etc. |
| | | | | | 1 | 3 | $\frac{35}{6}$ | etc. |
| - - - $\frac{d^5u}{dx^5}$ . . . . . . | | | | | 1 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{25}{6}$ | etc. |
| | | | | | | 1 | $\frac{7}{2}$ | etc. |
| - - - $\frac{d^6u}{dx^6}$ . . . . . . . | | | | | | 1 | 3 | etc. |

La première ligne horizontale contient la série des indices de $\Delta u$; la seconde, les coefficiens du développement de $\frac{du}{dx}$; la troisième, la somme de ces coefficiens; la quatrième, les produits de chaque somme par la fraction $\frac{2}{m}$; et ainsi de suite, conformément à la règle proscrite par l'équation (8.).

### 7.

Remarquons encore que l'équation (7.), abstraction faite des signes qui affectent les coefficiens de chaque développement, pourra s'écrire sous la forme suivante:

$$mP_m^{(r)} = (m-1)P_{m-1}^{(r)} + rP_{m-1}^{(r-1)}$$

et indique par consequent un moyen de déduire un coefficient quelconque de celui qui le précède immédiatement dans la même série, et de celui qui correspond à ce dernier dans la série pour $\frac{d^{r-1}u}{dx^{r-1}}$. C'est ainsi par ex.

que le coefficient de $\Delta^7 u$ dans $\frac{d^3 u}{dx^3}$, aurait pu être obtenu par la formule

$$\tfrac{1}{7}[6+\tfrac{15}{8}+3\times\tfrac{137}{180}] = \tfrac{1}{7}\times\tfrac{203}{15} = \tfrac{29}{15},$$

ce qui s'accorde avec le resultat donné par le premier procédé. Cependant nous croyons devoir preférer celui-ci, comme donnant lieu à des calculs plus simples.

A l'aide des valeurs numériques que nous venons de trouver, on aura par conséquent les séries suivantes, pour le développement des coefficiens différentiels des divers ordres, en fonctions de différences finies:

$$\frac{du}{dx} = \Delta u - \tfrac{1}{2}\Delta^2 u + \tfrac{1}{3}\Delta^3 u - \tfrac{1}{4}\Delta^4 u + \tfrac{1}{5}\Delta^5 u - \tfrac{1}{6}\Delta^6 u + \text{etc.},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \Delta^2 u - \Delta^3 u + \tfrac{11}{12}\Delta^4 u - \tfrac{5}{6}\Delta^5 u + \tfrac{137}{180}\Delta^6 u - \text{etc.},$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} \quad \Delta^3 u - \tfrac{3}{2}\Delta^4 u + \tfrac{7}{4}\Delta^5 u - \tfrac{15}{8}\Delta^6 u + \text{etc.},$$

$$\frac{d^4u}{dx^4} \quad \Delta^4 u - 2\Delta^5 u + \tfrac{17}{6}\Delta^6 u - \text{etc.},$$

$$\frac{d^5u}{dx^5} = \Delta^5 u - \tfrac{5}{2}\Delta^6 u + \text{etc.},$$

## 8.

Ces formules sont susceptibles d'une application utile, dans le calcul des interpolations. Etant donnés les $n+1$ termes $u_0 . u_1 . u_2 \ldots . n_n$ d'une série dont les différences $n^{\text{ièmes}}$ sont constantes: on demande l'expression du terme général $u_x$, développé suivant les puissances de $x$. Après avoir évalué de la manière ordinaire les différences successives $\Delta u_0 . \Delta^2 u_0 . \Delta^3 u_0 \ldots . \Delta^n u_0$, le terme général s'exprimera, comme l'on sait, par la formule

$$u_x = u_0 + x\Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \text{etc.}$$

Soit à présent

$$u_x = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}.$$

il ne s'agira que d'obtenir les valeurs des coefficiens $\alpha, \beta, \gamma, \ldots .$ en fonctions des différences finies. A cet effet le théorème de ***Maclaurin*** donne:

$$\alpha = u_0, \quad \beta = \frac{du_x}{dx}, \quad \gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2u_x}{dx^2}, \quad \delta = \frac{1}{1.2}\,\frac{d^3u_x}{dx^3},$$

en supposant $x = 0$ après les différentiations. Donc en appliquant la même hypothèse à nos formules précédentes, elles donnerons immédiatement

$$\begin{aligned}
\alpha &= u_0, \\
\beta &= \Delta u_0 - \tfrac{1}{2}\Delta^2 u_0 + \tfrac{1}{3}\Delta^3 u_0 - \tfrac{1}{4}\Delta^4 u_0 + \tfrac{1}{5}\Delta^5 u_0 - \text{etc.}, \\
\gamma &= \quad + \tfrac{1}{2}\Delta^2 u_0 - \tfrac{1}{2}\Delta^3 u_0 + \tfrac{11}{24}\Delta^4 u_0 - \tfrac{5}{12}\Delta^5 u_0 + \text{etc.}, \\
\delta &= \quad\quad + \tfrac{1}{6}\Delta^3 u_0 - \tfrac{1}{4}\Delta^4 u_0 + \tfrac{7}{24}\Delta^5 u_0 - \text{etc.}, \\
\varepsilon &= \quad\quad\quad + \tfrac{1}{24}\Delta^4 u_0 - \tfrac{1}{12}\Delta^5 u_0 + \text{etc.}, \\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Il est aisé de remarquer que dans chacun de ces développemens le coefficient du terme $\Delta^m u_0$ s'obtient directement en divisant par l'indice $m$, la somme des coefficiens de la série précédente jusqu'à celui qui affecte le terme $\Delta^{m-1} u_0$ inclusivement; ainsi que cela résulte d'ailleurs de l'équation (8.).

Le développement d'une fonction $u_x$ d'après les puissances de $x$ offrira le plus souvent plus de facilité dans le calcul d'interpolation, que celui dont le terme général s'exprime par $\frac{x.(x-1)\ldots.(x-m+1)}{1.2\ldots.m}\Delta^m u_0$, surtout lorsque les valeurs des coefficiens constans deviennent très petites, et qu'on peut en outre négliger les termes qu'ils affectent pour des valeurs de $x$ comprises entre 0 et 1.

9.

Occupons nous à présent du problème inverse, où il s'agit d'exprimer la quantité $\Delta^r u$, en fonction des coefficiens différentiels. Nous suivrons à cet effet à peu près la même route.

La série

$$u_n = u + n\frac{du}{dx} + \frac{n^2}{2}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{n^3}{2.3}\cdot\frac{d^3u}{dx^3} + \text{etc.}$$

donne, en y supposant $\Delta n = 1$, celle-ci:

$$\Delta u_n = \frac{du}{dx} + \tfrac{1}{2}\Delta(n^2)\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{2.3}\Delta(n^3)\frac{d^3u}{dx^3} + \text{etc.}$$

d'où l'on dérive successivement

$$\Delta^2 u_n = \tfrac{1}{2}\Delta^2(n^2)\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{2.3}\Delta^2(n^3)\frac{d^3u}{dx^3} + \text{etc.},$$

$$\Delta^3 u_n = \frac{1}{2.3}\Delta^3(n^3)\frac{d^3u}{dx^3} + \frac{1}{2.3.4}\Delta^3(n^4)\frac{d^4u}{dx^4} + \text{etc.}$$

et en général

$$\Delta^r u_n = \frac{1}{2.3\ldots.r}\Delta^r(n^r)\frac{d^ru}{dx^r} + \frac{1}{2.3\ldots.r+1}\Delta^r(n^{r+1})\frac{d^{r+1}u}{dx^{r+1}} + \text{etc.}$$

Si dans la série précédente, on pose $n = 0$, ce qui change $\Delta^r u_n$ en $\Delta^r u$, et que l'on désigne la valeur que prend alors $\Delta^r(n^m)$ par $\Delta^r(0^m)$, il en

résultera la nouvelle série

$$\Delta^r u = \frac{1}{2.3....r}\Delta^r(0^r)\frac{d^r u}{dx^r} + \frac{1}{2.3....r+1}\Delta^r(0^{r+1})\frac{d^{r+1}u}{dx^{r+1}} + \text{etc.}$$

qui est la même que celle donnee par le Géométre anglais Mr. ***Brinkley,*** et dont on trouve une démonstration dans le 3[me] volume de l'ouvrage de Mr. ***Lacroix*** (pag. 64). On vois comment elle découle immédiatement de la formule de ***Taylor.***

Le coefficient du premier terme de cette série sera toujours égal à l'unité, puisqu'on a, en vertu de la théorie des différences finies:

$$\Delta^r n^r = 1.2...r.$$

Quant aux valeurs des coefficiens suivans, nous les obtiendrons facilement en recherchant la dépendance qui existe entre eux et les coefficiens de la série relative à $\Delta^{r-1}u$.

10.

A cet effet soit $n^m = P_m$, donc $P_m = nP_{m-1}$. Prenant les différences finies de cette dernière équation, il viendra, en supposant $\Delta n = 1$,

$$\Delta P_m = \quad P_{m-1} + (n+1)\Delta P_{m-1},$$
$$\Delta^2 P_m = 2\Delta P_{m-1} + (n+2)\Delta^2 P_{m-1},$$
$$\Delta^3 P_m = 3\Delta P_{m-1} + (n+3)\Delta^3 P_{m-1}$$

et en général

$$\Delta^r P_m = r\Delta^{r-1}P_{m-1} + (n+r)\Delta^r P_{m-1}.$$

Appelons $p_m^{(r)}$, la valeur de $\Delta^r P_m$, dans l'hypothèse de $n = 0$, nous trouverons alors la relation très simple

$$9. \quad p_m^{(r)} = r[p_{m-1}^{(r-1)} + p_{m-1}^{(r)}],$$

d'où l'on voit comment le coefficient de $\frac{1}{2.3....m}\cdot\frac{d^m u}{dx^m}$, peut-être déduit de celui qui le précède immédiatement, et de celui qui correspond à ce dernier dans le développement de $\Delta^{r-1}u$.

Faisant $r = 1$, l'équation (9.) deviendra, à cause de $p_{m-1}^{(0)} = 0$,

$$p_m^{(1)} = p_{m-1}^{(1)}, \quad \text{donc} \quad p_m^{(1)} = p_1^{(1)} = 1.$$

Si l'on fait successivement $r = 2$, 3 etc., nous trouverons

$$p_m^{(2)} = 2(1 + p_{m-1}^{(2)}) = 2(1+2+2^2+\cdots 2^{m-2}) = 2^m - 2,$$
$$p_m^{(3)} = 3p_{m-1}^{(2)} + 3p_{m-1}^{(3)} = 3[p_{m-1}^{(2)} + 3p_{m-2}^{(2)} + 3^2 p_{m-3}^{(2)} + \text{etc.}],$$

et l'on aura généralement

$$p_m^{(r)} = r[p_{m-1}^{(r-1)} + rp_{m-2}^{(r-1)} + r^2 p_{m-3}^{(r-1)} + \cdots],$$

série qui ne dévra être prolongée que jusqu'au terme $p_{r-1}^{(r-1)} = 1.2....r-1$,

puisque celui-ci étant indépendant de $n$, ne pourra plus admettre aucune différence finie par rapport à cette variable. La dernière formule énonce par conséquent un moyen d'obtenir chaque coefficient du développement de $\Delta^r u$, à l'aide de ceux qui le précèdent dans le développement de $\Delta^{r-1} u$. Toutefois, ce mode de dérivation exigeant des calculs qui deviennent plus prolixes à mesure que l'indice $r$ augmente de valeur, nous croyons devoir préférer celui résultant de l'équation générale (9.), et qui revient à ajouter le coefficient précèdent à celui qui y correspond dans la série rélative à $r-1$, et à multiplier ensuite cette somme par l'indice $r$. Voici un type de calcul pour l'évaluation numérique de quelques uns de ces coefficiens, et basé sur l'équation (9.)

| | $m=1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | etc. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Coefficiens pour $r=1$ . . . | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | etc. |
| $=2$ . . . . | | 2 | 6 | 14 | 30 | 62 | etc. |
| $=3$ . . . . . | | | 6 | 36 | 150 | 540 | etc. |
| $=4$ . . . . . . | | | | 24 | 240 | 1560 | etc. |
| $=5$ . . . . . . . | | | | | 120 | 1800 | etc. |
| $=6$ . . . . . . . . | | | | | | 720 | etc. |

Chaque coefficient devant être divisé par le produit $1.2.3....m$, il en résultera les formules suivantes:

$$\Delta u = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{d^3u}{dx^3} + \frac{1}{2.3.4}\cdot\frac{d^4u}{dx^4} + \frac{1}{2....5}\cdot\frac{d^5u}{dx^5} + \frac{1}{2....6}\cdot\frac{d^6u}{dx^6} + \text{etc.},$$

$$\Delta^2 u = \;.\;.\; \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{7}{12}\cdot\frac{d^4u}{dx^4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{d^5u}{dx^5} + \frac{31}{360}\cdot\frac{d^6u}{dx^6} + \text{etc.},$$

$$\Delta^3 u = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{3}{2}\cdot\frac{d^4u}{dx^4} + \frac{5}{4}\cdot\frac{d^5u}{dx^5} + \frac{3}{4}\cdot\frac{d^6u}{dx^6} + \text{etc.},$$

$$\Delta^4 u = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{d^4u}{dx^4} + 2.\frac{d^5u}{dx^5} + \frac{13}{6}\cdot\frac{d^6u}{dx^6} + \text{etc.},$$

$$\Delta^5 u = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{d^5u}{dx^5} + \frac{5}{2}\cdot\frac{d^6u}{dx^6} + \text{etc.},$$

On peut aussi exprimer la valeur du coefficient général $\frac{1}{2.3....m} p_m^{(r)}$, directement en fonction de $p$ et $m$. Pour cela remarquons qu'en vertu de l'équation

$$\Delta^r u = \left(e^{\frac{dy}{dx}} - 1\right)^r,$$

ce coefficient est le même que celui qui affecte $\varphi^m$ dans le développe-

ment du binome $(e^{\varphi}-1)^r$. Or puisque le coefficient de $\varphi^m$ dans la série $e^{\varphi}$, a pour valeur $\frac{r^m}{2.3\ldots.m}$, il n'est pas difficile d'en conclure

$$p_m^{(r)} = r^m - r(r-1)^m + \frac{r.r-1}{1.2}(r-2)^m - \ldots \pm 1.$$

Les séries obtenues ci-dessus pour les valeurs de $\frac{d^r u}{dx^r}$ et $\Delta^r u$ supposent toutes les deux l'accroissement $\Delta x = 1$. Mais si l'on avait $\Delta x = h$, ces séries deviendroient évidemment les suivantes:

$$\frac{d^r u}{dx^r}.h^r = \Delta^r u + P_{r+1}^{(r)}\Delta^{r+1}u + P_{r+2}^{(r)}\Delta^{r+2}u + \text{etc.},$$

$$\Delta^r u = \frac{d^r u}{dx^r}h^r + p_{r+1}^{(r)}\frac{d^{r+1}u}{dx^{r+1}}.\frac{h^{r+1}}{2.3\ldots.(r+1)} + p_{r+1}^{(r)}\frac{d^{r+2}u}{dx^{r+2}}.\frac{h^{r+2}}{2.3\ldots.(r+2)} + \text{etc.}$$

La Haye, Février 1836.

# 3.

# Über Lamberts Theorem von der Quadratur parabolischer Sectoren, und verwandte Sätze.

(Vom Herrn Professor Dr. *Grunert* zu Greifswalde.)

---

## §. 1.

Lamberts merkwürdiges Theorem von der Quadratur parabolischer Sectoren (dessen erste Erfindung jedoch, wie Gaufs in der *Theoria motus corporum coelestium, p.* 119, nachgewiesen hat, eigentlich Euler gebührt), von dem Olbers in seiner Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen, die in den Händen eines jeden Astronomen ist, eine so schöne Anwendung bei der Berechnung der Cometenbahnen gemacht hat, scheint in der Astronomie bekannter zu sein, wie in der Geometrie, und ist, auffallend genug, noch in keins unserer Lehrbücher der Kegelschnitte oder der analytischen Geometrie übergegangen. Es möchte daher nicht unzweckmäfsig sein, dasselbe den Geometern hier wieder in's Gedächtnifs zurückzurufen. Es sind dazu die folgenden Blätter bestimmt, welche, aufser einer eigenthümlichen Demonstration des mehr erwähnten merkwürdigen Theorems, einen nicht minder merkwürdigen Satz über die Quadratur parabolischer Segmente und mehrere andere neue Ausdrücke enthalten werden.

## §. 2.

Als Gleichung der Parabel legen wir die Gleichung

$$y^2 = 4ax$$

zum Grunde, wo also $4a$ den vierfachen Parameter bezeichnet; denken uns die Vectoren $\varrho$, $\varrho'$ zweier beliebigen Punkte $P$, $P'$ der Parabel, deren Coordinaten wir durch $x$, $y$ und $x'$, $y'$ bezeichnen, und die Sehne $PP' = \sigma$ als gegeben, und suchen nun zunächst $a$, $x$, $x'$ durch diese gegebenen Stücke auszudrücken.

Da bekanntlich $\varrho = a + x$, $\varrho' = a + x'$, $\varrho' - \varrho = x' - x$, und offenbar

$$\sigma^2 = (x' - x)^2 + y' - y)^2$$

ist; so haben wir, wenn wir der Kürze wegen

$$\sqrt{x'} - \sqrt{x} = X, \quad \sqrt{x'} + \sqrt{x} = XX'$$

setzen und $\sqrt{x}$, $\sqrt{x'}$ als positif oder negativ betrachten, je nachdem respective $y$, $y'$ positiv oder negativ sind, die Gleichungen:

$$\sigma^2 = (\varrho' - \varrho)^2 + 4aX^2, \quad \varrho' - \varrho = XX'.$$

Nimmt man nun zu diesen Gleichungen noch die Gleichung

$$X = \sqrt{(\varrho' - a)} - \sqrt{(\varrho - a)},$$

wo $\sqrt{(\varrho - a)}$ und $\sqrt{(\varrho' - a)}$ als positiv oder negativ zu betrachten sind, je nachdem $\varrho$, $\varrho'$ respective auf der Seite der positiven oder negativen Ordinaten liegen: so hat man zwischen $a$, $x$, $x'$ drei Gleichungen, mittelst welcher sich diese Gröfsen durch die gegebenen Gröfsen $\varrho$, $\varrho'$, $\sigma$ ausdrüken lassen müssen.

Setzt man der Kürze wegen

$$\sigma^2 - (\varrho' - \varrho)^2 = s, \quad X^{-2} = z;$$

so ist $a = \frac{1}{4}sz$, und folglich

$$X = \sqrt{(\varrho' - \tfrac{1}{4}sz)} - \sqrt{(\varrho - \tfrac{1}{4}sz)},$$

oder, wenn man auf beiden Seiten mit $X$ dividirt:

$$1 = \sqrt{[(\varrho' - \tfrac{1}{4}sz)z]} - \sqrt{[(\varrho - \tfrac{1}{4}sz)z]}.$$

Macht man diese Gleichung rational, so ergiebt sich, nach leichter Rechnung:

$$\sigma^2 z^2 - 2(\varrho' + \varrho)z + 1 = 0,$$

und, wenn man diese Gleichung auflöst:

$$X^2 = \frac{1}{z} = \frac{\sigma^2}{\varrho' + \varrho \pm \sqrt{[(\varrho' + \varrho)^2 - \sigma^2]}},$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner mit

$$\varrho' + \varrho \pm \sqrt{[(\varrho' + \varrho)^2 - \sigma^2]}$$

multiplicirt:

$$X^2 = \varrho' + \varrho \mp \sqrt{[(\varrho' + \varrho)^2 - \sigma^2]},$$
$$X'^2 = \left(\frac{\varrho' - \varrho}{\sigma}\right)^2 \cdot \{\varrho' + \varrho \pm \sqrt{[(\varrho' + \varrho)^2 - \sigma^2]}\},$$

wo nun noch die Bestimmung der Vorzeichen nöthig ist.

Dabei hat man zwei Fälle zu unterscheiden. Liegen nämlich zuerst $\varrho$, $\varrho'$ auf einer Seite der Axe, so haben $\sqrt{(\varrho - a)}$, $\sqrt{(\varrho' - a)}$ gleiche Vorzeichen, und es ist folglich, weil

$$X = \sqrt{(\varrho' - a)} - \sqrt{(\varrho - a)},$$
$$X^2 = \varrho' + \varrho - 2[a + \sqrt{(\varrho' - a)} \cdot \sqrt{(\varrho - a)}]$$

ist, offenbar in diesem Falle

$$X^2 < \varrho' + \varrho.$$

In obigen Formeln sind also die obern Zeichen zu nehmen.

Liegen dagegen $\varrho'$, $\varrho$ auf verschiedenen Seiten der Axe der Parabel, so sind $\sqrt{(\varrho-a)}$, $\sqrt{(\varrho'-a)}$ mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen, und es ist folglich

$$X^2 \lesseqgtr \varrho'+\varrho,$$

je nachdem

$$(\varrho'-a)(\varrho-a) \lesseqgtr a^2,$$

oder, wie man nach leichter Rechnung findet, je nachdem

$$\frac{\varrho'\varrho}{\varrho'+\varrho} \lesseqgtr a$$

ist. Man mufs also in den oben für $X^2$ und $X'^2$ gefundenen Ausdrücken die obern oder untern Zeichen nehmen, je nachdem

$$\frac{\varrho'\varrho}{\varrho'+\varrho} \lesseqgtr a$$

ist. Indefs läfst sich dieses Criterium auch noch auf einen andern Ausdruck bringen. Zieht man nämlich in Fig. 1. (Taf. I.) durch den Focus $F$ der Parabel die Sehne $PP'$ und setzt $FP=\varrho$, $FP'=\varrho'$; so ist

$$F'P:FP=P'Q:PQ,$$

also auch

$$\varrho'^2:\varrho^2=y'^2:y^2=4ax':4ax=x':x,$$

oder

$$\varrho'^2:\varrho^2 = \varrho'-a:\varrho-a;$$

woraus sich leicht

$$\frac{\varrho'\varrho}{\varrho'+\varrho} = a$$

ergiebt; welche Gleichung also Statt findet, wenn die beiden Vectoren $\varrho$, $\varrho'$, vom Focus aus, entgegengesetzt, in einer geraden Linie liegen. Bewegt sich nun $FP=\varrho$ nach $FA$ hin, ohne $FA$ zu überschreiten, so wird $\varrho$ kleiner: bei der Bewegung nach der entgegengesetzten Seite hin, dagegen gröfser. Ist aber $\varrho \lesseqgtr \varrho'$, so ist

$$\varrho'^2 r+\varrho'\varrho r \lesseqgtr \varrho'^2\varrho+\varrho'\varrho r,$$

$$\varrho' r(\varrho'+\varrho) \lesseqgtr \varrho'\varrho(\varrho'+r), \quad \frac{\varrho' r}{\varrho'+r} \lesseqgtr \frac{\varrho'\varrho}{\varrho'+\varrho},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\varrho' r}{\varrho'+r} \lesseqgtr a.$$

Bewegt sich also $FP=\varrho$ nach $FA$, oder nach der entgegengesetzten Seite hin, ohne im ersten Falle $FA$ zu überschreiten; so ist respective

$$\frac{\varrho'\varrho}{\varrho'+\varrho} < a \quad \text{und} \quad \frac{\varrho'\varrho}{\varrho'+\varrho} > a.$$

Im ersten Falle ist der von $\varrho$ und $\varrho'$ nach der Seite des Scheitels der Parabel hin eingeschlossene Winkel $< 180^0$, im zweiten dagegen $> 180^0$, und est ist folglich, wenn $\varrho$, $\varrho'$ auf entgegengesetzten Seiten der Axe der Parabel liegen,

$$\frac{\varrho'\varrho}{\varrho'+\varrho} < a, \quad \frac{\varrho'\varrho}{\varrho'+\varrho} = a, \quad \frac{\varrho'\varrho}{\varrho'+\varrho} > a,$$

je nachdem der in Rede stehende Winkel $< 180^0$, $= 180^0$, $> 180^0$ ist. Liegen also $\varrho$, $\varrho'$ auf verschiedenen Seiten der Axe der Parabel, so mufs man in den oben für $X^2$ und $X'^2$ gefundenen Ausdrücken die obern oder untern Zeichen nehmen, je nachdem der mehr erwähnte Winkel $< 180^0$ oder $> 180^0$ ist. Ist dieser Winkel $= 180^0$, so ist $\varrho'+\varrho = \sigma$, und man kann folglich in diesem Falle beliebig die obern oder untern Zeichen nehmen.

Fassen wir nun dieses Alles nochmals zusammen, so ist

$$X^2 = \varrho'+\varrho \mp \sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]},$$
$$X'^2 = \left(\frac{\varrho'-\varrho}{\sigma}\right)^2 \cdot \{\varrho'+\varrho \pm \sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\},$$

mit der Bestimmung, dafs, wenn $\varrho$, $\varrho'$ auf einer Seite der Axe der Parabel liegen, jederzeit die obern Zeichen, wenn aber $\varrho$, $\varrho'$ auf verschiedenen Seiten der Axe liegen, die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind, je nachdem der von $\varrho$, $\varrho'$, nach der Seite des Scheitels der Parabel hin, eingeschlossene Winkel $<$ oder $> 180^0$ ist; wobei man aber die oben wegen der Zeichen von $\sqrt{x}$ und $\sqrt{x'}$ gegebene Bestimmung zugleich zu beachten hat.

Da nach dem Obigen

$$4a = sz = \frac{s}{X^2}$$

ist; so ist, unter denselben Bedingungen wegen der Zeichen:

$$4a = \frac{\sigma^2-(\varrho'-\varrho)^2}{\varrho'+\varrho \mp \sqrt{(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2}} = \frac{\sigma^2-(\varrho'-\varrho)^2}{\sigma} \cdot \{\varrho'+\varrho \pm \sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}.$$

Lassen wir nun im Folgenden, gröfserer Einfachheit und Bestimmtheit wegen, $\varrho'$ immer den Radius-vector bedeuten, welcher, mit Rücksicht auf deren Vorzeichen, der gröfsten Ordinate entspricht; so ist

$$X = \sqrt{\{\varrho'+\varrho \mp \sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}},$$
$$X' = \frac{\varrho'-\varrho}{\sigma} \sqrt{\{\varrho'+\varrho \pm \sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}},$$

unter der Bedingung, dafs die Wurzelgröfsen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens stets als positiv betrachtet werden, da im Gegentheil die oben wegen der Zeichen von $\sqrt{x}$ und $\sqrt{x_1}$ gegebenen Bestimmungen

auch hier ihre volle Gültigkeit behalten, so dafs nämlich diese Wurzelgröfsen als positiv oder negativ betrachtet werden, je nachdem die den Abscissen $x$ und $x'$ entsprechenden Vectoren $\varrho$ und $\varrho'$ auf der Seite der positiven oder auf der Seite der negativen Ordinaten liegen.

Aus den gefundenen Ausdrücken ergiebt sich ferner auf der Stelle:

$$2\sqrt{x} = \frac{\varrho'-\varrho}{\sigma}\sqrt{\{\varrho'+\varrho\pm\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}} - \sqrt{\{\varrho'+\varrho\mp\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}},$$

$$2\sqrt{x'} = \frac{\varrho'-\varrho}{\sigma}\sqrt{\{\varrho'+\varrho\pm\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}} + \sqrt{\{\varrho'+\varrho\mp\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}}.$$

Alle diese Ausdrücke lassen sich aber auf verschiedene merkwürdige Arten umgestalten, von denen wir nun die wichtigsten kennen lernen wollen.

## §. 3.

Setzt man nämlich

$$\sqrt{\{\varrho'+\varrho\pm\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}} = \sqrt{p}\pm\sqrt{q},$$

quadrirt und vergleicht die rationalen und irrationalen Theile auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit einander; so ergiebt sich

$$p+q=\varrho'+\varrho, \qquad 4pq=(\varrho'+r)^2-\sigma^2;$$

also $p-q=\sigma$, und folglich

$$p=\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}, \qquad q=\frac{\varrho'+\varrho'-\sigma}{2};$$

also

$$\sqrt{\{\varrho'+\varrho\pm\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}} = \sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}}\pm\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}}.$$

Durch Anwendung dieser Transformation ergiebt sich:

$$X = \sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}}\mp\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}},$$

$$X' = \frac{\varrho-\varrho}{\sigma}\left\{\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}}\pm\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}}\right\},$$

$$2\sqrt{x} = \frac{\varrho'-\varrho-\sigma}{\sigma}\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}}\pm\frac{\varrho'-\varrho+\sigma}{\sigma}\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}},$$

$$2\sqrt{x'} = \frac{\varrho'-\varrho+\sigma}{\sigma}\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}}\pm\frac{\varrho'-\varrho-\sigma}{\sigma}\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}};$$

Ausdrücke, welche wegen ihrer Symmetrie merkwürdig sind.

Für $a$ erhält man leicht aus §. 2.

$$2\sqrt{a} = \frac{\sqrt{[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]}}{\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}}\mp\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]}}{\sigma}\left\{\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}}\pm\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}}\right\}.$$

Multiplicirt man diese beiden Ausdrücke von $2\sqrt{a}$ mit einander, so ergiebt sich:

$$4a\sigma = (\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)\cdot\frac{\sqrt{(\varrho'+\varrho+\sigma)}\pm\sqrt{(\varrho'+\varrho-\sigma)}}{\sqrt{(\varrho'+\varrho+\sigma)}\mp\sqrt{(\varrho'+\varrho-\sigma)}}.$$

Berechnet man den Hülfswinkel $\varphi$ aus der Formel

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{\varrho'+\varrho+\sigma};$$

so wird

$$4a\sigma = (\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)\operatorname{tang}(45^\circ\pm\varphi):$$

eine zur numerischen Berechnung von $a$ aus $\varrho$, $\varrho'$, $\sigma$ mittelst der Logarithmen sehr bequeme Formel. Man könnte auch den Hülfswinkel $\psi$ aus der Formel

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{\varrho'+\varrho+\sigma}}$$

berechnen, und würde dann erhalten:

$$4a\sigma = (\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)\operatorname{tang}^2(45^\circ\pm\tfrac{1}{2}\psi).$$

Berechnet man nebst dem Winkel $\varphi$ noch den Winkel $\varphi'$ aus der Formel

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{\varrho'-\varrho+\sigma}{\varrho'-\varrho-\sigma};$$

so wird

$$2\sqrt{x'} = \frac{\varrho'-\varrho-\sigma}{\sigma}\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}}\cdot\frac{\cos(\varphi'\mp\varphi)}{\cos\varphi\cos\varphi'},$$

$$2\sqrt{x'} = \frac{\varrho'-\varrho+\sigma}{\sigma}\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}}\cdot\frac{\sin(\varphi'\pm\varphi)}{\cos\varphi\sin\varphi'}.$$

Die Berechnung der beiden Hülfswinkel $\varphi$ und $\varphi'$ führt also mittelst logarithmischer Rechnung sehr leicht zu den Werthen von $a$, $x$, $x'$.

## §. 4.

Da $\varrho$, $\varrho'$, $\sigma$ gegeben sind und folglich auch die drei Winkel des von diesen Seiten eingeschlossenen Dreiecks als gegeben betrachtet werden können; so wollen wir diese Winkel, so wie sie den obigen Seiten gegenüberstehen, respective durch $V$, $V'$, $S$ bezeichnen und dieselben nun in die Ausdrücke von $x$, $x'$, $a$ einführen, indem wir zugleich bemerken, dafs, weil

$$V+V'+S = 180^\circ$$

ist, wie leicht bewiesen werden kann,

$$\sin V+\sin V'+\sin S = 4\cos\tfrac{1}{2}V\cos\tfrac{1}{2}V'\cos\tfrac{1}{2}S,$$

$$\sin V+\sin V'-\sin S = 4\sin\tfrac{1}{2}V\sin\tfrac{1}{2}V'\cos\tfrac{1}{2}S$$

ist.

Aus §. 2. hat man auch leicht

$$X = \frac{\varrho'+\varrho\mp\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}}{\sqrt{\{\varrho'+\varrho\mp\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}}},$$

$$X' = \frac{\varrho'-\varrho}{\sqrt{\{\varrho'+\varrho\mp\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}}};$$

folglich

$$2\sqrt{x} = \frac{-2\varrho\pm\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}}{\sqrt{\{\varrho'+\varrho\mp\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}}},$$

$$2\sqrt{x'} = \frac{-2\varrho'\mp\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}}{\sqrt{\{\varrho'+\varrho\mp\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}}}.$$

Aber nach bekannten trigonometrischen Sätzen ist

$$5(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}S = \sqrt{[(\varrho'+\varrho+\sigma)(\varrho'+\varrho-\sigma)]} = \sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]};$$

folglich

$$\sqrt{x} = \frac{-\varrho\pm(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}S}{\sqrt{[\varrho'+\varrho\mp2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}S]}},$$

$$\sqrt{x'} = \frac{\varrho'\mp(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}S}{\sqrt{[\varrho'+\varrho\mp2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}S}},$$

und eben so, weil

$$2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\sin\tfrac{1}{2}S = \sqrt{[(\sigma+\varrho'-\varrho)(\sigma-\varrho'+\varrho)]} = \sqrt{[\sigma^2-(\varrho'-\varrho)^2]}$$

ist:

$$\sqrt{a} = \frac{(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}S}{\sqrt{[\varrho'+\varrho\mp2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}S]}}.$$

Setzt man

$$\frac{2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}S}{\varrho'+\varrho} = \sin\Theta;$$

so erhält man die merkwürdigen Formeln:

$$2(\varrho'+\varrho)^{\frac{1}{2}}.\sqrt{x} = 2^{-\frac{1}{2}}(\varrho'-\varrho)\sec(45^0\pm\tfrac{1}{2}\Theta) - 2^{\frac{1}{2}}(\varrho'+\varrho)\sin(45^0\mp\tfrac{1}{2}\Theta),$$

$$2(\varrho'+\varrho)^{\frac{1}{2}}.\sqrt{x'} = 2^{-\frac{1}{2}}(\varrho'-\varrho)\sec(45^0\pm\tfrac{1}{2}\Theta) + 2^{\frac{1}{2}}(\varrho'+\varrho)\sin(45^0\mp\tfrac{1}{2}\Theta),$$

$$2(\varrho'+\varrho)^{\frac{1}{2}}.\sqrt{a} = 2^{\frac{1}{2}}(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\sin\tfrac{1}{2}S\sec(45^0\pm\tfrac{1}{2}\Theta),$$

$$(\varrho'+\varrho)^{\frac{1}{2}}.(\sqrt{x'}-\sqrt{x}) = 2^{\frac{1}{2}}(\varrho'+\varrho)\sin(45^0\mp\tfrac{1}{2}\Theta),$$

$$(\varrho'+\varrho)^{\frac{1}{2}}.(\sqrt{x'}+\sqrt{x}) = 2^{-\frac{1}{2}}(\varrho'+\varrho)\sec(45^0\pm\tfrac{1}{2}\Theta).$$

Will man $\sigma$ aus $\varrho$, $\varrho'$, $S$ berechnen, so hat man

$$\sigma^2 = \varrho'^2+\varrho^2-2\varrho'\varrho\cos S,$$

und folglich, wie sich leicht findet:

$$\sigma = (\varrho'+\varrho)\cos\Theta.$$

## §. 5.

Aus dem vorhergehenden Paragraphen folgt nun auch:

$$\sqrt{\frac{x}{\varrho}} = \frac{-\varrho^{\frac{1}{2}}\pm\varrho'^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}S}{\sqrt{[\varrho'+\varrho\mp2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}S]}},$$

$$\sqrt{\frac{x'}{\varrho'}} = \frac{\varrho'^{\frac{1}{2}} \mp \varrho^{\frac{1}{2}} \cos \tfrac{1}{2} S}{\sqrt{[\varrho' + \varrho \mp 2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}} \cos S]}},$$

$$\sqrt{\frac{\varrho x'}{\varrho' x}} = -\frac{\varrho'^{\frac{1}{2}} \mp \varrho^{\frac{1}{2}} \cos \tfrac{1}{2} S}{\varrho^{\frac{1}{2}} \pm \varrho'^{\frac{1}{2}} \cos \tfrac{1}{2} S},$$

$$\frac{(\varrho x')^{\frac{1}{2}} - (\varrho' x)^{\frac{1}{2}}}{(\varrho x')^{\frac{1}{2}} + (\varrho' x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\varrho'^{\frac{1}{2}} + \varrho^{\frac{1}{2}}}{\varrho'^{\frac{1}{2}} - \varrho^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1 \mp \cos \tfrac{1}{2} S}{1 \pm \cos \tfrac{1}{2} S};$$

also

$$\operatorname{tang}^2 (45^0 \mp 45^0 \pm \tfrac{1}{2} S) = \frac{\varrho'^{\frac{1}{2}} - \varrho^{\frac{1}{2}}}{\varrho'^{\frac{1}{2}} + \varrho^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(\varrho x')^{\frac{1}{2}} - (\varrho' x)^{\frac{1}{2}}}{(\varrho x')^{\frac{1}{2}} + (\varrho' x)^{\frac{1}{2}}},$$

d. i., in Bezug auf die obern Zeichen:

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} S = \frac{\varrho'^{\frac{1}{2}} - \varrho^{\frac{1}{2}}}{\varrho'^{\frac{1}{2}} + \varrho^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(\varrho x')^{\frac{1}{2}} - (\varrho' x)^{\frac{1}{2}}}{(\varrho x')^{\frac{1}{2}} + (\varrho' x)^{\frac{1}{2}}},$$

und in Bezug auf die untern:

$$\cot^2 \tfrac{1}{2} S = \frac{\varrho'^{\frac{1}{2}} - \varrho^{\frac{1}{2}}}{\varrho'^{\frac{1}{2}} + \varrho^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(\varrho x')^{\frac{1}{2}} - (\varrho' x)^{\frac{1}{2}}}{(\varrho x')^{\frac{1}{2}} + (\varrho' x)^{\frac{1}{2}}};$$

wobei zu bemerken, dafs immer $x = \varrho - a$, $x' = \varrho' - a$ ist.

Man findet auch leicht

$$\cos \tfrac{1}{2} S = \pm \frac{\varrho \sqrt{x'} + \varrho' \sqrt{x}}{(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}} (\sqrt{x'} + \sqrt{x})}, \qquad \sin \tfrac{1}{2} S = \frac{(\varrho' - \varrho) \sqrt{a}}{(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}} (\sqrt{x'} + \sqrt{x})},$$

$$\cot \tfrac{1}{2} S = \pm \frac{\varrho \sqrt{x'} + \varrho' \sqrt{x}}{(\varrho' - \varrho) \sqrt{a}}, \qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} S = \pm \frac{(\varrho' - \varrho) \sqrt{a}}{\varrho \sqrt{x'} + \varrho' \sqrt{x}}.$$

## §. 6.

Ferner folgt leicht aus §. 3.

$$a\sigma = \varrho\varrho' \sin^2 \tfrac{1}{2} S \cdot \frac{\sqrt{(\sin V' + \sin V + \sin S)} \pm \sqrt{(\sin V' + \sin V - \sin S)}}{\sqrt{(\sin V' + \sin V + \sin S)} \pm \sqrt{(\sin V' + \sin V - \sin S)}}$$

d. i., wie leicht erhellen wird:

$$a\sigma = \varrho\varrho' \sin^2 \tfrac{1}{2} S \cdot \frac{1 \pm \sqrt{(\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} V \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} V')}}{1 \mp \sqrt{(\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} V \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} V')}},$$

oder, wenn man

$$\sqrt{(\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} V \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} V')} = \operatorname{tang} \omega$$

setzt:

$$a\sigma = \varrho\varrho' \sin^2 \tfrac{1}{2} S \operatorname{tang} (45^0 + \omega).$$

Aus den Formeln für $2\sqrt{x}$ und $2\sqrt{x'}$ in §. 3. ergiebt sich auch leicht:

$$2\sqrt{x} = \frac{\left(\frac{\varrho' - \varrho - \sigma}{\sigma}\right)^2 \left(\frac{\varrho' + \varrho + \sigma}{2}\right) - \left(\frac{\varrho' - \varrho + \sigma}{\sigma}\right)^2 \left(\frac{\varrho' + \varrho - \sigma}{2}\right)}{\frac{\varrho' - \varrho - \sigma}{\sigma} \sqrt{\frac{\varrho' + \varrho + \sigma}{2}} \mp \frac{\varrho' - \varrho + \sigma}{\sigma} \sqrt{\frac{\varrho' + \varrho - \sigma}{2}}},$$

$$2\sqrt{x'} = \frac{\left(\frac{\varrho' - \varrho + \sigma}{\sigma}\right)^2 \left(\frac{\varrho' + \varrho + \sigma}{2}\right) - \left(\frac{\varrho' - \varrho - \sigma}{\sigma}\right)^2 \left(\frac{\varrho' + \varrho - \sigma}{2}\right)}{\frac{\varrho' - \varrho + \sigma}{\sigma} \sqrt{\frac{\varrho' + \varrho + \sigma}{2}} \mp \frac{\varrho' - \varrho - \sigma}{\sigma} \sqrt{\frac{\varrho' + \varrho - \sigma}{2}}},$$

d. i., nach gehöriger Entwickelung:

$$2\sqrt{x} = \frac{4\varrho^2 - (\varrho'+\varrho+\sigma)(\varrho'+\varrho-\sigma)}{(\varrho'-\varrho-\sigma)\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}} \mp (\varrho'-\varrho+\sigma)\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}}}.$$

$$2\sqrt{x'} = \frac{4\varrho'^2 - (\varrho+\varrho+\sigma)(\varrho'+\varrho-\sigma)}{(\varrho'-\varrho+\sigma)\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}} \mp (\varrho'-\varrho-\sigma)\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}}},$$

oder, wenn man wieder den Wink $S$ einführt:

$$\sqrt{x} = \frac{2\varrho(\varrho - \varrho'\cos^2\tfrac{1}{2}S)}{(\varrho'-\varrho-\sigma)\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}} \mp (\varrho'-\varrho+\sigma)\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}}}$$

$$\sqrt{x'} = \frac{2\varrho'(\varrho' - \varrho\cos^2\tfrac{1}{2}S)}{(\varrho'-\varrho+\sigma)\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}} \mp (\varrho'-\varrho'-\sigma)\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho'-\sigma}{2}}}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\varrho(\varrho - \varrho'\cos^2\tfrac{1}{2}S) = A, \quad \varrho'(\varrho' - \varrho\cos^2\tfrac{1}{2}S) = A';$$

so erhält man aus diesen und den Formeln in §. 3., durch Multiplication:

$$\sigma x = A\frac{(\varrho'-\varrho-\sigma)\sqrt{(\varrho'+\varrho+\sigma)} \pm (\varrho'-\varrho+\sigma)\sqrt{(\varrho'+\varrho-\sigma)}}{(\varrho'-\varrho-\sigma)\sqrt{(\varrho'+\varrho+\sigma)} \mp (\varrho'-\varrho+\sigma)\sqrt{(\varrho'+\varrho-\sigma)}},$$

$$\sigma x' = A'\frac{(\varrho'-\varrho+\sigma)\sqrt{(\varrho'+\varrho+\sigma)} \pm (\varrho'-\varrho-\sigma)\sqrt{(\varrho'+\varrho-\sigma)}}{(\varrho'-\varrho+\sigma)\sqrt{(\varrho'+\varrho+\sigma)} \mp (\varrho'-\varrho-\sigma)\sqrt{(\varrho'+\varrho-\sigma)}}.$$

Hieraus erhält man ohne Schwierigkeit:

$$\sigma x = A\frac{(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}V)^{\frac{1}{2}} \mp (\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}V')^{\frac{3}{2}}}{(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}V)^{\frac{1}{2}} \pm (\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}V')^{\frac{3}{2}}}, \quad \sigma x' = A'\frac{(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}V')^{\frac{1}{2}} \mp (\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}V)^{\frac{3}{2}}}{(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}V')^{\frac{1}{2}} \pm (\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}V)^{\frac{3}{2}}}.$$

Berechnet man nun den Hülfswinkel $\xi$ aus der Formel:

$$\operatorname{tang}\xi = \left(\frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}V}{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}V'}\right)^{\frac{1}{2}};$$

so wird

$$\sigma x = A\frac{\sin(\xi \mp \tfrac{1}{2}V')}{\sin(\xi \pm \tfrac{1}{2}V')}, \quad \sigma x' = A'\frac{\cos(\xi \pm \tfrac{1}{2}V)}{\cos(\xi \mp \tfrac{1}{2}V)}.$$

Auch ergiebt sich aus dem Obigen, mittelst des Hülfswinkels $\xi$:

$$a\sigma = \varrho\varrho'\sin^2\tfrac{1}{2}S\frac{\cos(\xi \mp \tfrac{1}{2}V')}{\cos(\xi \pm \tfrac{1}{2}V')}.$$

## §. 7.

Es würden sich aus dem Vorhergehenden noch verschiedene andere merkwürdige Folgerungen ableiten lassen. Wir wollen jedoch hier nur den folgenden Satz, welcher einige Aufmerksamkeit zu verdienen scheint, beweisen. Seien $P$, $P'$, $P''$ drei Puncte der Parabel, die wir, der Einfachheit wegen, jetzt auf einer Seite der Axe liegend annehmen wollen.

Die entsprechenden Vectoren und Abscissen seien $\varrho$, $\varrho'$, $\varrho''$ und $x$, $x'$, $x''$. Die Sehnen $PP'$, $P'P''$, $PP''$ seien $\sigma$, $\sigma'$, $\sigma''$. Die Winkel $PFP'$, $P'FP''$, $PFP''$, wenn $F$ immer den Focus bezeichnet, seien $S$, $S'$, $S''$, wo also $S'' = S + S'$ ist. Nach §. 3. ist, unter der Voraussetzung, dafs $P$, $P'$, $P''$ auf einer Seite der Axe liegen:

$$\sqrt{x'} - \sqrt{x} = \sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}} - \sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}},$$

$$\sqrt{x''} - \sqrt{x'} = \sqrt{\frac{\varrho''+\varrho'+\sigma'}{2}} - \sqrt{\frac{\varrho''+\varrho'-\sigma'}{2}},$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{x''} = \sqrt{\frac{\varrho''+\varrho-\sigma''}{2}} - \sqrt{\frac{\varrho''+\varrho+\sigma''}{2}};$$

folglich, wenn man addirt:

$$\sqrt{\frac{\varrho''+\varrho+\sigma''}{2}} - \sqrt{\frac{\varrho''+\varrho-\sigma''}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}} - \sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}} + \sqrt{\frac{\varrho''+\varrho'+\sigma'}{2}} - \sqrt{\frac{\varrho''+\varrho'-\sigma'}{2}}.$$

Aber nach §. 3. ist

$$\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}} - \sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}} = \frac{\sqrt{[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]}}{2\sqrt{a}},$$

$$\sqrt{\frac{\varrho''+\varrho'+\sigma'}{2}} - \sqrt{\frac{\varrho''+\varrho'-\sigma'}{2}} = \frac{\sqrt{[(\varrho''-\varrho'+\sigma')(\varrho-\varrho''+\sigma')]}}{2\sqrt{a}},$$

$$\sqrt{\frac{\varrho''+\varrho+\sigma''}{2}} - \sqrt{\frac{\varrho''+\varrho-\sigma''}{2}} = \frac{\sqrt{[(\varrho''-\varrho+\sigma'')(\varrho-\varrho''+\sigma'')]}}{2\sqrt{a}};$$

folglich ist

$$\sqrt{[(\varrho''-\varrho+\sigma'')(\varrho-\varrho''+\sigma'')]}$$
$$= \sqrt{[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]} + \sqrt{[(\varrho''-\varrho'+\sigma')(\varrho'-\varrho''+\sigma')]}$$

oder

$$\sin\tfrac{1}{2}S.\sqrt{(\varrho\varrho')} + \sin\tfrac{1}{2}S'.\sqrt{(\varrho'\varrho'')} = \sin\tfrac{1}{2}S''.\sqrt{(\varrho\varrho'')},$$

woraus, weil $S'' = S + S'$ ist, auch die Relation

$$\frac{\sin\frac{1}{2}S'}{\sin\frac{1}{2}S} = -\frac{\sqrt{(\varrho\varrho')} - \sqrt{(\varrho\varrho'')}.\cos\frac{1}{2}S'}{\sqrt{(\varrho'\varrho'')} - \sqrt{(\varrho\varrho'')}\cos\frac{1}{2}S}$$

folgt.

Bezeichnen wir die Flächenräume der Dreiecke $PFP'$, $P'FP''$, $PFP''$ durch $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$; so ist

$$2\Delta = \varrho\varrho'\sin S, \qquad 2\Delta' = \varrho'\varrho''\sin S', \qquad 2\Delta'' = \varrho\varrho''\sin S'';$$

also

$$\sqrt{(\varrho\varrho')} = \frac{\Delta}{\sin\frac{1}{2}S\cos\frac{1}{2}S}, \qquad \sqrt{(\varrho'\varrho'')} = \frac{\Delta'}{\sin\frac{1}{2}S'\cos\frac{1}{2}S'}, \qquad \sqrt{(\varrho\varrho'')} = \frac{\Delta''}{\sin\frac{1}{2}S\cos\frac{1}{2}S''},$$

und folglich

$$\sqrt{(\Delta\tang\tfrac{1}{2}S)} + \sqrt{(\Delta'\tang\tfrac{1}{2}S')} = \sqrt{(\Delta''\tang\tfrac{1}{2}S'')}.$$

Bezeichnen wir ferner in Fig. 2. die Dreiecke $PFP'$, $P'FP''$, $P''FP'''$, $P'''FP^{IV}$ durch $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$, $\Delta'''$ und die in der Figur eben so bezeichneten Winkel durch $S$, $S'$, $S''$, $S'''$; dagegen die Dreiecke $PFP''$, $PFP'''$, $PFP^{IV}$ durch $D$, $D'$, $D''$ und die in der Figur eben so bezeichneten Winkel an der gemeinschaftlichen Spitze $F$ durch $\Sigma$, $\Sigma'$, $\Sigma''$; so ist, wie wir so eben bewiesen haben:

$$\begin{aligned}\sqrt{(D\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Sigma)} &= \sqrt{(\Delta\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}S)}+\sqrt{(\Delta'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}S')},\\ \sqrt{(D'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Sigma')} &= \sqrt{(D\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Sigma)}+\sqrt{(\Delta''\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}S'')},\\ \sqrt{(D''\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Sigma'')} &= \sqrt{(D'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Sigma')}+\sqrt{(\Delta'''\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}S''')};\end{aligned}$$

folglich

$$\sqrt{(D''\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Sigma'')}$$
$$= \sqrt{(\Delta\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}S)}+\sqrt{(\Delta'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}S')}+\sqrt{(\Delta''\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}S'')}+\sqrt{(\Delta'''\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}S''')};$$

und es erhellet hieraus zugleich, wie sich dies allgemeiner machen läfst.

## §. 8.

Ohne weitere Folgerungen aus dem Vorhergehenden zu ziehen, gehen wir nun zu der Quadratur parabolischer Räume über und wollen zuerst die Quadratur eines von den Vectoren $\varrho$, $\varrho'$ und dem zwischen beiden Vectoren enthaltenen Bogen der Parabel eingeschlossenen Sectors versuchen, welches die in §. 1. erwähnte Aufgabe ist, die Lambert in seinen „Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik, Thl. III. S. 257," und schon früher in der Schrift: *Insigniores orbitae cometarum proprietates*, Aug. Vindelic. 1761. §. 83." auf eine so elegante Weise aufgelöset hat. Wir werden aber hier auf einem eigenthümlichen Wege zu demselben Resultate gelangen, indem wir die Area des in Rede stehenden Sectors von nun an immer durch $\Sigma$ bezeichnen.

Der Flächeninhalt eines zwischen den Coordinaten $x$, $y$ enthaltenen Parabelsegments ist bekanntlich $= \frac{2}{3}xy = \frac{2}{3}x\sqrt{(ax)}$. In Bezug auf Fig. 3. ist also

$$APQ = \tfrac{4}{3}x\sqrt{(ax)}, \qquad \Delta FPQ = \mp(x-a)\sqrt{(ax)};$$

folglich

$$AFP = APQ \pm FPQ = (a+\tfrac{1}{3}x)\sqrt{(ax)}.$$

Betrachten wir nun $\sqrt{x}$ immer als positiv, so ist in dem in Fig. 4. dargestellten Falle:

$$\begin{aligned}\Sigma &= (a+\tfrac{1}{3}x')\sqrt{(ax')}-(a+\tfrac{1}{3}x)\sqrt{(ax)}\\ &= a[\sqrt{(ax')}-\sqrt{(ax)}]+\tfrac{1}{3}[x'\sqrt{(ax')}-x\sqrt{(ax)}],\end{aligned}$$

und in dem in Fig. 5. dargestellten Falle:

$$\Sigma = (a+\tfrac{1}{3}x')\sqrt{(ax')}+(a+\tfrac{1}{3}x)\sqrt{(ax)}$$
$$= a[\sqrt{(ax')}+\sqrt{(ax)}]+\tfrac{1}{3}[x'\sqrt{(ax')}+x\sqrt{(ax)}].$$

Betrachten wir aber in dem zweiten Falle, wie es nach der in §. 2. gegebenen Bestimmung nothwendig ist, $\sqrt{x}$ als negativ; so ist allgemein

$$\Sigma = a[\sqrt{(ax')}-\sqrt{(ax)}]+\tfrac{1}{3}[x'\sqrt{(ax')}-x\sqrt{(ax)}].$$

Aber

$$x'\sqrt{(ax')}-x\sqrt{(ax)} = \tfrac{1}{2}\{x'+x+[\sqrt{x'}+\sqrt{x}]^2\}[\sqrt{(ax')}-\sqrt{(ax)}];$$

wie durch leichte Rechnung bewiesen werden kann. Folglich

$$\Sigma = \left[a+\frac{x'+x+[\sqrt{x'}+\sqrt{x}]^2}{6}\right][\sqrt{(ax')}-\sqrt{(ax)}],$$

oder, wenn wir wieder

$$\sqrt{x'}-\sqrt{x}=X, \qquad \sqrt{x'}+\sqrt{x}=X'$$

setzen:

$$\Sigma=\tfrac{1}{6}a^{\frac{1}{2}}[6a+x'+x+X'^2]X=\tfrac{1}{6}a^{\frac{1}{2}}[4a+\varrho'+\varrho+X'^2]X.$$

Folglich, wenn man die in §. 2. und §. 4. für $4a$, $X$, $X'$ gefundenen Ausdrücke einführt:

$$\Sigma = \tfrac{1}{6}a^{\frac{1}{2}}.\frac{\sigma^2+(\varrho'+\varrho)\{\varrho'+\varrho\mp[\sqrt{(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2}]\}}{\sqrt{\{\varrho'+\varrho\mp[\sqrt{(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2}]\}}},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\{\varrho'+\varrho\pm\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}}$$

multiplicirt:

$$\frac{6\Sigma}{\sqrt{a}}=\sigma\sqrt{\{\varrho'+\varrho\pm\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}}+(\varrho'+\varrho)\sqrt{\{\varrho'+\varrho\mp\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}};$$

also nach der aus §. 3. bekannten Zerlegung der Wurzelgröfsen, auf der rechten Seite:

$$\frac{6\Sigma}{\sqrt{a}} = \sigma\left[\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}}\pm\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}}\right]+(\varrho'+\varrho)\left[\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}}\pm\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}}\right];$$

woraus, nach einigen leichten Verwandlungen,

$$\Sigma = \tfrac{1}{6}\sqrt{\frac{a}{2}}.[(\varrho'+\varrho+\sigma)^{\frac{3}{2}}\mp(\varrho'+\varrho-\sigma)^{\frac{3}{2}}]$$

folgt; welches der gewöhnlich nach **Lambert** benannte, überaus merkwürdige Ausdruck für die Area eines parabolischen Sectors durch die Vectoren $\varrho$, $\varrho'$ und die entsprechende Chorde $\sigma$ ist.

Auch ist

$$\frac{6\Sigma}{\sqrt{a}} = \left\{\frac{\varrho\sqrt{\{\varrho'+\varrho\pm\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}}}{\sqrt{\{\varrho'+\varrho\mp\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}}}+\varrho'+\varrho\right\}\sqrt{\{\varrho'+\varrho\mp\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}},$$

und folglich, wenn man Zähler und Nenner des Bruchs in den Klammern mit der Wurzelgröfse im Zähler multiplicirt:

$$\frac{6\Sigma}{\sqrt{a}} = \{2(\varrho'+\varrho) \pm \sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}\sqrt{\{\varrho'+\varrho \mp \sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}},$$

oder, wenn man den Winkel $S$ einführt:

$$\frac{3\Sigma}{\sqrt{a}} = \{\varrho'+\varrho \pm (\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}} \cos\tfrac{1}{2}S\}\sqrt{\{\varrho'+\varrho \mp 2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}S},$$

welcher Ausdruck ebenfalls von Lambert gefunden und in den Beiträgen Thl. III. S. 258 mitgetheilt ist.

Setzen wir, wie in §. 4.,

$$\frac{2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}S}{\varrho'+\varrho} = \sin\Theta;$$

so wird

$$\begin{aligned}\frac{3\Sigma}{\sqrt{a}} &= (\varrho'+\varrho)^{\frac{3}{2}}(1 \pm \tfrac{1}{2}\sin\Theta)\sqrt{(1 \mp \sin\Theta)} \\ &= (\varrho'+\varrho)^{\frac{3}{2}}(1 \pm \sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos\tfrac{1}{2}\Theta)(\cos\tfrac{1}{2}\Theta \mp \sin\tfrac{1}{2}\Theta) \\ &= (\varrho'+\varrho)^{\frac{3}{2}}(\cos^3\tfrac{1}{2}\Theta \mp \sin^3\tfrac{1}{2}\Theta),\end{aligned}$$

welcher Ausdruck ebenfalls, seiner Eleganz wegen, bemerkenswerth und zuerst von Delambre im *Traité d'Astronomie. T. III. p.* 229 gegeben worden ist. Einen ähnlichen von Burckhardt gegebenen Ausdruck s. m. in der „Monatlichen Correspondenz. T. IV. 209."

Setzt man

$$\Sigma = \frac{\sigma\sqrt{(a\sigma)}}{6}\cdot\left\{\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{\sigma}}\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2\sigma}} \mp \frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{\sigma}\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2\sigma}}\right\}$$

und führt nun die Winkel $V$, $V'$, $S$ ein, so erhält man:

$$\frac{3\Sigma}{\sqrt{a}} = \left\{\frac{\sigma}{\sin\frac{1}{2}S}\right\}^{\frac{3}{2}}\cdot\left\{(\cos\tfrac{1}{2}V\cos\tfrac{1}{2}V')^{\frac{3}{2}} \mp (\sin\tfrac{1}{2}V\sin\tfrac{1}{2}V')^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

## §. 9.

Nun wollen wir auch den Flächeninhalt des von der Sehne $PP'=\sigma$ abgeschnittenen Segments der Parabel, indem wir denselben durch $\Sigma'$ bezeichnen, zu bestimmen suchen. Der Flächeninhalt des Dreiecks $PFP'$ sei $=\Delta$. Um zuerst den letztern zu bestimmen, haben wir, wenn wir für jetzt $\sqrt{x}$ immer als positiv betrachten, in Fig. 6.

$$\begin{aligned}\Delta &= PQP'Q' \pm PFQ - PFQ' \\ &= (x'-x)(\sqrt{(ax')}+\sqrt{(ax)}) + (x-a)\sqrt{(ax)} - (x'-a)\sqrt{(ax')} \\ &= x'\sqrt{(ax)} - x\sqrt{(ax')} + a(\sqrt{(ax')}-\sqrt{(ax)}).\end{aligned}$$

In Fig. 7. ist

$$\begin{aligned}\Delta &= P'FQ + PFQ - PQP' \\ &= (a-x)(\sqrt{(ax')}+\sqrt{(ax)}) - (x'-x)\sqrt{(ax)} \\ &= -x'\sqrt{(ax)} - x\sqrt{(ax')} + a(\sqrt{(ax')}+\sqrt{(ax)}).\end{aligned}$$

In Fig. 8. hat man

$$\begin{aligned}\triangle &= P'FQ' + PFQ' - PQ'P'\\ &= (x'-a)(\sqrt{(ax')}+\sqrt{(ax)}) - (x'-x)\sqrt{(ax')}\\ &= x'\sqrt{(ax)} + x\sqrt{(ax')} - a(\sqrt{(ax')}+\sqrt{(ax)}).\end{aligned}$$

Nimmt man nun aber, wie es nach dem Obigen geschehen mufs, in den beiden letzten Fällen $\sqrt{x}$ negativ, so überzeugt man sich leicht, dafs überhaupt

$$\triangle = \pm\{x'\sqrt{(ax)} - x\sqrt{(ax')} + a(\sqrt{(ax')}-\sqrt{(ax)})\}$$

zu setzen und das untere Zeichen zu nehmen ist, wenn der von den beiden Vectoren nach der Seite des Scheitels der Parabel hin eingeschlossene Winkel $> 180^0$ ist.

Es ist aber, wie man sich leicht überzeugt:

$$x'\sqrt{(ax)} - x\sqrt{(ax')} = \tfrac{1}{2}\{-x'-x+(\sqrt{x'}+\sqrt{x})^2\}(\sqrt{(ax')}-\sqrt{(ax)}).$$

Also

$$\triangle = \pm\tfrac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}\{2a-x'-x+(\sqrt{x'}+\sqrt{x})^2\}(\sqrt{x'}-\sqrt{x}),$$

und wir haben folglich die beiden sehr symmetrischen und in ihrer Gestaltung übereinstimmenden Formeln:

$$\begin{aligned}6\Sigma &= \phantom{\pm}a^{\frac{1}{2}}\{6a+x'+x+(\sqrt{x'}+\sqrt{x})^2\}(\sqrt{x'}-\sqrt{x}),\\ 2\triangle &= \pm a^{\frac{1}{2}}\{2a-x'-x+(\sqrt{x'}+\sqrt{x})^2\}(\sqrt{x'}-\sqrt{x}),\end{aligned}$$

oder, in der oben eingeführten Bezeichnung:

$$6\Sigma = a^{\frac{1}{2}}[6a+x'+x+X'^2]X, \qquad 2\triangle = \pm a^{\frac{1}{2}}[2a-x'-x+X'^2]X.$$

Für den Inhalt des Segments der Parabel hat man offenbar die Gleichung

$$\Sigma' = \Sigma \mp \triangle,$$

d. i., nach vorstehenden Formeln:

$$3\Sigma' = a^{\frac{1}{2}}[2(x'+x)-X'^2]X,$$

oder

$$3\Sigma' = a^{\frac{1}{2}}[2(\varrho'+\varrho)-4a-X'^2]X,$$

und, wenn man nun die in §. 2. und §. 3. für $4a$, $X'^2$, $X$ gefundenen Ausdrücke einführt:

$$\begin{aligned}\frac{3\Sigma}{\sqrt{a}} &= \frac{2(\varrho'+\varrho)\{\varrho'+\varrho\mp\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}-\sigma^2}{\sqrt{\{\varrho'+\varrho\mp\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}}}\\ &= 2(\varrho'+\varrho)\sqrt{\{\varrho'+\varrho\mp\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}} - \sigma\sqrt{\{\varrho'+\varrho\pm\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}}\\ &= 2(\varrho'+\varrho)\left\{\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}}\mp\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}}\right\} - \sigma\left\{\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}}\pm\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}}\right\}\\ &= \{2(\varrho'+\varrho)-\sigma\}\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}} \mp \{2(\varrho'+\varrho)+\sigma\}\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}}.\end{aligned}$$

Es ist aber auch

$$\frac{3\Sigma}{\sqrt{a}} = (\varrho'+\varrho)\left\{\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}} \mp \sqrt{\frac{\varrho'+\varrho'-\sigma}{2}}\right\}$$

$$+(\varrho'+\varrho-\sigma)\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}} \mp (\varrho'+\varrho+\sigma)\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}}$$

$$= \{\varrho'+\varrho \mp \sqrt{[(\varrho'+\varrho+\sigma)(\varrho'+\varrho-\sigma)]}\}\left\{\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}} \mp \sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}}\right\},$$

d. i. nach §. 3.

$$6\Sigma' = \{\varrho'+\varrho \mp \sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}\cdot\sqrt{[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]},$$

$$\sqrt{(6\Sigma')} = \left\{\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{\sigma}} \mp \sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}}\right\}\cdot\sqrt[4]{[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]},$$

$$\sqrt{(24a\Sigma')} = \sqrt{[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]}\cdot\sqrt[4]{[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]};$$

also

$$\Sigma' = \frac{\sqrt{[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]^3}}{24a},$$

welches ein ebenfalls sehr eleganter Ausdruck ist, der zugleich eine merkwürdige Analogie mit dem im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Ausdruck der Area eines parabolischen Sectors darbietet.

Bekanntlich ist

$$[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]^{\frac{1}{2}} = 2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\sin\tfrac{1}{2}S.$$

Folglich

$$\Sigma' = \frac{(\varrho'\varrho)^{\frac{3}{2}}.\sin^3\frac{1}{2}S}{3a},$$

wodurch der Flächeninhalt eines parabolischen Segments auf eine ebenfalls sehr einfache Weise durch die Vectoren $\varrho$, $\varrho'$ und den eingeschlossenen Winkel $S$ ausgedrückt wird. Es ist aber auch

$$\Sigma' = \frac{[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]^{\frac{1}{2}}}{6}\cdot\frac{(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)}{4a},$$

und folglich, wenn man den in §. 3. für $4a$ gefundenen Ausdruck einführt:

$$\Sigma' = \frac{\sigma}{6}\cdot\frac{\sqrt{(\varrho'+\varrho+\sigma)}\mp\sqrt{(\varrho'+\varrho-\sigma)}}{\sqrt{(\varrho'+\varrho+\sigma)}\pm\sqrt{(\varrho'+\varrho-\sigma)}}\cdot\sqrt{[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]},$$

worin $a$ nicht mehr enthalten ist.

Auch ist

$$6\Sigma = (\varrho'+\varrho)\sqrt{[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]}$$

$$\pm\sqrt{[(\varrho'+\varrho+\sigma)(\varrho+\sigma-\varrho')(\varrho'+\sigma-\varrho)(\varrho'+\varrho-\sigma')]}$$

$$= (\varrho'+\varrho)\sqrt{[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]}\mp 4\Delta.$$

Aber

$$\Sigma' = \Sigma \mp \Delta, \quad \Sigma = \Sigma' \pm \Delta.$$

Also

$$6\Sigma'\pm4\Delta=\Sigma'\pm\Delta\pm3\Delta+5\Sigma'=\Sigma\pm3\Delta+5\Sigma',$$

und folglich

$$\Sigma\pm3\Delta+5\Sigma'=(\varrho'+\varrho)\sqrt{[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]}=2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}(\varrho'+\varrho)\sin\tfrac{1}{2}S.$$

Auch ist

$$\Delta=\tfrac{1}{2}\varrho'\varrho\sin S,$$

und folglich

$$6\Sigma'\pm2\varrho'\varrho\sin S=2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}(\varrho'+\varrho)\sin\tfrac{1}{2}S,$$

$$3\Sigma'=(\varrho'+\varrho)^{\frac{1}{2}}\{\varrho'+\varrho\mp2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}S\}\sin\tfrac{1}{2}S,$$

oder, wenn wir wieder

$$\frac{2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}S}{\varrho'+\varrho}=\sin\Theta$$

setzen:

$$3\Sigma'=2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}(\varrho'+\varrho)\sin\tfrac{1}{2}S\sin^2(45^0\mp\tfrac{1}{2}\Theta),$$

welcher Ausdruck ebenfalls zur Berechnung des Flächeninhalts eines parabolischen Segments sehr bequem ist.

Auch ist

$$\frac{\Delta}{3\Sigma'}=\frac{(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}S}{\varrho'+\varrho\mp2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}S}.$$

Aber nach §. 4.

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}}{\sin\frac{1}{2}S}=\frac{(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{[\varrho'+\varrho\mp2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}S]}}.$$

Also

$$\frac{\Delta}{3\Sigma'}=\frac{a^{\frac{1}{2}}\cot\frac{1}{2}S}{\sqrt{[\varrho'+\varrho\mp2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}S]}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}\cot\frac{1}{2}S}{\{\varrho'+\varrho\mp\sqrt{[(\varrho'+\varrho)^2-\sigma^2]}\}},$$

d. i.

$$\frac{\Delta}{3\Sigma'}=\frac{a^{\frac{1}{2}}\cot\frac{1}{2}S}{\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}}+\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{2}}}.$$

Aber nach §. 3.

$$\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho+\sigma}{2}}\mp\sqrt{\frac{\varrho'+\varrho-\sigma}{\sigma}}=\frac{\sqrt{[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]}}{2\sqrt{a}};$$

folglich

$$\frac{\Delta}{\Sigma'}=\frac{6a\cot\frac{1}{2}S}{\sqrt{[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]}}=\frac{3a\cot\frac{1}{2}S}{(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}\sin S},$$

oder auch, weil

$$\cot\tfrac{1}{2}S=\sqrt{\frac{(\varrho'+\varrho+\sigma)(\varrho'+\varrho-\sigma)}{(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)}}$$

ist:

$$\frac{\Delta}{\Sigma'}=\frac{6a\sqrt{[(\varrho'+\varrho+\sigma)(\varrho'+\varrho-\sigma)]}}{\sqrt{[(\varrho'-\varrho+\sigma)(\varrho-\varrho'+\sigma)]}}.$$

Aehnliche Relationen würden sich leicht noch mehrere finden lassen. Indeſs mögen hier die obigen Andeutungen genügen.

## §. 10.

Sei jetzt in Fig. 3. der Winkel $AFP = S$, der Sector $AFP = \Sigma$, die Sehne $AP = \sigma$, das von dieser Sehne abgeschnittene Segment der Parabel $= \Sigma'$, $AF = a$, $FP = \varrho$; so ist nach §. 5., wenn man für die dortigen $x$, $\varrho$, $\varrho'$ respective 0, $a$, $\varrho$ setzt:

$$\cos\tfrac{1}{2}S = \sqrt{\frac{a}{\varrho}}, \quad \text{d. i.} \quad \cos\tfrac{1}{2}AFP = \sqrt{\frac{AF}{FP}}.$$

Also ist nach §. 8.

$$\frac{3\Sigma}{\sqrt{a}} = (\varrho+2a)\sqrt{(\varrho-a)}, \quad \Sigma = \tfrac{1}{3}(\varrho+2a)\sqrt{[a(\varrho-a)]}.$$

Eben so leicht findet man, da

$$\sin\tfrac{1}{2}S = \sqrt{\frac{\varrho-a}{\varrho}}$$

ist, aus §. 9.:

$$\Sigma' = \tfrac{1}{3}(\varrho-a)\sqrt{[a(\varrho-a)]}.$$

Bezeichnen wir das Dreieck $AFP$ durch $\Delta$, so ist

$$\Delta = \Sigma - \Sigma' = a\sqrt{[a(\varrho-a)]}.$$

Für die Sehne $\sigma$ hat man die Gleichung

$$\sigma^2 = a^2+\varrho^2-2a\varrho\cos S.$$

Aber

$$\cos S = \cos^2\tfrac{1}{2}S - \sin^2\tfrac{1}{2}S = \frac{2a-\varrho}{\varrho}.$$

Also

$$\sigma = \sqrt{[(\varrho-a)(\varrho+3a)]}.$$

Für den Sector $PFP'$ der Parabel hat man nun auch nach dem hier für $\Sigma$ gefundenen Ausdruck die Formel

$$PFP' = \tfrac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}[(\varrho'+2a)\sqrt{(\varrho'-a)} \mp (\varrho+2a)\sqrt{(\varrho-a)}],$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Vectoren $\varrho$, $\varrho'$ auf einer oder verschiedenen Seiten der Axe der Parabel liegen.

## §. 11.

Setzt man in Fig. 6., 7. und 8. den Winkel $AFP = v$ und bezeichnet den von $PF = \varrho$, $P'F = \varrho'$ eingeschlossenen Winkel durch $\Omega$, so dafs unter diesem Winkel, in dem Falle, wenn $\varrho$ und $\varrho'$ auf verschiedenen Seiten der Axe liegen, immer der nach der Seite des Scheitels $A$ hin liegende, von $\varrho$ und $\varrho'$ eingeschlossene Winkel verstanden wird; so ist

$$x = a - \varrho\cos v = \varrho - a, \quad \varrho = \frac{2a}{1+\cos v} = \frac{a}{\cos^2\frac{1}{2}v},$$

und ganz eben so

$$\varrho' = \frac{2a}{1+\cos(\Omega \pm v)} = \frac{a}{\cos^2 \frac{1}{2}(\Omega \pm v)},$$

wo man das untere Zeichen zu nehmen hat, wenn $\varrho$ und $\varrho'$ auf verschiedenen Seiten der Axe liegen. Also

$$\varrho - a = a \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} v, \qquad \varrho' - a = a \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(\Omega \pm v);$$
$$\varrho + 2a = a[3 + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} v], \qquad \varrho' + 2a = a[3 + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(\Omega \pm v)].$$

Folglich, nach gehöriger Substitution, nach §. 10. der Sector

$$PFP' = a^2[\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\Omega \pm v) \mp \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2}(\Omega \pm v) \mp \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2} v],$$

und für $v = 0$ der Sector

$$AFP' = a[\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Omega + \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2}\Omega]:$$

eine Formel, die bekanntlich bei der Berechnung der Cometenbahnen von grofser Wichtigkeit ist.

## §. 12.

Bezeichnet man den von den Vectoren $FP = \varrho$, $FP' = \varrho'$ auf der Parabel abgeschnittenen Bogen durch $P$, so findet man durch Integration

$$P = \sqrt{(\varrho' x')} - \sqrt{(\varrho x)} + a \operatorname{logn} \frac{\sqrt{\varrho'} + \sqrt{x'}}{\sqrt{\varrho'} - \sqrt{x'}}.$$

Da man nun nach dem Obigen $a$, $x$, $x'$ durch $\varrho$, $\varrho'$, $\sigma$ auf mannigfaltige Art ausdrücken kann; so kann man auch den Bogen $P$ aus den Vectoren $\varrho$, $\varrho'$ seiner Endpuncte und aus seiner Chorde $\sigma$ berechnen. Führt man den Winkel $S$ ein, so ergiebt sich:

$$P = \frac{\varrho'^{\frac{3}{2}} + \varrho^{\frac{3}{2}} \mp (\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}}[\varrho'^{\frac{1}{2}} + \varrho^{\frac{1}{2}}] \cos \frac{1}{2} S}{\sqrt{[\varrho' + \varrho \mp 2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} S]}}$$
$$+ a \operatorname{logn} \left\{ \frac{\varrho'^{\frac{1}{2}}}{\varrho^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{[\varrho' + \varrho \mp 2(\varrho'\varrho)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} S]} \mp \varrho^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} S + \varrho'^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{[\varrho' + \varrho \mp 2(\varrho'\varrho) \cos \frac{1}{2} S]} \pm \varrho'^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} S - \varrho^{\frac{1}{2}}} \right\},$$

eine Formel, die sich verschiedentlich umgestalten lassen würde, wobei wir jedoch jetzt nicht länger verweilen.

Für $x = 0$, also $\varrho = a$, wird

$$P = \sqrt{[\varrho'(\varrho' - a)]} + a \operatorname{logn} \frac{\sqrt{\varrho'} + \sqrt{(\varrho' - a)}}{\sqrt{a}}.$$

So wie Lambert seinen Satz auch auf die Ellipse und Hyperbel ausgedehnt hat, worüber man z. B. die *Theoria motus corporum coelestium*, p. 120 und p. 123, nachsehen kann: so würden sich überhaupt auch über die beiden andern Kegelschnitte den obigen analoge Betrachtungen anstellen lassen, worauf wir vielleicht bei einer andern Gelegenheit zurückkommen werden.

Brandenburg, 1833.

# 4.

# Rapport sur un Mémoire de Mr. Liouville, concernant une question nouvelle d'Analyse.

Commissaires Mr. *Lacroix* et *Poisson*.

Suivi d'une Note de Mr. *Liouville*.

---

Lorsqu'un corps de forme quelconque, homogène ou hétérogène, est soumis à une température extérieure qui ne varie pas avec le temps, mais qui varie d'un point à un autre de sa surface, il parvient toujours, au bout d'un temps plus ou moins long, à un état permanent dans lequel la température de chacun de ses points est censée invariable. Pour déterminer cette température finale, il faut satisfaire à une équation relative à la surface du corps, qui dépend de sa forme, du pouvoir rayonnant de cette surface, et de la température extérieure. Dans tous les cas, en petit nombre, où l'on est parvenu jusqu'à présent à résoudre cette question, on a supposé le rayonnement égal en tous les points de la surface, ou du moins, quand il s'est agi d'un parallélepipède rectangle, en tous les points de chacun des six plans qui le terminent. Les problêmes dont Mr. *Liouville* s'est occupé, dans son nouveau Mémoire, se rapportent au cas où la nature de la surface et l'intensité du rayonnement varient d'un point à un autre; mais ils sont relatifs à un plan compris indéfiniment entre deux droites parallèles, ou bien à une surface cylindrique à base circulaire qui se prolonge également à l'infini; en sorte qu'ils ne sont point applicables à des corps naturels, limités en tous sens. Aussi l'auteur ne présente son travail que comme un Mémoire d'analyse pure; et il n'indique les problêmes que nous venons d'énoncer, que pour faire connaître l'origine de ce genre de recherches, et comment il a été conduit à s'en occuper. Mais s'il est vrai que l'analyse mathématique, et particulièrement l'analyse infinitésimale, soit indispensable pour la solution de la plupart des questions de Mécanique, d'Astronomie et de Physique, on doit encore accueillir et encourager les travaux qui ont pour objet de perfectionner ce puissant instrument de l'esprit humain, lors même qu'ils n'ont pas d'applications immédiates.

Considérés sous ce rapport, les Problêmes que Mr. *Liouville* s'est proposés, consistent à déterminer les coefficients d'une série infinie de si-

nus ou de cosinus des multiples d'un angle variable, d'après une équation linéaire, contenant deux fontions données de cette variable, dont l'une, dans le cas de la chaleur, exprimerait le pouvoir rayonnant, et l'autre la température extérieure. Quand la première de ces deux fonctions se réduit à une constante, le problème se résout sans difficulté; mais il n'en est plus de même, dans le cas où cette quantité varie suivant une loi quelconque. L'auteur fait voir qu'alors la valeur de chaque coefficient, en fonction du nombre qui marque son rang dans la série, dépend de deux quantités déterminées par des équations différentielles dont il donne les intégrales. Il parvient à ce résultat par une combinaison très adroite du procédé de l'integration par parties et des formules connues pour la réduction des fonctions en sérics de quantités périodiques. Mais, après que les constantes arbitraires introduites par l'intégration, ont été déterminées, les formules obtenues par Mr. *Liouville,* contiennent encore d'autres constantes dont il reste à trouver les valeurs. Généralement, le nombre de ces constantes est infini; et, pour les déterminer, il faudrait résoudre le système d'une infinité d'équations linéaires, problème qui s'est déjà présenté dans d'autres cas, mais dont l'auteur ne s'est point occupé dans celui-ci. Il se contente d'observer que, dans un cas très étendu, les constantes qu'il s'agit de déterminer sont en nombre fini; il montre comment on formera alors un nombre égal d'équations linéaires qui pourront toujours se résoudre par les règles ordinaires, et de cette manière il parvient, dans ce cas, à une solution complète du problème qu'il s'est proposé.

Le Mémoire que l'Académie a renvoyé à notre examen ne pourra manquer d'ajouter encore à l'opinion avantageuse que les Géomètres se sont formée du talent de l'auteur et de l'étendue de ses connaissances en analyse. Il est bon d'ailleurs d'appeler leur attention sur la question difficile et intérressante que Mr. *Liouville* a traitée, et qui sera susceptible d'une grande extension. Nous vous proposons donc d'approuver son nouveau Mémoire, et d'ordonner qu'il soit imprimé dans le recueil des savants étrangers.

Signé à la minute; *Lacroix* et *Poisson* Rapporteur.

L'Academie adopte les conclusions de ce Rapport.

Certifié conforme

Paris, 5 Janvier 1835. Le secrétaire perpétuel pour les sciences Mathématiques

pour Mr. *Arago* absent

*Flourens.*

---

# Note ajoutée au rapport précédent par Mr. Liouville.

## I.

Le rapport de Mr. *Poisson* fait clairement connaître l'origine et la nature des Problêmes dont je me suis occupé dans mon *Mémoire sur une question d'analyse aux différences partielles;* mais il ne sera pas inutile de transcrire ici les formules qui servent à résoudre un de ces problêmes.

Désignons par $m$ un nombre impair quelconque et par $A_1$, $A_3$, $A_5$, .... $A_m$, .... des coëfficiens constants inconnus. Faisons:

$$A_1 \cos x + A_3 \cos 3x + A_5 \cos 5x + \text{etc.} = \Sigma A_m \cos mx$$

et

$$A_1 \cos x + 3A_3 \cos 3x + 5A_5 \cos 5x + \text{etc.} = \Sigma A_m . \cos mx.$$

Soient de plus $f(x)$, $F(x)$, deux fonctions de $x$ données pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre les limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$: on admet que les fonctions $f(x)$, $F(x)$ ne deviennent jamais infinies entre ces limites et qu'en outre la seconde satisfait à la condition particulière $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Cela posé, on demande la valeur de $A_m$ qui satisfait à l'équation

$$(A.) \quad \Sigma A_m . m \cos mx + f(x) \Sigma A_m . \cos mx = F(x),$$

pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre les limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

En employant deux méthodes différentes que l'on trouvera développées dans mon Mémoire, je me suis assuré que la valeur de $A_m$, qui satisfait à l'équation $(A.)$, est la suivante:

$$A_m = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu (P \cos m\mu + Q \sin m\mu),$$

$P$ et $Q$ étant deux fonctions de $\mu$ fournies par les deux équation différentielles

$$(B.) \quad \begin{cases} \dfrac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) = F(\mu) - \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{Q_\alpha [f(\mu) - f(\alpha)] \cos \mu \sin \alpha \, d\alpha}{\cos^2 \mu - \cos^2 \alpha}, \\ \dfrac{dP}{d\mu} - Qf(\mu) = 0, \end{cases}$$

auxquelles il faut joindre les deux conditions définies $P = 0$ pour $\mu = \frac{\pi}{2}$, $Q = 0$ pour $\mu = 0$, qui servent à déterminer les constantes arbitraires introduites par l'intégration. A peine est-il nécessaire d'ajouter que $Q_\alpha$ représente ce que devient $Q$ l'orsqu'on y change $\mu$ en $\alpha$.

II.

Les équations:

$$(B.)\quad \begin{cases} \frac{dQ}{d\mu}+Pf(\mu) = F(\mu)-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Q_\alpha[f(\mu)-f(\alpha)]\cos\mu\sin\alpha\, d\alpha}{\cos^2\mu-\cos^2\alpha}, \\ \frac{dP}{d\mu}-Qf(\mu) = 0, \end{cases}$$

conduiront à la solution complète du problème que nous traitons, toutes les fois que la fraction

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos\mu\sin\alpha[f(\mu)-f(\alpha)]}{\cos^2\mu-\cos^2\alpha}$$

pourra être ramenée à la forme

$$\Psi_1(\mu)\Pi_1(\alpha)+\Psi_2(\mu)\Pi_2(\alpha)+\dots+\Psi_n(\mu)\Pi_n(\alpha),$$

quelles que soient d'ailleurs les fonctions $\Psi_1(\mu)$, $\Pi_1(\alpha)$, etc. En effet, dans cette hypothèse, si l'on pose

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}Q_\alpha\Pi_1(\alpha)d\alpha=C_1,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}Q_\alpha\Pi_2(\alpha)d\alpha=C_2,\ \dots\int_0^{\frac{\pi}{2}}Q_\alpha\Pi_n(\alpha)d\alpha=C_n,$$

on aura:

$$\frac{dQ}{d\mu}+Pf(\mu) = F(\mu)-C_1\Psi_1(\mu)-C_2\Psi_2(\mu)-\dots-C_n\Psi_n(\mu),$$

$$\frac{dP}{d\mu}-Qf(\mu) = 0.$$

Ces deux équations différentielles du second ordre s'intégrent aisément; car si on les divise par $f(\mu)$, puis que l'on pose $\int_0^\mu f(\mu)d\mu=\theta$, $\theta$ désignant une nouvelle variable indépendante que l'on substituera à la variable $\mu$, il viendra

$$\frac{dQ}{d\theta}+P = \frac{1}{f(\mu)}(F(\mu)-C_1\Psi_1(\mu)-C_2\Psi_2(\mu)-\dots-C_n\Psi_n(\mu)),$$

$$\frac{dP}{d\theta}-Q = 0,$$

équations linéaires faciles à traiter, puisque les coëfficients des quantités $P$, $Q$ et de leurs dérivées sont constants. L'intégration effectuée, on déterminera d'abord les deux constantes arbitraires que cette intégration introduit, en faisant usage des conditions définies $P=0$ pour $\mu=\frac{\pi}{2}$, $Q=0$ pour $\mu=0$. Ensuite on chassera $C_1$, $C_2$, $C_3$, .... $C_n$ en ayant égard aux $n$ égalités

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}Q_\alpha\Pi_1(\alpha)d\alpha=C_1,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}Q_\alpha\Pi_2(\alpha)d\alpha=C_2,\ \dots\int_0^{\frac{\pi}{2}}Q_\alpha\Pi_n(\alpha)d\alpha=C_n,$$

et quand on aura terminé ces calculs d'élimination, les valeurs de $P$ et $Q$ en général ne renfermeront plus rien d'indéterminé.

Si pourtant les équations de condition que je viens d'écrire rentraient les unes dans les autres, quelques unes des constantes $C_1$, $C_2$, .... $C_n$ resteraient indéterminées dans les valeurs de $P$ et $Q$ et par suite dans la valeur de $A_m$. Sans doute une telle circonstance ne se présente jamais dans la Théorie de la chaleur, c'est lorsque la fonction $f(x)$, qui exprime dans cette théorie le rapport du pouvoir rayonnant à la chaleur spécifique, est une fonction positive; mais lorsque l'on regarde la fonction $f(x)$ comme susceptible de prendre des valeurs négatives, le problème qui consiste à trouver la valeur de $A_m$ satisfaisant à l'équation ($A$.), peut très bien devenir indéterminé. Et par exemple, si l'on pose $f(x) = -3$, $F(x) = 0$, l'équation ($A$.) prendra la forme

$$\Sigma A_m . m \cos m x - 3 \Sigma A_m \cos m x = 0;$$

et il est clair qu'on y satisfera en égalant à zéro les coëfficients $A_1$, $A_5$, $A_7$, .... $A_m$, .... et à une constante *quelconque* le coëfficient $A_3$.

En continuant à regarder la valeur de $f(x)$ comme susceptible de prendre une valeur négative, il pourra aussi arriver que nos équations de condition soient incompatibles; et alors il n'existera aucune valeur de $A_m$ satisfaisant à l'équation ($A$.). On aura un exemple simple du cas dont je parle, en faisant $f(x) = -3$, $F(x) = \cos 3x$; car l'équation ($A$.) deviendra:

$$\Sigma A_m . m \cos m x - 3 \Sigma A_m . \cos m x = \cos 3 x,$$

ou bien:

$$\Sigma A_m (m-3) \cos m x = \cos 3 x,$$

égalité évidemment absurde, puisque le coëfficient de $\cos 3x$ est nul dans le premier membre et égal à l'unité dans le second membre.

## III.

Voyons maintenant dans quel cas la fraction

$$\frac{2}{\pi} . \frac{\cos\mu \sin\alpha [f(\mu) - f(\alpha)]}{\cos^2\mu - \cos^2\alpha}$$

pourra être ramenée à la forme

$$\Psi_1(\mu) \Pi_1(\alpha) + \Psi_2(\mu) \Pi_2(\alpha) + \dots + \Psi_n(\mu) \Pi(\alpha).$$

Or je dis que cela arrivera toutes les fois que $f(x)$ sera une fonction rationnelle, entière ou fractionnaire, de $\cos^2 x$.

Supposons en effet qu'on ait:

$$f(\mu) = \frac{f_1(\mu)}{f_2(\mu)},$$

$f_1(\mu)$ et $f_2(\mu)$ désignant des fonctions entières de $\cos^2\mu$. On aura, en changeant $\mu$ en $\alpha$:

$$f(\alpha) = \frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)}.$$

Par conséquent

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos\mu\sin\alpha[f(\mu)-f(\alpha)]}{\cos^2\mu-\cos^2\alpha} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos\mu\sin\alpha[f_1(\mu)f_2(\alpha)-f_2(\mu)f_1(\alpha)]}{f_2(\mu)f_2(\alpha)(\cos^2\mu-\cos^2\alpha}.$$

Pour démontrer la proposition énoncée, il suffit évidemment de faire voir que la quantité

$$\frac{f_1(\mu)f_2(\alpha)-f_2(\mu)f_1(\alpha)}{\cos^2\mu-\cos^2\alpha}$$

est réductible à la forme citée $\Psi_1(\mu)\Pi_1(\alpha)+\Psi_2(\mu)\Pi_2(\alpha)+\dots+\Psi_n(\mu)\Pi_n(\alpha)$. Or rien n'est plus facile. En effet la fonction

$$f_1(\mu)f_2(\alpha)-f_2(\mu)f_1(\alpha)$$

étant une fonction entière de $\cos^2\mu$, $\cos^2\alpha$, et s'annullant quand on a $\cos^2\mu=\cos^2\alpha$, elle doit être divisible par $\cos^2\mu-\cos^2\alpha$, et le résultat de la division ne peut se composer que d'un nombre limité de termes de la forme $B\cos^{2p}\mu\cos^{2q}\mu$. Les équations (*B*.) s'intégreront donc, sous forme finie, par notre méthode, toutes les fois que la quantité $f(x)$ sera exprimée par une fonction rationnelle quelconque de $\cos^2 x$; en sorte que, dans ce cas très étendu, le problème dont nous nous occupons se trouvera résolu d'une manière complète.

IV.

Il reste à démontrer qu'en calculant la valeur de $A_m$ d'après la règle indiquée au commencement de cette Note, on satisfera à l'équation (*A*.).

En posant, pour abréger,

$$\Sigma A_m.\cos mx = \gamma, \quad \Sigma A_m.m\cos mx = \beta,$$

l'équation (*A*.) devient:

$$\beta+\gamma f(x) = F(x).$$

Or, d'après notre valeur de $A_m$, savoir:

$$A_m = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu(P\cos m\mu+Q\sin m\mu),$$

on a:

$$\gamma = \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu(P\cos m\mu+Q\sin m\mu).$$

Soit $P_x$ ce que devient $P$ lorsqu'on y change $\mu$ en $x$: puisque $P$ s'évanouit pour $\mu=\frac{\pi}{2}$, $P_x$ s'évanouira pour $x=\frac{\pi}{2}$. En vertu des formules connues pour le développement des fonctions en séries de quantités pério-

diques, on aura donc (entre les limites $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$):

$$P_x = \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} P\cos m\mu\, d\mu,$$

et par suite:

$$\gamma = P_x + \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q\sin m\mu\, d\mu,$$

d'où l'on tire:

$$\gamma f(x) = P_x f(x) + \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} Qf(x)\sin m\mu\, d\mu.$$

A l'aide d'une intégration par parties et en ayant égard aux conditions définies $P=0$ pour $\mu=\frac{\pi}{2}$, $Q=0$ pour $\mu=0$, on met la valeur de $A_m$ sous la forme

$$A_m = \frac{4}{\pi m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\left(\cos m\mu\frac{dQ}{d\mu} - \sin m\mu\frac{dP}{d\mu}\right).$$

On a dès lors:

$$\beta = \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\left(\cos m\mu\frac{dQ}{d\mu} - \sin m\mu\frac{dP}{d\mu}\right).$$

Puisque les fonctions $P$ et $F(\mu)$ s'évanouissent quand $\mu=\frac{\pi}{2}$, il resulte de la première des équations (*B.*) que $\frac{dQ}{d\mu}$ s'évanouit aussi pour cette valeur de $\mu$. Par conséquent on peut développer (entre les limites $x=0$, $x=\frac{2}{\pi}$) $\frac{dQ_x}{dx}$ en série de cosinus des multiples impairs de $x$, sous la forme:

$$\frac{dQ_x}{dx} = \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos m\mu\cdot\frac{dQ}{d\mu}\, d\mu.$$

D'après la notation adoptée ici, $Q_x$ désigne ce que devient $Q$ par le changement de $\mu$ en $x$.

En ayant égard à cette valeur de $\frac{dQ_x}{dx}$ et aussi à celle de $\frac{dP}{d\mu}$ fournie par la seconde des équations (*B.*), on peut maintenant écrire ainsi la valeur de $\beta$:

$$\beta = \frac{dQ_x}{dx} - \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin m\mu . Qf(\mu)\, d\mu.$$

En ajoutant cette valeur à celle de $\gamma f(x)$, il vient:

$$\beta+\gamma f(x) = \frac{dQ_x}{dx} + P_x f(x) + \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q\sin m\mu[f(x)-f(\mu)]\, d\mu$$

égalité qu'on peut écrire d'une autre manière, savoir:

$$\beta+\gamma f(x) = \frac{dQ_x}{dx}+P_x f(x)+\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q[f(x)-f(\mu)]\,d\mu\,\Sigma\cos mx\sin m\mu.$$

Or, par les méthodes connue pour la sommation des séries de sinus, on obtient:

$$\Sigma\cos mx\sin m\mu = \frac{\sin\mu\cos x}{2(\cos^2 x-\cos^2\mu)}.$$

Donc, en introduisant cette valeur sous le signe $\int$ et remplaçant (ce qui est permis) la lettre $\mu$ par une autre lettre $\alpha$, on a:

$$\beta+\gamma f(x) = \frac{dQ_x}{dx}+P_x f(x)+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_\alpha[f(x)-f(\alpha)]\cos x\sin\alpha\,d\alpha}{\cos^2 x-\cos^2\alpha};$$

et, comme, en changeant $\mu$ en $x$ dans la première des équations (*B.*), il vient

$$\frac{dQ_x}{dx}+P_x f(x)+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_\alpha[f(x)-f(\alpha)]\cos x\sin\alpha\,d\alpha}{\cos^2 x-\cos^2\alpha} = F(x),$$

nous voyons que finalement la valeur de $\beta+\gamma f(x)$ prend la forme:

$$\beta+\gamma f(x) = F(x).$$

Cette dernière égalité est précisément l'équation (*A.*). Donc notre valeur de $A_m$ rend identique l'équation (*A.*); ce qu'il fallait démontrer.

# 5.

# Théorèmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues.

(Par M. *Plücker*, Prof. ord. à Bonn.)

---

## 1.

Soit

$$1.\quad \varphi_n(x,y)=0$$

l'équation générale d'un degré $n$ quelconque entre les deux inconnues $x$ et $y$. Une telle équation contient $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}-1\right)$ coëfficients qui à leur tour sont complètement déterminés, quand on connoit $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}-1\right)$ couples de valeurs de $x$ et $y$ qui satisfont à l'équation proposée; car il est évident que chacun de ces couples fournit une équation linéaire entre les coëfficients en question.

Ajoutons maintenant à l'équation précedente une autre équation quelconque du même degré, que nous représenterons par

$$2.\quad \psi_n(x,y)=0.$$

L'ensemble des équations (1.) et (2.) donne $n^2$ couples de valeurs de $x$ et $y$, qui satisfont non seulement à ces deux équations, mais encore à toute équation, qui en résulte, par quelle combinaison algébrique que ce soit. On peut, en désignant par $\mu$ un coëfficient arbitraire, représenter toutes les équations du $n^{\text{ième}}$ degré qui résultent ainsi des deux équations (1.) et (2.) de la manière suivante:

$$3.\quad \varphi_n(x,y)+\mu\psi_n(x,y)=0.$$

Les $n^2$ couples de valeurs, qui satisfont non seulement à l'équation (1.) mais encore à l'équation (2.) et toutes les équations (3.), ne suffisent donc pas pour déterminer les coëfficients de l'équation (1.). Cette détermination devient complète, si l'on connoit un nouveau couple de valeurs. Soient $y_0$ et $x_0$ ces valeurs, qui satisfont à l'équation (1.) sans satisfaire à l'équation (2.), de sorte qu'on ait:

$$\varphi_n(x_0,y_0)=0,\quad \psi_n(x_0,y_0)\lesseqgtr 0.$$

Ces mêmes valeurs ne pourront jamais satisfaire à l'équation (3.), pourvu qu'on n'y pose $\mu = 0$, ce qui la réduit à l'équation (1.).

Il suit de ce qui précede que $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1.2} - 2\right)$ couples de valeurs prises au hazard, et qui satisfont à l'équation (1.) sont, quant à la détermination des coëfficients de cette équation, tout-à-fait équivalents à $n^2$ couples choisis de manière qu'il satisfont en même tems à une seconde équation *quelconque* du même degré. Car dans les deux cas cette détermination est complète et linéaire si l'on ajoute aux couples donnés un couple nouveau. Ainsi nous sommes parvenu aux deux théorèmes suivants, qui, quant au fond, reviennent au même.

I. *Si l'on donne à deux quantités variables successivement $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1.2} - 2\right)$ couples de valeurs quelconques et si l'on suppose que ces valeurs satisfont à une équation quelconque du* $n^{\text{ième}}$ *degré entre les deux variables, il y aura* $\left\{n^2 - \left(\frac{(n+1)(n+2)}{1.2} - 2\right)\right\} = \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ *couples de valeurs nouveaux, qui satisfont à la même équation et qui dependent uniquement des couples precedents.*

II. *Si l'on connait $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1.2} - 2\right)$ couples des racines de deux équations du* $n^{\text{ième}}$ *degré entre deux inconnues, l'on obtiendra les $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ couples des racines restantes, sans avoir recours à ces équations.*

2.

Il est évident que ces racines inconnues dépendent d'une équation du $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}^{\text{ième}}$ degré. Ensuite l'on entrevoit la forme d'équations symmétriques qui doivent subsister entre les $n^2$ couples de racines des deux équations d'un même degré; car de quelle manière qu'on choisisse parmi ces $n^2$ couples $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1.2} - 2\right)$ pour en déterminer les autres, cette détermination ne doit nullement changer.

3.

Pour rendre l'énoncé de nos théorèmes aussi clair que possible, je m'arreterai un moment au cas de $n = 3$.

***Huit couples de valeurs qui satisfont à une équation du troisième degre entre deux variables, comportent un neuvième couple qui s'obtient linéairement au moyen des autres.***

Soient $x_1$, $y_1$; $x_2$, $y_2$; .... $x_8$, $y_8$ les huit couples de valeurs, qui comportent le neuvième couple que nous désignerons par $x_9$, $y_9$. Il faut alors, d'après le théorème précédent, que des huit équations:

$$Ay_1^3+Bx_1y_1^2+Cx_1^2y_1+Dx_1^3+Ey_1^2+Fx_1y_1+Gx_1^2+Hy_1+Kx_1+I=0,$$
$$Ay_2^3+Bx_2y_2^2+Cx_2^2y_2+Dx_2^3+Ey_2^2+Fx_2y_2+Gx_2^2+Hy_2+Kx_2+I=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Ay_8^3+Bx_8y_8^2+Cx_8^2y_8^2+Dx_8^3+Ey_8^2+Fx_8y_8+Gx_8^2+Hy_8+Kx_8+I=0,$$

se déduise l'équation suivante:

$$Ay_9^3+Bx_9y_9^2+Cx_9^2y_9+Dx_9^3+Ey_9^2+Fx_9y_9+Gx_9^2+Hy_9+Kx_9+I=0;$$

c'est-à-dire, il faut que nous parvenons à cette dernière équation en ajoutant les huit équations qui précèdent, après les avoir respectivement multipliées par des coëfficients convenables $\mu_1$, $\mu_2$, .... $\mu_8$. Ceci suppose qu'on ait:

$$\Sigma\mu = 1, \qquad \Sigma\mu y^2 = y^2,$$
$$\Sigma\mu x = x_9, \qquad \Sigma\mu x^3 = x_9^3,$$
$$\Sigma\mu y = y_9, \qquad \Sigma\mu x^2 y = x_9^2 y_9,$$
$$\Sigma\mu x^2 = x_9^2, \qquad \Sigma\mu x y^2 = x_9 y_9^2,$$
$$\Sigma\mu xy = x_9 y_9, \qquad \Sigma\mu y^3 = y_9^3,$$

en nous servant, pour abréger, du signe $\Sigma$ et en l'étendant de $\mu_1$, $\mu_1 x_1$, $\mu_1 y_1$ etc. jusqu'à $\mu_8$, $\mu_8 x_8$, $\mu_8 y_8$ etc. Ces dix équations sont nécessaire et suffisantes pour déterminer $x_9$ et $y_9$, après avoir déterminé préalablement les huit coëfficients $\mu_1$, $\mu_2$, .... $\mu_8$. Ici je n'entreprendrai pas de faire réssortir des équations ci-dessus, qu'on obtient des valeurs uniques pour $x_9$ et $y_9$; il me suffira d'avoir verifié le théorème général pour le troisième degré, en suivant une marche différente.

4.

Nous pouvons, par des considérations extrêmement simples, généraliser les théorèmes du numéro 1., pour en multiplier les applications et pour les étendre au cas de $n=2$ et même au cas de $n=1$. En effet s'il y en a parmi les $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}-1\right)$ coëfficients de l'équation générale du $n^{\text{ième}}$ degré, un nombre $m$ quelconque qui sont donnés, ou, plus généralement, s'il y a $m$ équations linéaires de condition entre les $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}-1\right)$ coëfficients: chaque coffiëcient donné ou chaque équation linéaire de condition, remplacera complètement, quant à la détermination des $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}-1\right)$

coëfficients, l'une des équations que fournit chaque couple des variables, supposées données. Donc:

III. *Si* m *des coëfficients de l'équation d'un degré* n *quelconque entre deux variables sont donnés, ou bien encore, s'il existe* m *équations linéaires de condition entre ces coëfficients, il suffira de connaître* $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}-(m+2)\right)$ *couples de valeurs des deux variables, qui satisfont à l'équation du* $n^{ième}$ *degré, pour en déduire* $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}+m\right)$ *couples nouveaux.*

Le nombre $m$ peut-être pris arbitrairement entre les limites 0 et $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}-2\right)$.

Pour particulariser, je choisirai les exemples suivants, qui sont de première simplicité.

Si entre les coëfficients $A$, $B$ et $C$ de l'équation linéaire

$$Ay+Bx+C=0$$

il existe une équation de condition également linéaire, un même couple de valeurs de $x$ et $y$ satisfera toujours à l'équation précédente, quelles que soient du reste les valeurs des coëfficients de cette équation.

Si l'on connait trois couples de valeurs de $x$ et $y$ qui satisfont à l'équation suivante

$$A(y^2-x^2)+Bxy+Dy+Ex+F=0$$

l'on déduira linéairement de ces trois couples un quatrième qui satisfera également à la même équation.

Si quatre équations linéaires de condition sont données entre les coëfficients de l'équation suivante

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

il y aura toujours les mêmes quatre couples de valeurs de $x$ et $y$ qui satisferont à cette équation.

5.

Il y a un autre mode de généraliser les théorèmes I. et II. et d'en multiplier les applications.

Parmi les $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}-2\right)$ couples de valeurs qui satisfont à l'équation générale du $n^{ième}$ degré:

$$1. \quad \varphi_n(x,y)=0,$$

et qui dans les théorèmes, que nous venons de citer sont pris arbitrairement, choisissons en à volonté $\left(\frac{(p+1)(p+2)}{1.2}-1\right)$ qui détermineront complètement une équation du $p^{\text{ième}}$ degré, que nous représenterons par

$$2. \quad \varphi_p(x,y) = 0,$$

et qui est satisfaite par chacun de ces couples. Supposons en outre, en fésant

$$n = p+q,$$

que les couples restants, au nombre de

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-2-\left(\frac{(p+1)(p+2)}{1.2}-1\right) = nq-\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}$$

satisfassent tous à une même équation quelconque du $q^{\text{ième}}$ degré:

$$3. \quad \varphi_q(x,y) = 0.$$

Tout ceci admis. il est évident que l'équation générale (1.) comprendra en particulier l'équation suivante:

$$4. \quad \varphi_p(x,y)\varphi_q(x,y) = 0.$$

Donc tous les autres couples, qui d'après nos théorèmes satisfont à l'équation générale (1.), satisferont également à l'équation (4.), c'est-à-dire ou à l'équation (2.) ou à l'équation (3.). Le nombre des couples qui satisfont en même tems aux deux équations (1.) et (3.) s'élévant à $nq$; il suit que les $\left(nq-\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}\right)$ couples qui, d'après nos suppositions, sont de ce nombre, en comportent $\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}$ couples nouveaux. Le théorème ainsi démontré peut s'énoncer de la manière suivante.

IV. *Si l'on connait* $\left(nq-\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}\right)$ *couples des racines de deux équations du* $n^{\text{ième}}$ *et du* $q^{\text{ième}}$ *degré entre deux inconnues,* $n$ *étant plus grand que* $q$ *et* $q$ *plus grand que* 2, *l'on en déduira les* $\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}$ *couples des racines restantes sans recourir aux équations proposées, en fonction des racines connues et par la resolution de deux équations du* $\left(\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}\right)^{\text{ième}}$ *degré.*

En fésant $n=q$, nous retombons sur les théorèmes du numéro 4.

### 6.

Passons maintenant à l'équation générale d'un degré quelconque entre les *trois* inconnues $x$, $y$ et $z$ que nous représenterons par

$$1. \quad \varphi_n(x,y,z) = 0.$$

Le nombre de ses constantes est égal à $\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}-1\right)$; et on peut les déterminer par des équations linéaires quand on connait un pareil nombre de groupes de trois valeurs (prises au hazard) qui verifient l'équation proposée. Mais si, en particulier, ces groupes de trois valeurs sont choisis de manière à verifier en même temps une autre équation *quelconque* du même degré:

$$2.\quad \psi_n(x, y, z) = 0,$$

ce nombre n'est plus suffissant pour déterminer les coefficients de l'équation (1.). Il est évident même, que le nombre infini des groupes de trois valeurs, qui satisfont en même tems à l'équation (2.), ne suffissent point pour ce but; parceque tous satisferont également à l'équation suivante du même degré:

$$\varphi_n(x, y, z) + \mu\psi_n(x, y, z) = 0,$$

en y donnant à $\mu$ une valeur quelconque. Mais si l'on connait en outre un groupe nouveau de valeurs qui satisfont a l'équation (1.), sans satisfaire à l'équation (2.), ce groupe complétera la détermination linéaire des coëfficients de l'équation (1.); d'où l'on conclût que, quant à cette détermination, $\left(\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}-2\right)$ groupes, pris au hazard, sont équivalents à une infinité de pareils groupes, qui conviennent également à une seconde équation quelconque du même degré entre $x$, $y$ et $z$.

Ajoutons aux deux équations (1.) et (2.) une troisième équation du même degré, que nous représenterons par

$$3.\quad \chi_n(x, y, z) = 0.$$

Alors il y a $n^3$ groupes de valeurs des trois inconnues qui satisfont non seulement à ces trois équations (1.), (2.) et (3.) mais encore à toutes les équations du même degré, que contient l'expression suivante, en y regardant $\mu$ et $\nu$ comme arbitraires:

$$\varphi_n(x, y, z) + \mu\psi_n(x, y, z) + \nu\chi_n(x, y, z) = 0.$$

En connaissant les $n^3$ groupes de valeurs en question, l'on retombe donc indifférement sur l'une quelconque de ces équations. Si l'on veut que ce soit en particulier l'équation (1.), il suffit de connaître en outre *deux* groupes de valeurs quelconques $x_1$, $y_1$, $z_1$ et $x_2$, $y_2$, $z_2$, qui satisfont à l'équation (1.) sans satisfaire à aucune des deux équations (2.) et (3.). Car alors on a

$$\varphi_n(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \psi_n(x_1, y_1, z_1) \gtrless 0, \quad \chi_n(x_1, y_1, z_1) = 0;$$
$$\varphi_n(x_2, y_2, z_2) = 0, \quad \psi_n(x_2, y_2, z_2) \gtrless 0, \quad \chi_n(x_2, y_2, z_2) = 0;$$

et pour que les deux mêmes groupes verifient l'équation (3.), il faut que les indéterminées $\mu$ et $\nu$ deviennent zéro. De là on conclût que, quant à la détermination de l'équation (1.), $\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} - 3\right)$ groupes de valeurs, pris au hazard, sont équivalents a $n^3$ groupes, choisis tels, qu'ils satisfont également à deux autres équations *quelconques* du même degré entre $x$, $y$ et $z$.

Nous sommes parvenu ainsi aux théorèmes suivants, en posant pour abréger $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} - 1 = N$.

V. *Si l'on donne à trois quantités variables successivement* (N—1) *groupes de valeurs quelconques et si l'on suppose que ces valeurs satisfont à une équation quelconque du* n[ième] *degré entre les trois variables: il y aura une infinité de tels groupes, dépendant uniquement des groupes donnés, qui satisferont tous à cette même équation.*

VI. *Si l'on donne à trois quantités variables successivement* (N—2) *groupes de valeurs, pris à volonté, et si l'on suppose que ces groupes satisfont à une équation quelconque du* n[ième] *degré entre les trois variables: il y aura toujours* ($n^3$—N+2) *groupes de valeurs nouveaux et dependant uniquement des groupes donnés qui satisferont à cette même équation.*

VII. *Si l'on connoit* (N—1) *groupes de valeurs, qui satisfont en même temps à deux équations du* n[ième] *degré entre trois inconnues, l'on obtiendra une infinité de tels groupes, sans avoir recours aux deux équations proposées.*

VIII. *Si l'on connait* (N—2) *groupes de racines de trois équations données du* n[ième] *degré entre trois inconnues, l'on en déduira les* ($n^3$—N+2) *groupes de racines restantes sans avoir recours aux équations données.*

7.

D'après le mode de généralisation du numéro 4. nous obtenons sur le champ les théorèmes suivants.

IX. *Si parmi les coëfficients de l'équation générale du* n[ième] *degré entre trois variables il y en a* m *de donnés, ou bien encore, si*

m *équations linéaires de condition ont lieu entre ces coëfficients, il en resultera*

1°. *Que,* (N — m — 1) *groupes donnés des trois variables qui verifient l'équation générale, en comportent un nombre infini;*

2°. *Que* (N — m — 2) *groupes donnés en comportent* $(n^3 - N + m + 2)$ *groupes nouveaux.*

L'on peut prendre le nombre $m$ arbitrairement, dans le premier cas entre les limites 0 et $(N-2)$, et dans le second cas entre les limites 0 et $(N-3)$.

8.

Fésons $n = p + q$ et $\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{1.2.3} - 1 = P$, et supposons que l'on prenne à volonté parmi les $(N-1)$ groupes du théorème V. qui verifient l'équation

$$1. \quad \varphi_n(x, y, z) = 0$$

un nombre $P$, suffisant pour déterminer une èquation du $p^{\text{ième}}$ degré, que nous représenterons par

$$2. \quad \varphi_p(x, y, z) = 0.$$

Supposons en outre que les groupes restants, au nombre de $(N-P-1)$ satisfassent tous à une même équation du $q^{\text{ième}}$ degré, representée par

$$3. \quad \varphi_q(x, y, z) = 0.$$

Dans ce cas l'équation (1.) comprendra comme cas particulier la suivante:

$$4. \quad \varphi_p(x, y, z)\varphi_q(x, y, z) = 0,$$

d'où l'on conclut que l'infinité des groupes qui, d'après le théorème cité, satisfont à toutes les équations (1.), verifient également soit l'équation (2.) soit l'équation (3.), et de là on tire le théorème suivant:

X. *Si l'on connoit*

$$N - P - 1 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} - \frac{(n-q+1)(n-q+2)(n-q+3)}{1.2.3} - 1$$

*groupes de trois valeurs qui satisfont en même tems à deux équations entre* x, y *et* z, *dont l'une s'élève au* $n^{\text{ième}}$ *et l'autre au* $q^{\text{ième}}$ *degré, l'on en déduira une infinité de pareils groupes sans avoir recours à ces équations.*

9.

Fésons en outre

$$n = r + s, \quad \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3} - 1 = R,$$

et supposons que les équations suivantes

$\varphi_n(x, y, z) = 0, \quad \varphi_p(x, y, z)\varphi_q(x, y, z) = 0, \quad \varphi_r(x, y, z)\varphi_s(x, y, z) = 0,$
qui s'élévent toutes les trois au $n^{\text{ième}}$ degré, aient $(N-2)$ groupes de racines données. Il en suit, d'après le théorème VI., qu'alors tous leurs groupes de racines, au nombre de $n^3$, sont déterminés. Sur ces $n^3$ groupes de racines, il y en a $nqs$ qui appartiennent aux trois équations suivantes:

5. $\varphi_n(x, y, z) = 0, \quad \varphi_q(x, y, z) = 0, \quad \varphi_s(x, y, z) = 0.$

Distribuons les $(N-2)$ groupes de racines en question de manière, qu'il en viennent

$P$ sur l'équation: $\varphi_p(x, y, z) = 0,$
$R$ - - - $\varphi_r(x, y, z) = 0.$

Ces nombres de groupes sont suffisants pour déterminer ces deux équations. Des $(N-2)$ groupes restent donc

$(N-P-2)$ pour l'équation: $\varphi_q(x, y, z) = 0,$
$(N-R-2)$ - - - $\varphi_s(x, y, z) = 0,$

de sorte qu'il y en a $(N-P-R-2)$ qui appartiennent aux trois équations (5.). De là le théorème suivant.

XI. *Si l'on connait*

$$N-P-R-2 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} - \frac{(n-q+1)(n-q+2)(n-q+3)}{1.2.3} - \frac{(n-s+1)(n-s+2)(n-s+3)}{1.2.3} - 1$$

*groupes des racines de trois équations entre trois inconnues et dont les degrés s'élévent respectivement à* n, q *et* s: *l'on en déduira tous les autres groupes, sans avoir recours aux trois équations proposées.*

Ainsi, par exemple, sur les 60 groupes des racines de trois équations du $3^{\text{ième}}$, $4^{\text{ième}}$ et $5^{\text{ième}}$ degré, 41, pris à volonté, comportent les 19, qui restent.

10.

Nous pouvons maintenant étendre sans difficulté les résultats auxquels nous sommes parvenus jusqu'ici à des équations d'un degré quelconque et entre un nombre quelconque d'inconnues. Nous parvenons ainsi, en généralisant le théorème IX., qui, si l'on pose $m = 0$, comprend les précédents, au théorème suivant, en désignant, pour abréger, par $S$ le nombre des coëfficients de l'équation d'un degré $n$ quelconque entre $g$ inconnues, et par $k$ un nombre arbitraire $> 1$ et $< g$.

XII. *Si parmi les coëfficients de l'équation générale du* $n^{\text{ième}}$ *degré entre* g *variables, il y en a* m *de donnés, ou bien encore si* m *équations linéaires de condition ont lieu entre ces coëfficients, il en resultera:*

1°. ***Que*** (S — m — (g — h)) ***groupes donnés des*** g ***variables, qui verifient l'équation générale, en comportent un uombre infini de pareils groupes, de sorte que, dans tous ces groupes l'on peut prendre à volonté les valeurs de*** (h — 1) ***des*** g ***variables;***

2°. ***Que*** (S—m—(g—1)) ***groupes donnés en comportent*** ($n^g$—S+m+g—1) ***groupes nouveaux.***

**Pour appliquer ces théorèmes, cherchons d'abord le nombre *S*, égal au nombre des termes de l'équation générale moins *un*. L'on voit aisément que les colonnes horizontales suivantes indiquent le nombre des termes, dans lesquels les variables au nombre de *g*, s'élèvent respectivement aux degrés 1, 2, 3, 4, .... *n*.**

$$g$$
$$g+\frac{g(g-1)}{1.2}$$
$$g+2\frac{g(g-1)}{1.2}+\frac{g(g-1)(g-2)}{1.2.3}$$
$$g+3\frac{g(g-1)}{1.2}+\frac{g(g-1)(g-2)}{1.2.3}+\frac{g(g-1)(g-2)(g-3)}{1.2.3.4}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$g+(n-1)\frac{g(g-1)}{1.2}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}.\frac{g(g-1)(g-2)}{1.2.3}$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}.\frac{g(g-1)(g-2)(g-3)}{1.2.3.4}.$$

**Le nombre cherché est donc la somme de tous ces termes pour laquelle on obtient:**

$$S=ng+\frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{g(g-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\frac{g(g-1)(g-2)}{1.2.3}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}.\frac{g(g-1)(g-2)(g-3)}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

**En nous bornant au second degré nous aurons**

$$S=\frac{(g+1)(g+2)}{1.2}-1.$$

**Le dernier théorème, en y posant $m=0$, fait voir que, dans ce cas, des $2^g$ groupes des racines de *g* équations entre *g* inconnues, un nombre de groupes égal à**

$$\frac{(g+1)(g+2)}{1.2}-g=\frac{g(g+1)}{1.2}+1,$$

en comportent les groupes restants au nombre de

$$2^g - \frac{g(g+1)}{1.2} - 1.$$

Ainsi donc

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | groupes en comportent | 1 | pour | $g=3$, |
| 11 | - - - - - | 5 | - | $g=4$, |
| 16 | - - - - - | 16 | - | $g=5$, |
| 22 | - - - - - | 42 | - | $g=6$, |
| etc. | etc. | | | |

11.

Enfin, pour généraliser le théorème XI. désignons la valeur de $S$ qui se rapporte à un degré $u$ quelconque de la manière suivante: $S_n$. Nous aurons alors le théorème suivant.

XIII. *Si l'on connait*

$$S_n - S_{(n-p)} - S_{(n-q)} - \cdots - (g-1)$$

*groupes de racines de* g *équations entre* g *inconnues et s'élévant respectivement aux degrés* n, p, q, .... *l'on en déduit tous les autres, sans avoir recours à ces équations, qui restent incomplètement déterminées.*

Le 5 Mars 1836.

## 6.
# Neue Sterblichkeits-Tabellen für Wittwen-Cassen.

(Vom Herrn Rechnungs-Rath *Brune* zu Berlin.)

Die Königlich-Preufsische allgemeine Wittwen-Verpflegungs-Anstalt zu Berlin bietet jetzt, in 58jährigen Erfahrungen, aus einer Zahl von 31500 successive aufgenommenen Ehepaaren, ziemlich brauchbare Data zu Sterblichkeits- oder sogenannten Decrementen-Tafeln dar, welche ähnlichen, schon bestehenden, oder noch zu errichtenden Instituten zur Prüfung ihres finanziellen Zustandes, oder zur Basis ihrer Beitrags-Berechnungen dienen können. Indem ich diese Erfahrungen und die daraus berechneten Tabellen hier mittheile, finde ich nöthig, zu beider Verständlichkeit und Würdigung folgende Bemerkungen beizufügen.

Die unter der Rubrik „Erfahrung von 1776 bis 1834" stehenden Zahlen von Lebenden sind die Summen der im Anfange aller 58 Receptions-Jahre von jedem Alter vorhanden gewesenen Individuen *). Ich habe sie indirect auf folgende Art ermittelt. Von den zuerst, bei Eröffnung der Anstalt, aufgenommenen Individuen, welche die anfängliche Summe der lebenden bilden, sind die während des ersten Jahres wieder abgegangenen nach gleichen Altern in Abzug gebracht, und der Bestand ist um ein Jahr des Alters höher gerückt, worauf zu demselben die beim Beginn des zweiten Receptions-Jahres aufgenommenen wiederum nach gleichen Altern hinzugesetzt sind und die Summe, also die Anzahl der damals überhaupt vorhanden gewesenen Individuen, sich ergeben hat. So ist von Jahr zu Jahr mit Abzug der Abgegangenen, Hinaufrückung des Bestandes im Alter, und Zuzählung der Aufgenommenen fortgefahren, und am Ende sind die 58 Summen von Lebenden in eine Total-Summe gebracht worden.

*) Die Anstalt repicirt jährlich in zwei Terminen: am 1. April und 1. October, und berechnet dabei das Alter der Mitglieder nach vollen Jahren, dergestalt, dafs weniger als 6 Monate gar nicht, 6 Monate und darüber aber für ein volles Jahr gezählt werden. Es laufen daher, indem man bei ganzen Jahren stehen bleibt, zwei Reihen von Receptions-Jahren, nemlich von April zu April, und von October zu October, neben einander. Beide sind erst für sich besonders durchgenommen und sodann nach ihren Resultaten zusammen gestellt.

Direct gezählt dagegen sind die Summen der in den 58 Jahren überhaupt theils ausgeschiedenen, theils gestorbenen Individuen; wobei das Alter derselben nach jenem zur Zeit ihrer Aufnahme, und nach den inzwischen verflossenen vollen Jahren berechnet ist. Unter ausgeschiedenen verstehe ich die excludirten oder freiwillig zurückgetretenen Paare, die Wittwer, und diejenigen Wittwen, welche, theils wegen des schon im ersten Jahre nach der Aufnahme erfolgten Todes der Männer statutenmäfsig nicht zum Pensions-Genusse gekommen sind, theils bei Wiederverheirathungen sich mit einer Prämie haben abfinden lassen.

Da in der Berechnung der lebend vorhanden gewesenen Individuen die im Laufe eines Jahres successive ausgeschiedenen erst am Ende desselben abgesetzt, mithin so angesehen sind, als wären sie alle bis dahin noch am Leben geblieben, welches doch nicht ganz vorausgesetzt werden kann: so mufste, um ein richtigeres Sterblichkeitsverhältnifs heraus zu bringen, die Summe der lebenden noch corrigirt werden. Denn es sind von den ausgeschiedenen die noch im selbigen Jahre gestorbenen nicht bekannt, diese also unter der Summe der aufgezeichneten Todten nicht mit enthalten. Jene Correctur ist daher durch die zuläfsliche Annahme geschehen, dafs von den ausgeschiedenen Individuen die eine Hälfte in der Mitte, die andere Hälfte am Ende des Jahres abgegangen sei, mithin die ganze jährliche Anzahl derselben die erste Hälfte, die halbe Anzahl aber auch die zweite Hälfte des Jahres vollständig durchlebt habe; woraus denn folgt, dafs im Durchschnitte drei Viertheile der jährlichen Anzahl als solche anzusehen sind, welche zu der für das selbige Jahr aufgezeichneten Anzahl aller gestorbenen contribuirt haben. Diese drei Viertheile also können nur unter der Summe der Lebenden für den Anfang des Jahres stehen bleiben, und die Rubrik „Corrigirte Zahlen der Lebenden" enthält daher die um ein Viertheil verminderten Zahlen der ersten Columne.

Indem nun die so corrigirten Zahlen der Lebenden durch die ihnen correspondirenden Zahlen der Gestorbenen dividirt werden, erhält man in den Quotienten die Sterblichkeitsverhältnisse für jedes Alter, nemlich die durchschnittlichen Zahlen derjenigen Lebenden, von welchen jährlich einer gestorben ist *). Diese Verhältnisse aber fallen bei aufeinander folgenden

*) Will man die jährlichen Durchschnitte der Lebenden und der Gestorbenen an sich wissen: so mufs man freilich die angegebenen Zahlen durch 58 dividiren; in dem Verhältnisse dieser Zahlen aber wird dadurch begreiflich nichts geändert.

Altersjahren so sehr verschieden und abspringend unter sich aus, dafs sie, einzeln genommen, zur Basis der Decrementen-Tafeln nicht gebraucht werden können. Daher habe ich sie noch nach Quinquennien zusammengezogen, dadurch, dafs die Summe der Lebenden jedes Quinquenniums durch die Summe der Gestorbenen desselben dividirt ist. So haben sich summarische Verhältnisse ergeben, welche unter sich ziemlich gute harmonische Reihen bilden und Stetigkeit haltende Interpolationen auf die einzelnen Jahre des Alters gestatten. Nur ist es in der Tabelle über Sterblichkeit der Frauen und Wittwen noch zweckmäfsig gewesen, zur Erlangung besserer Harmonie und Stetigkeit, die beiden Quinquennien vom 36sten bis zum 40sten und vom 41sten bis zum 45sten Jahre in ein Decennium zusammen zu ziehen.

Aus diesen Verhältnissen habe ich nun die beiden Decrementen-Tafeln dergestalt berechnet, dafs ich für das Alter von 20 Jahren eine Anzahl von 10000 Lebenden angenommen, und hiernach gesucht habe, nicht nur in jedem Quinquennio, (resp. in dem oben erwähnten Decennio,) die nemlichen Verhältnisse möglichst genau wieder zu erhalten, sondern auch in sämmtlichen Zahlen der Tafeln möglichst harmonische, stetig zu- oder abnehmende Reihen zu bilden. Ganz zutreffend war dies, ohne bei den Zahlen der Lebenden und der Sterbenden in Brüche zu fallen, nicht zu erreichen; es zeigen aber die Tafeln durchgängig eine sehr befriedigende Uebereinstimmung mit den Erfahrungs-Sätzen.

Besonders merkwürdig sind in den vorliegenden Erfahrungen und Tabellen die Unterschiede der Sterblichkeits-Verhältnisse des männlichen und des weiblichen Geschlechts bei gleichen Altern. Bis zum 25sten Jahre hin ist sogar die Sterblichkeit der Frauen doppelt so grofs, als die der Männer. Der Grund hiervon liegt wesentlich darin, dafs die Anstalt nur solche Männer aufnimmt, welche ihre vollkommene Gesundheit nachweisen, und dafs von den Frauen, nach deren Gesundheit übrigens nicht gefragt wird, viele in Wochenbetten sterben. Erst vom 39sten Lebensjahre ab sind die Sterblichkeitsverhältnisse günstiger für die Frauen, als für die Männer, und das höchste Alter geht sogar bei jenen bis zu 99, bei diesen nur bis zu 87 Jahren. Auch ist nur bis zum 24sten Jahre die mittlere Lebensdauer der Frauen unerheblich kleiner, als die der Männer, wogegen sie weiterhin, und beim 40sten Jahre um fast zwei Jahre, gröfser ist.

---

## 1. Sterblichkeit der Männer.

| Alter. | Erfahrung von 1776 bis 1834. | | | | Es starb also im Durchschnitt jährlich | | Decrementen-Tafel. | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Lebende im Anfange der Jahre. | Ausgeschiedene. | Gestorbene. | Corrigirte Zahlen der Lebenden. | Im einzelnen Alter Einer von | Im Quinquennio des Alters Einer von | Lebende. | Sterbende. | Es stirbt also jährlich im einzelnen Alter Einer von | Es stirbt also jährlich im Quinquennio des Alters Einer von | Mittlere Lebensdauer. |
| Jahre. | | | | | | | | | | | Jahre. |
| 20 | 6 | - | - | 6 | - | - | 10000 | 62 | 161,29 | | 39,60 |
| 21 | 39 | - | 1 | 39 | 39,00 | | 9938 | 62 | 160,29 | | 38,85 |
| 22 | 114 | 2 | 1 | 114 | 114,00 | | 9876 | 63 | 156,76 | | 38,09 |
| 23 | 288 | 3 | 4 | 287 | 71,75 | 156,70 | 9813 | 63 | 155,76 | 156,66 | 37,33 |
| 24 | 667 | 16 | 6 | 663 | 110,50 | | 9750 | 63 | 154,76 | | 36,57 |
| 25 | 1404 | 26 | 4 | 1398 | 349,50 | | 9687 | 64 | 151,36 | | 35,81 |
| 26 | 2423 | 39 | 15 | 2413 | 160,87 | | 9623 | 64 | 150,36 | | 35,04 |
| 27 | 3811 | 60 | 24 | 3796 | 158,17 | | 9559 | 65 | 147,06 | | 34,27 |
| 28 | 5266 | 91 | 25 | 5243 | 209,72 | 143,54 | 9494 | 66 | 143,85 | 143,39 | 33,50 |
| 29 | 6759 | 99 | 63 | 6734 | 106,89 | | 9428 | 67 | 140,72 | | 32,73 |
| 30 | 8261 | 142 | 57 | 8225 | 144,30 | | 9361 | 69 | 135,67 | | 31,96 |
| 31 | 9520 | 135 | 63 | 9486 | 150,57 | | 9292 | 73 | 127,29 | | 31,19 |
| 32 | 10684 | 154 | 102 | 10645 | 104,36 | | 9219 | 78 | 118,19 | | 30,43 |
| 33 | 11594 | 178 | 105 | 11550 | 110,01 | 109,14 | 9141 | 84 | 108,82 | 109,28 | 29,69 |
| 34 | 12394 | 180 | 131 | 12349 | 94,27 | | 9057 | 89 | 101,76 | | 28,96 |
| 35 | 12985 | 192 | 121 | 12937 | 106,93 | | 8968 | 94 | 95,40 | | 28,24 |
| 36 | 13327 | 189 | 129 | 13280 | 102,95 | | 8874 | 98 | 90,55 | | 27,54 |
| 37 | 13459 | 210 | 155 | 13406 | 84,55 | | 8776 | 101 | 86,89 | | 26,84 |
| 38 | 13429 | 198 | 166 | 13380 | 80,60 | 83,73 | 8675 | 104 | 83,41 | 83,71 | 26,15 |
| 39 | 13372 | 208 | 171 | 13320 | 77,89 | | 8571 | 106 | 80,86 | | 25,46 |
| 40 | 13313 | 194 | 175 | 13265 | 75,80 | | 8465 | 109 | 77,66 | | 24,77 |
| 41 | 13093 | 173 | 164 | 13050 | 79,57 | | 8356 | 112 | 74,61 | | 24,09 |
| 42 | 12802 | 190 | 158 | 12755 | 80 73 | | 8244 | 115 | 71,69 | | 23,41 |
| 43 | 12472 | 191 | 206 | 12424 | 60,31 | 68,46 | 8129 | 119 | 68,31 | 68,51 | 22,73 |
| 44 | 12082 | 147 | 196 | 12045 | 61,45 | | 8010 | 122 | 65,66 | | 22,06 |
| 45 | 11728 | 170 | 181 | 11685 | 64,56 | | 7888 | 125 | 63,10 | | 21,40 |
| 46 | 11301 | 148 | 193 | 11264 | 58,36 | | 7763 | 129 | 60,18 | | 20,74 |
| 47 | 10829 | 129 | 197 | 10797 | 54,81 | | 7634 | 133 | 57,40 | | 20,08 |
| 48 | 10444 | 161 | 192 | 10404 | 54,19 | 54,67 | 7501 | 137 | 54,75 | 54,64 | 19,42 |
| 49 | 10004 | 142 | 185 | 9969 | 53,89 | | 7364 | 141 | 52,23 | | 18,77 |
| 50 | 9594 | 146 | 184 | 9557 | 51,94 | | 7223 | 146 | 49,47 | | 18,13 |
| 51 | 9151 | 162 | 181 | 9111 | 50,34 | | 7077 | 151 | 46,87 | | 17,49 |
| 52 | 8710 | 121 | 207 | 8680 | 41,93 | | 6926 | 156 | 44,40 | | 16,86 |
| 53 | 8265 | 133 | 195 | 8232 | 42,22 | 41,52 | 6770 | 162 | 41,79 | 41,55 | 16,24 |
| 54 | 7803 | 119 | 209 | 7773 | 37,19 | | 6608 | 169 | 39,10 | | 15,63 |
| 55 | 7341 | 120 | 198 | 7311 | 36,92 | | 6439 | 176 | 36,59 | | 15,02 |
| 56 | 6837 | 127 | 197 | 6805 | 34,54 | | 6263 | 183 | 34,22 | | 14,43 |
| 57 | 6328 | 114 | 193 | 6300 | 32,64 | | 6080 | 190 | 32,00 | | 13,85 |
| 58 | 5853 | 112 | 179 | 5825 | 32,54 | 29,90 | 5890 | 197 | 29,90 | 29,89 | 13,28 |
| 59 | 5418 | 104 | 219 | 5392 | 24,62 | | 5693 | 204 | 27,90 | | 12,72 |
| 60 | 4880 | 77 | 188 | 4861 | 25,86 | | 5489 | 210 | 26,14 | | 12,18 |

| | Erfahrung von 1776 bis 1834. | | | | Es starb also im Durchschnitt jährlich | | Decrementen-Tafel. | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | Es stirbt also jährlich | | |
| Alter. Jahre. | Lebende im Anfange der Jahre | Ausgeschiedene. | Gestorbene. | Corrigirte Zahlen der Lebenden. | Im einzelnen Alter Einer von | Im Quinquennio des Alters Einer von | Lebende. | Sterbende. | im einzelnen Alter Einer von | im Quinquennio des Alters Einer von | Mittlere Lebensdauer. Jahre. |
| 61 | 4442 | 83 | 192 | 4421 | 23,03 | | 5279 | 216 | 24,44 | | 11,65 |
| 62 | 4004 | 95 | 162 | 3980 | 24,57 | | 5063 | 222 | 22,81 | | 11,12 |
| 63 | 3606 | 87 | 169 | 3584 | 21,21 | 21,22 | 4841 | 228 | 21,23 | 21,21 | 10,61 |
| 64 | 3177 | 82 | 160 | 3157 | 19,73 | | 4613 | 234 | 19,71 | | 10,11 |
| 65 | 2803 | 58 | 162 | 2788 | 27,21 | | 4379 | 240 | 18,25 | | 9,62 |
| 66 | 2487 | 77 | 136 | 2468 | 18,15 | | 4139 | 246 | 16,83 | | 9,15 |
| 67 | 2154 | 50 | 167 | 2141 | 12,08 | | 3893 | 251 | 15,51 | | 8,69 |
| 68 | 1839 | 60 | 130 | 1824 | 14,03 | 14,41 | 3642 | 254 | 14,34 | 14,43 | 8,26 |
| 69 | 1568 | 59 | 104 | 1553 | 14,93 | | 3388 | 255 | 13,29 | | 7,84 |
| 70 | 1334 | 43 | 109 | 1323 | 12,14 | | 3133 | 255 | 12,29 | | 7,44 |
| 71 | 1132 | 39 | 106 | 1122 | 10,58 | | 2878 | 254 | 11,33 | | 7,05 |
| 72 | 950 | 40 | 101 | 940 | 9,31 | | 2624 | 250 | 10,50 | | 6,69 |
| 73 | 778 | 28 | 79 | 771 | 9,76 | 10,00 | 2374 | 242 | 9,81 | 10,00 | 6,34 |
| 74 | 642 | 31 | 70 | 634 | 9,05 | | 2132 | 230 | 9,27 | | 6,00 |
| 75 | 509 | 24 | 41 | 503 | 12,39 | | 1902 | 215 | 8,85 | | 5,66 |
| 76 | 421 | 25 | 49 | 415 | 8,47 | | 1687 | 199 | 8,48 | | 5,33 |
| 77 | 317 | 13 | 35 | 314 | 8,97 | | 1488 | 183 | 8,13 | | 4,98 |
| 78 | 259 | 11 | 32 | 256 | 8,00 | 7,78 | 1305 | 168 | 7,77 | 7,77 | 4,60 |
| 79 | 205 | 8 | 31 | 203 | 6,55 | | 1137 | 155 | 7,34 | | 4,21 |
| 80 | 153 | 12 | 25 | 150 | 6,00 | | 982 | 144 | 6,82 | | 3,79 |
| 81 | 109 | 5 | 17 | 108 | 6,35 | | 838 | 135 | 6,21 | | 3,35 |
| 82 | 79 | 4 | 21 | 78 | 3,71 | | 703 | 128 | 5,49 | | 2,90 |
| 83 | 48 | 5 | 12 | 47 | 3,92 | | 575 | 123 | 4,67 | | 2,44 |
| 84 | 28 | 3 | 4 | 27 | 6,75 | 4,41 | 452 | 118 | 3,83 | 3,86 | 1,97 |
| 85 | 18 | 4 | 5 | 17 | 3,40 | | 334 | 114 | 2,93 | | 1,49 |
| 86 | 8 | 2 | 4 | 8 | 2,00 | | 220 | 111 | 1,98 | | 1,00 |
| 87 | 2 | - | 2 | 2 | 1,00 | | 109 | 109 | 1,00 | | 0,50 |

## 2. Sterblichkeit der Frauen und Wittwen.

| Alter. | Erfahrung von 1776 bis 1834. Lebende im Anfange der Jahre. | Ausgeschiedene. | Gestorbene. | Corrigirte Zahlen der Lebenden. | Es starb also im Durchschnitt jährlich: Im einzelnen Alter Eine von | Im Quinquennio des Alters Eine von | Decrementen-Tafel. Lebende. | Sterbende. | Es stirbt also jährlich: im einzelnen Alter Eine von | im Quinquennio des Alters Eine von | Mittlere Lebensdauer. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Jahre. | | | | | | | | | | | Jahre. |
| 15 | 21 | - | - | 21 | - | | 10809 | 181 | 59,72 | | 40,65 |
| 16 | 107 | - | 1 | 107 | 107,00 | | 10628 | 171 | 62,15 | | 40,33 |
| 17 | 372 | 4 | 8 | 371 | 46,40 | | 10457 | 161 | 64,33 | | 39,98 |
| 18 | 934 | 11 | 17 | 931 | 54,76 | 65,87 | 10296 | 152 | 67,74 | 65,89 | 39,60 |
| 19 | 1921 | 9 | 26 | 1919 | 73,81 | | 10144 | 144 | 70,44 | | 39,19 |
| 20 | 3174 | 10 | 47 | 3172 | 65,36 | | 10000 | 137 | 72,99 | | 38,75 |
| 21 | 4653 | 19 | 64 | 4648 | 72,63 | | 9863 | 131 | 75,29 | | 38,28 |
| 22 | 6225 | 30 | 68 | 6217 | 91,43 | | 9732 | 125 | 77,86 | | 37,78 |
| 23 | 7842 | 39 | 96 | 7832 | 81,58 | 80,19 | 9607 | 119 | 80,73 | 80,24 | 37,27 |
| 24 | 9479 | 37 | 125 | 9470 | 75,76 | | 9488 | 114 | 83,23 | | 36,73 |
| 25 | 10900 | 56 | 134 | 10886 | 81,24 | | 9374 | 110 | 85,22 | | 36,17 |
| 26 | 12228 | 53 | 157 | 12215 | 77,80 | | 9264 | 106 | 87,40 | | 35,60 |
| 27 | 13344 | 40 | 142 | 13334 | 93,20 | | 9158 | 103 | 88,91 | | 35,00 |
| 28 | 14292 | 49 | 150 | 14280 | 95,20 | 88,80 | 9055 | 101 | 89,65 | 88,79 | 34,39 |
| 29 | 14811 | 59 | 171 | 14796 | 86,53 | | 8954 | 100 | 89,54 | | 33,78 |
| 30 | 15191 | 65 | 166 | 15175 | 91,42 | | 8854 | 100 | 88,54 | | 33,15 |
| 31 | 15309 | 49 | 186 | 15297 | 82,25 | | 8754 | 100 | 87,54 | | 32,53 |
| 32 | 15190 | 54 | 159 | 15146 | 95,26 | | 8654 | 100 | 86,54 | | 31,90 |
| 33 | 14996 | 45 | 180 | 14985 | 83,25 | 85,85 | 8554 | 100 | 85,54 | 85,88 | 31,26 |
| 34 | 14689 | 45 | 166 | 14678 | 88,42 | | 8454 | 99 | 85,39 | | 30,63 |
| 35 | 14335 | 32 | 176 | 14327 | 81,40 | | 8355 | 99 | 84,39 | | 29,98 |
| 36 | 13980 | 40 | 174 | 13970 | 80,75 | | 8256 | 98 | 84,24 | | 29,33 |
| 37 | 13541 | 45 | 188 | 13530 | 71,97 | | 8158 | 98 | 83,24 | | 28,68 |
| 38 | 13019 | 34 | 161 | 13010 | 80,81 | 78,48 | 8060 | 98 | 82,24 | 82,58 | 28,02 |
| 39 | 12665 | 34 | 162 | 12657 | 78,13 | | 7962 | 97 | 82,08 | | 27,37 |
| 40 | 12293 | 27 | 150 | 12286 | 81,91 | | 7865 | 97 | 81,08 | | 26,70 |
| 41 | 11868 | 35 | 155 | 11859 | 76,51 | 79,95 (36–45) | 7768 | 97 | 80,08 | 79,93 (36–45) | 26,02 |
| 42 | 11405 | 34 | 119 | 11397 | 97,77 | | 7671 | 98 | 78,28 | | 25,35 |
| 43 | 10926 | 31 | 115 | 10918 | 94,94 | 81,78 | 7573 | 98 | 77,28 | 77,03 | 24,67 |
| 44 | 10516 | 27 | 131 | 10509 | 80,22 | | 7475 | 98 | 76,28 | | 23,99 |
| 45 | 10118 | 20 | 150 | 10113 | 67,42 | | 7377 | 99 | 74,52 | | 23,30 |
| 46 | 9639 | 10 | 140 | 9637 | 68,79 | | 7278 | 100 | 72,78 | | 22,61 |
| 47 | 9210 | 12 | 125 | 9207 | 73,66 | | 7178 | 101 | 71,07 | | 21,91 |
| 48 | 8839 | 21 | 137 | 8834 | 64,48 | 68,58 | 7077 | 103 | 68,71 | 68,56 | 21,22 |
| 49 | 8435 | 16 | 99 | 8431 | 85,16 | | 6974 | 105 | 66,42 | | 20,52 |
| 50 | 8062 | 6 | 143 | 8060 | 56,37 | | 6869 | 107 | 64,20 | | 19,83 |
| 51 | 7662 | 14 | 108 | 7658 | 70,91 | | 6762 | 110 | 61,47 | | 19,14 |
| 52 | 7295 | 9 | 147 | 7293 | 49,61 | | 6652 | 115 | 57,84 | | 18,45 |
| 53 | 6891 | 14 | 141 | 6887 | 48,84 | 53,78 | 6537 | 121 | 54,02 | 53,80 | 17,76 |
| 54 | 6480 | 6 | 127 | 6479 | 51,02 | | 6416 | 127 | 50,52 | | 17,09 |
| 55 | 6154 | 3 | 118 | 6153 | 52,14 | | 6289 | 134 | 46,93 | | 16,42 |

| Alter. | Erfahrung von 1776 bis 1834. Lebende im Anfange der Jahre. | Ausgeschiedene. | Gestorbene. | Corrigirte Zahlen der Lebenden. | Es starb also im Durchschnitt jährlich: Im einzelnen Alter Eine von | Im Quinquennio des Alters Eine von | Decrementen-Tafel. Lebende. | Sterbende. | Es stirbt also jährlich: im einzelnen Alter Eine von | im Quinquennio des Alters Eine von | Mittlere Lebensdauer. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Jahre. | | | | | | | | | | | Jahre. |
| 56 | 5805 | 10 | 139 | 5802 | 41,47 | | 6155 | 141 | 43,65 | | 15,77 |
| 57 | 5442 | 5 | 139 | 5441 | 39,14 | | 6014 | 149 | 40,36 | | 15,13 |
| 58 | 5096 | 5 | 146 | 5095 | 35,14 | 37,37 | 5865 | 157 | 37,36 | 37,31 | 14,50 |
| 59 | 4735 | 4 | 136 | 4734 | 34,81 | | 5708 | 165 | 34,59 | | 13,88 |
| 60 | 4379 | 2 | 122 | 4378 | 35,89 | | 5543 | 173 | 32,04 | | 13,28 |
| 61 | 4099 | 2 | 139 | 4099 | 29,49 | | 5370 | 181 | 29,67 | | 12,69 |
| 62 | 3757 | 2 | 137 | 3756 | 27,42 | | 5789 | 189 | 27,56 | | 12,12 |
| 63 | 3459 | 2 | 142 | 3459 | 24,36 | 25,31 | 5000 | 197 | 25,38 | 25,34 | 11,56 |
| 64 | 3151 | 1 | 138 | 3151 | 22,83 | | 4803 | 205 | 23,43 | | 11,01 |
| 65 | 2869 | - | 129 | 2869 | 22,24 | | 4598 | 213 | 21,59 | | 10,48 |
| 66 | 2596 | 1 | 138 | 2596 | 18,81 | | 4385 | 222 | 19,75 | | 9,97 |
| 67 | 2293 | 3 | 128 | 2292 | 17,91 | | 4163 | 231 | 18,02 | | 9,47 |
| 68 | 2032 | 1 | 123 | 2032 | 16,52 | 16,68 | 3932 | 238 | 16,52 | 16,67 | 9,00 |
| 69 | 1801 | 2 | 105 | 1800 | 17,14 | | 3694 | 242 | 15,22 | | 8,55 |
| 70 | 1588 | 1 | 124 | 1588 | 12,81 | | 3452 | 244 | 14,15 | | 8,11 |
| 71 | 1383 | - | 93 | 1383 | 14,87 | | 3208 | 245 | 13,09 | | 7,69 |
| 72 | 1222 | - | 113 | 1222 | 10,81 | | 2963 | 246 | 12,08 | | 7,28 |
| 73 | 1047 | - | 96 | 1047 | 10,91 | 11,09 | 2717 | 246 | 11,08 | 11,10 | 6,89 |
| 74 | 897 | - | 87 | 897 | 10,31 | | 2471 | 245 | 10,09 | | 6,53 |
| 75 | 772 | 1 | 91 | 772 | 8,48 | | 2226 | 242 | 9,20 | | 6,20 |
| 76 | 637 | - | 79 | 637 | 8,06 | | 1984 | 236 | 8,41 | | 5,89 |
| 77 | 529 | - | 73 | 529 | 7,25 | | 1748 | 224 | 7,80 | | 5,62 |
| 78 | 427 | - | 55 | 427 | 7,76 | 7,61 | 1524 | 206 | 7,40 | 7,61 | 5,37 |
| 79 | 344 | - | 46 | 344 | 7,48 | | 1318 | 184 | 7,16 | | 5,13 |
| 80 | 271 | - | 37 | 271 | 7,32 | | 1134 | 162 | 7,00 | | 4,88 |
| 81 | 211 | - | 34 | 211 | 6,21 | | 972 | 145 | 6,70 | | 4,61 |
| 82 | 160 | - | 25 | 160 | 6,40 | | 827 | 134 | 6,17 | | 4,34 |
| 83 | 122 | - | 24 | 122 | 5,08 | 5,71 | 693 | 126 | 5,50 | 5,70 | 4,08 |
| 84 | 87 | - | 15 | 87 | 5,80 | | 567 | 114 | 4,97 | | 3,87 |
| 85 | 71 | - | 16 | 71 | 4,44 | | 453 | 97 | 4,67 | | 3,72 |
| 86 | 50 | - | 15 | 50 | 3,33 | | 356 | 79 | 4,51 | | 3,60 |
| 87 | 34 | - | 8 | 34 | 4,25 | | 277 | 62 | 4,47 | | 3,49 |
| 88 | 22 | - | 3 | 22 | 7,33 | 4,38 | 215 | 49 | 4,39 | 4,39 | 3,35 |
| 89 | 19 | - | 3 | 19 | 6,33 | | 166 | 39 | 4,26 | | 3,19 |
| 90 | 15 | - | 3 | 15 | 5,00 | | 127 | 31 | 4,10 | | 3,01 |
| 91 | 11 | - | 4 | 11 | 2,75 | | 96 | 24 | 4,00 | | 2,82 |
| 92 | 6 | - | - | 6 | - | | 72 | 19 | 3,79 | | 2,60 |
| 93 | 6 | - | - | 6 | - | | 53 | 15 | 3,53 | | 2,35 |
| 94 | 6 | - | 2 | 6 | 3,00 | | 38 | 12 | 3,17 | | 2,08 |
| 95 | 4 | - | 1 | 4 | 4,00 | 4,00 | 26 | 9 | 2,89 | 3,32 | 1,81 |
| 96 | 3 | - | 1 | 3 | 3,00 | | 17 | 7 | 2,43 | | 1,50 |
| 97 | 2 | - | 1 | 2 | 2,00 | | 10 | 5 | 2,00 | | 1,20 |
| 98 | 1 | - | - | 1 | - | | 5 | 3 | 1,67 | | 0,90 |
| 99 | 1 | - | - | 1 | 1,00 | | 2 | 2 | 1,00 | | 0,50 |

# 7.

# Über einige Aufgaben und Lehrsätze des Herrn Prof. Steiner.

(Von dem Herrn Stud. *Dippe* zu Halle.)

---

Lehrsatz über die Lemniscate (Bd. 14. Hft. 1. S. 88. No. 1.).

„**B**estimmt man in der Hauptachse *DE* (Fig. 9.) einer gewöhnlichen Lemniscate den Punct *F* oder *G*, welcher zu den Scheiteln dieser Achse *D*, *E* und dem einen oder andern Grundpuncte *A* oder *B* der vierte dem letztern zugeordnete harmonische Punct ist, und fället aus diesem Puncte auf irgend einen reellen Durchmesser der Curve ein Perpendikel *FH* oder *GK*: so ist das Rechteck unter den Abständen des Fufspunctes dieses Perpendikels von den Endpuncten jenes Durchmessers, also das Rechteck *HL.HN*, oder *KN.KL*, für alle Durchmesser von constantem Inhalt, und zwar ist dieser Inhalt gleich dem Quadrate der halben Hauptachse, d. i. $= ME^2$, und somit gleich dem Flächeninhalte der Curve."

Beweis. Die Polargleichung der Lemniscate ist (cf. Magnus Aufg. §. 62. Gl. 3.)

$$u^2 = a^2 \cos 2t,$$

wo $a$ die halbe Hauptachse bedeutet, $M$ der Pol und $t = 0$ ist, wenn $u = ME = a$.

Durch eine leichte Umformung erhält man

$$u^2 = a^2(2\cos t^2 - 1) \qquad \text{und} \qquad a^2 = 2a^2\cos t^2 - u^2,$$

oder, wenn man $2a^2 = g^2$ setzt,

$$a^2 = (g\cos t - u)(g\cos t + u),$$

was die Aussage des obigen Lehrsatzes ist. Denn $g = a\sqrt{2} = MG = MF$ ist die Entfernung des geforderten harmonischen Punctes $G$ oder $F$ von $M$, wie sich aus der harmonischen Proportion

$$DB : BE = DG : EG \qquad \text{oder} \qquad DB + BE : BE = DG + EG : EG$$

ergiebt, wenn man die Linien alle absolut nimmt.

Nun ist ferner das Differential eines Sectors

$$\partial S = \frac{u^2 \partial t}{2} = a^2 \cos 2t\, \partial t, \qquad \text{folglich} \qquad S = 4a^2 \int_0^{+\frac{1}{4}\pi} \cos 2t\, \partial t = a^2.$$

Es ist also das Rechteck *LN.NH*, und eben so *HL.HN* dem Inhalte der Lemniscate gleich.

---

**Aufgabe** (a. a. O. S. 89. No. 4.).

1) „Wenn die Grundlinien zweier Dreiecke, einzeln genommen, gegeben sind, und wenn die Summe der vier übrigen Seiten gegeben ist, so sollen diese letztern einzeln so bestimmt werden, dafs die Summe der Flächeninhalte beider Dreiecke ein Maximum wird."

2) „Wenn die Summe der Flächeninhalte zweier Dreiecke und ihre Grundlinien einzeln gegeben sind, so soll man ihre übrigen 4 Seiten finden, für den Fall, wo die Summe derselben ein Maximum ist."

**Auflösung** von 1. Wie auch die Vertheilung geschehen möge: die Dreiecke müssen gleichschenklig sein, damit ein Maximum des Inhalts Statt finde.

Die Grundlinien seien $m$ und $m'$,
die Seiten der Dreiecke $\sigma$ und $\sigma'$,
die Winkel an den Grundlinien $\alpha$ und $\alpha'$.

Dann ist

$$2(\sigma+\sigma')=C \quad \text{oder} \quad \sigma+\sigma'=\frac{C}{2}=c$$

gegeben.

Die Summe des Inhalts der beiden Dreiecke ist

$$1. \quad \tfrac{1}{2}(m\sigma\sin\alpha+m'\sigma'\sin\alpha).$$

Damit dieser Werth ein Maximum sei, mufs zuvörderst

$$2. \quad \frac{m\sin\alpha\,\partial\sigma+m'\sin\alpha'\,\partial\sigma'+\sigma m\cos\alpha\,\partial\alpha+\sigma' m'\cos\alpha'\,\partial\alpha'}{\partial\sigma}=0$$

sein. Zur Vereinfachung der Gleichung (2.) dient

$$3. \quad \begin{cases} \sigma+\sigma'=c, \text{ also } \partial\sigma+\partial\sigma'=0, \\ \cos\alpha=\dfrac{m}{2\sigma} \;\ldots\; \sin\alpha\,\partial\alpha=\dfrac{m\,\partial\sigma}{2\sigma^2}, \\ \cos\alpha'=\dfrac{m'}{2\sigma'} \;\ldots\; \sin\alpha'\,\partial\alpha'=\dfrac{m'\,\partial\sigma'}{2\sigma'^2}, \end{cases}$$

wodurch die Gleichung (2.) übergeht in

$$4. \quad m\sin\alpha'=m'\sin\alpha.$$

Damit also oben ein Maximum Statt finde, müssen sich die Sinus der Winkel an den Grundlinien verhalten, wie diese Grundlinien selbst.

Um $\sigma$ selbst zu bestimmen, quadrire man die Gleichung (4.). Dies giebt, wenn wir statt der Sinus die Cosinus einführen und die Gleichung (3.) zu Hülfe nehmen:

$$5. \quad \sigma^4-2c\sigma^3+c^2\sigma^2-\frac{m^2m'^2c}{2(m^2-m'^2)}\sigma+\frac{m^2m'^2c^2}{4(m^2-m'^2)}=0.$$

Die Aufgabe ist also auf elementarem Wege nicht zu construiren, aufser wenn

$$m = m'.$$

Alsdann ist

$$\sigma = \frac{c}{2} = \sigma',$$

und die beiden Dreiecke sind also congruent.

Um zu entscheiden, ob die Wurzeln der Gleichung (5.) alle einem Maximum angehören, müssen wir den zweiten Differentialquotienten der Gleichung (2.) bilden, und dieselbe zu diesem Ende unter die Form

$$6. \qquad S = \tfrac{1}{4}[m\sqrt{(4\sigma^2 - m^2)} + m'\sqrt{(4(c-\sigma)^2 - m'^2)}]$$

bringen, indem

$$\sigma \sin\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4\sigma^2 - m^2)}, \qquad \sigma' \sin\alpha' = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4(c-\sigma)^2 - m'^2)}$$

ist. Hieraus folgt

$$7. \qquad \frac{\partial S}{\partial \sigma} = \frac{m\sigma}{\sqrt{(4\sigma^2 - m^2)}} - \frac{m'(c-\sigma)}{\sqrt{(4(c-\sigma)^2 - m'^2)}}$$

und

$$8. \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial \sigma^2} = -\left[\frac{m^2}{(4\sigma^2 - m^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{m'^2}{(4(c-\sigma)^2 - m'^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Der zweite Differentialquotient ist also beständig negativ: folglich gehören alle reellen Werthe von $\sigma$, welche die Gleichung (5.) befriedigen, einem Maximum an.

Die Gleichung (5.) hat aber, so lange

$$2c > m + m',$$

also so lange noch Dreiecke möglich sind, stets zwei imaginäre und zwei reelle, positive Wurzeln. Bezeichnen wir die letztern durch $\sigma_1$, $\sigma_2$, so ist stets

$$\sigma_1 < c, \qquad \sigma_2 > c.$$

Wir erhalten also für $\sigma' = c - \sigma$ im zweiten Falle einen negativen Werth, d. h. die Gleichung (5.) enthält die Lösung der obigen Aufgabe, wenn

$$\sigma \pm \sigma' = c$$

gegeben ist, und es sind beide Fälle nicht von einander zu trennen.

Auflösung von 2. Auch hier müssen die Dreiecke gleichschenklig sein, damit bei jeder beliebigen Vertheilung des gegebenen Flächeninhalts die Summe der Seiten ein Minimum sei.

Bezeichnet man durch $\varphi$ und $\varphi'$ die über den Grundlinien $2m$ und $2m'$ zu construirenden Dreiecke, so ist die Summe ihrer übrigen 4 Seiten

$$1. \qquad S = \frac{2\varphi}{m\sin\alpha} + \frac{2\varphi'}{m'\sin\alpha'},$$

wo $\alpha$ und $\alpha'$ wiederum die Winkel an den Grundlinien $2m$ und $2m'$ sind.

Soll $S$ ein Minimum sein, so mufs

$$2.\quad \frac{\partial S}{\partial \varphi}=\frac{1}{\partial \varphi}\Big(\frac{\partial \varphi}{m \sin \alpha}-\frac{\varphi \cos \alpha \partial \alpha}{m \sin \alpha^2}+\frac{\partial \varphi'}{m' \sin \alpha'}-\frac{\varphi' \cos \alpha' \partial \alpha'}{m' \sin \alpha'^2}\Big)=0$$

sein. Mit Hülfe der Gleichungen

$$3.\quad \begin{cases} \varphi+\varphi'=C, & \partial \varphi+\partial \varphi'=0, \\ \varphi=m^2 \operatorname{tang} \alpha, & \partial \alpha=\frac{\partial \varphi \cos^2 \alpha}{m'^2} \\ \varphi'=m'^2 \operatorname{tang} \alpha', & \partial \alpha'=\frac{\partial \varphi' \cos \alpha'^2}{m'^2} \end{cases}$$

geht die Gleichung (2.) über in

$$4.\qquad m' \sin \alpha = m \sin \alpha',$$

welches dieselbe Bedingungsgleichung ist, die für den ersten Theil der Aufgabe erfüllt werden mufste. Man erhält daraus zur Bestimmung von $\varphi$, wenn man statt der Sinus die Tangenten einführt, mit Hülfe der Gleichungen (3.):

$$5.\quad \varphi^4-2C\varphi^3+(C^2+m'^4+m'^2m^2+m^4)\varphi^2-\frac{2m^4C}{m^2-m'^2}\varphi+\frac{m^4C}{m^2-m'^2}=0.$$

Der zweite Differentialquotient von $S$, in Beziehung auf $\varphi$, ist

$$6.\quad \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2}=\frac{2m^3}{(m^4+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2m'^3}{(m'^4+(C-\varphi)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

also beständig positiv: folglich gehören alle Wurzeln der Gleichung (5.) einem Minimum an.

Die Gleichung (5.) hat stets zwei unmögliche und zwei reelle, positive Wurzeln und umschliefst die Lösung der beiden Fälle

$$\varphi \pm \varphi' = C;$$

denn der eine Werth von $\varphi$ ist stets kleiner, der andere stets gröfser als $C$.

Ist übrigens $m=m'$, so ist, wie vorhin,

$$\varphi=\tfrac{1}{2}C,$$

und die beiden Dreiecke sind congruent.

Endlich, wenn $\varphi$ und $\varphi'$ bestimmt sind, so ergeben sich die Seiten

$$\sigma=\frac{\sqrt{(m^4+\varphi^2)}}{m},\qquad \sigma=\frac{\sqrt{(m'^4+\varphi'^2)}}{m'}.$$

---

### Aufgabe 14. und 15. a. a. O. S. 91.

„Läfst man bei einem gegebenen Kreise einen Bogen, von dessen Endpuncten der eine fest ist, von Null an stetig wachsen, so beschreibt sein Schwerpunct irgend eine krumme Linie. Welche Eigenschaft hat diese barycentrische Linie?" etc.

Auflösung. Es sei zunächst in der Ebene irgend ein Polygon $abcdef$ (Fig. 10.) gegeben. Dann liegt der Schwerpunct der ersten Seite $ab$ in der Mitte derselben, in $\alpha$; der Schwerpunct von $abc$ in irgend einem Puncte der die Mitten von $ab$ und $bc$ verbindenden geraden Linie, etwa in $\beta$; ferner liegt der Schwerpunct von $abcd$ auf der geraden Linie, welche den Schwerpunct $\beta$ mit dem Schwerpuncte von $cd$ verbindet, also in $\gamma$ etwa, und so fort in $\delta$, $\varepsilon$ etc.

Werden nun die Seiten des Polygons immer kleiner, so geht dasselbe, an der Grenze, über in eine stetige Curve, an welche die Linien $\beta r$, $\gamma s$, $\delta t$ Tangenten sind. In der Grenze fällt aber $t$ mit $e$ und $f$ zusammen, d. h. der Schwerpunct des Endpunctes eines Bogens ist von dem Endpuncte selbst nicht verschieden. Wir erkennen hieraus folgenden Satz:

„Die barycentrische Curve, welche von dem Schwerpuncte eines wachsenden Bogens irgend einer ebenen Curve beschrieben wird, hat die Eigenschaft, dafs jede Tangente an dieselbe durch den beweglichen Endpunct des Bogens geht, welchem der Berührungspunct als Schwerpunct angehört."

Ist nun ferner irgend ein ebenes Polygon $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots$ (Fig. 11.) gegeben, so bestimmen sich die Schwerpuncte der Flächen $\alpha\beta\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma\delta\alpha$ etc., indem man den Schwerpunct $a$ des ersten Dreiecks mit dem Schwerpuncte $b$ des zweiten durch die Gerade $ab$ verbindet. Dann liegt der Schwerpunct von $\alpha\beta\gamma\delta\alpha$ irgendwo auf $ab$, etwa in $a'$. Eben so liegt der Schwerpunct von $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha$ auf $a'c$, welche den Schwerpunct von $\alpha\beta\gamma\delta\alpha$ mit dem Schwerpuncte des folgenden Dreiecks verbindet etc.

Geht nun das Polygon über in eine Curve, so wird auch das Polygon $aa'a''a'''$ eine Curve, welche der geometrische Ort der Schwerpuncte aller Segmente ist, die von der Curve und einer durch den festen Punct $\alpha$ gehenden beweglichen Sehne begrenzt werden. Die Linien $a'c$, $a''d$, $a'''e$ werden zu Tangenten an die barycentrische Curve. Dies giebt folgenden Satz zu erkennen:

„Die barycentrische Curve, welche von dem Schwerpuncte eines wachsenden Segmentes, dessen begrenzende Sehne durch einen festen Punct der Curve geht, beschrieben wird, hat die Eigenschaft, dafs jede Tangente an dieselbe die bewegliche Sehne, welche das dem Berührungspuncte zugehörige Segment begrenzt, in einem constanten Verhältnisse theilt, so nemlich, dafs der dem festen Puncte anliegende Abschnitt sich zum andern verhalte, wie 2 zu 1."

Denn der Schwerpunct des letzten Elementes eines solchen Segments liegt auf der begrenzenden Sehne, und zwar um $\frac{2}{3}$ derselben vom festen Puncte entfernt.

Man gelangt zu denselben Sätzen durch folgende analytische Betrachtung.

Lassen wir einen Körper, eine Fläche oder Linie, nach irgend einem Gesetze von Null an wachsen, und bedeuten $S$ die Gröfse eines begrenzten Theiles des Körpers, der Fläche, der Linie, $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten des Schwerpunct von $S$, und $(x)$, $(y)$, $(z)$ die Coordinaten des Schwerpuncts des begrenzenden Elementes von $S$, so ist

$$Sx_1 = \int (x)\partial S, \qquad Sy_1 = \int (y)\partial S, \qquad Sz_1 = \int (z)\partial S.$$

und, wenn wir $x_1 y_1 z_1$ als veränderlich betrachten,

$$S\partial x_1 = ((x) - x_1)\partial S, \quad S\partial y_1 = ((y) - y_1)\partial S, \quad S\partial z_1 = ((z) - z_1)\partial S,$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{(y) - y_1}{(x) - x_1} \qquad \frac{\partial z_1}{\partial x_1} = \frac{(z) - z_1}{(x) - x_1}.$$

Die letzten Gleichungen zeigen, dafs die Tangente an den Punct $x_1 y_1 z_1$ mit derjenigen geraden Linie zusammenfällt, welche den Berührungspunct mit dem Schwerpuncte des letzten Elementes des Körpers etc. verbindet, für welchen $x_1 y_1 z_1$ der Schwerpunct ist. Wir sehen also, dafs diese Eigenschaft allen barycentrischen Curven, sie mögen einfacher oder doppelter Krümmung sein, gemeinsam und dafs sie eine characteristische Eigenschaft derselben ist.

Die Gleichungen der barycentrischen Curven, welche wachsenden Bogen, Segmenten etc. bestimmter gegebener Curven angehören, lassen sich nur in einzelnen Fällen in endlicher Form darstellen.

Ist z. B. die gegebene Curve der Kreis

$$y^2 + x^2 - a^2 = 0,$$

und soll die Curve bestimmt werden, welche der Schwerpunct eines von Null an wachsenden Bogens $S$ beschreibt, so ist

$$Sx_1 = \int (x)\partial S = \int x\,\partial S, \qquad Sy_1 = \int (y)\partial S = \int y\,\partial S,$$

indem hier der Schwerpunct eines Elementes mit demselben zusammenfällt.

Nun ist

$$x = a\cos\frac{S}{a}, \qquad y = a\sin\frac{S}{a},$$

folglich

$$Sx_1 = a\int \cos\frac{S}{a}\,\partial S = a^2\sin\frac{S}{a}, \quad Sy_1 = a\int \sin\frac{S}{a}\,\partial S = a^2\left(1 - \cos\frac{S}{a}\right),$$

und wenn man $\frac{S}{a} = t$ setzt, so hat man zur Bestimmung der barycentrischen Curve die beiden Gleichungen

$$x_1 = \frac{a \sin t}{t}, \qquad y_1 = \frac{a(1 - \cos t)}{t}.$$

Es erhellen aus diesen Gleichungen folgende Eigenschaften:

1) Es liegt kein Punct der Curve auf der negativen Seite der $y$.

2) Die Curve macht eine unendliche Anzahl immer mehr sich verengender Windungen, und jede Windung berührt die vorhergehenden, nebst der Achse der $x$, im Anfangspuncte der Coordinaten, so oft

$$t = (2k+2)\pi$$

ist, wo für $k$ alle ganzen Zahlen von 0 an zu setzen sind.

3) Die Achse der $y$ wird, aufser im Anfangspuncte, wo die Curve unendlich viele Male dieselbe schneidet, noch in unendlich vielen verschiedenen Puncten geschnitten, so oft

$$t = (2k+1)\pi$$

ist, und diese Puncte selbst sind gegeben durch

$$((y_1)) = \frac{2a}{(2k+1)\pi}.$$

Eine Gleichung zwischen $y_1$ und $x_1$ läfst sich aber nicht unter endlicher Form darstellen.

Eine Curve von ganz ähnlichen Eigenschaften beschreibt der Schwerpunct eines wachsenden Sectors, dessen Scheitel im Mittelpunct des Kreises, und dessen einer Schenkel fest ist. Hier ist

$$(x) = \tfrac{2}{3}x, \qquad (y) = \tfrac{2}{3}y, \qquad \partial S = \frac{a^2 \partial t}{2},$$

wenn $t = \frac{S}{a}$: folglich

$$Sx_1 = \frac{a^3}{3}\int \cos t\,\partial t = \frac{a^3 \sin t}{3}, \qquad Sy_1 = \frac{a^3}{3}\int \sin t\,\partial t = \frac{a^3}{3}(1 - \cos t),$$

und da $S = \frac{a^2 t}{2}$,

$$x_1 = \frac{2a}{3}\cdot\frac{\sin t}{t}, \qquad y_1 = \frac{2a}{3}\cdot\frac{(1-\cos t)}{t}.$$

Auch diese Curve macht unzählige Windungen, von denen jede die vorhergehende im Mittelpuncte des Kreises berührt und von derselben ganz eingeschlossen wird. Die Durchschnittspuncte der Achse der $y$ sind hier gegeben durch

$$((y_1)) = \frac{4a}{3(2k+1)\pi}.$$

Man sieht leicht, dafs die barycentrischen Curven, welche wachsenden Bogen, Segmenten, Sectoren solcher Curven angehören, die in Beziehung auf zwei Achsen symmetrisch sind, wie die Ellipse, in den angeführten Eigenschaften mit den obigen Curven übereinstimmen werden.

Gehen wir jetzt zur Bestimmung einiger barycentrischen Curven über, deren Gleichung sich unter endlicher Form erhalten läfst.

Um die barycentrische Curve zu bestimmen, welche vom Schwerpunct einer Fläche beschrieben wird, die, begrenzt vom Bogen und den Coordinaten des Endpunctes derselben, mit dem Bogen wächst, hat man

$$s = \int y\,\partial x, \qquad s x_1 = \int y x\,\partial x, \qquad s y_1 = \int \tfrac{1}{2} y^2\,\partial x;$$

denn der Schwerpunct eines Elementes liegt hier auf der Mitte der Ordinate.

Es sei nun z. B.

$$p x = y^n$$

die allgemeine Gleichung der Parabeln, so ist

$$s = \frac{n p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1+n}{n}}}{1+n}, \qquad s x_1 = \frac{n p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1+2n}{n}}}{1+2n}, \qquad s y_1 = \frac{n p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{2n+1}{n}}}{2(2+n)}.$$

Hieraus ergiebt sich für die barycentrische Curve die Gleichung

$$y_1^n = \frac{(1+n)^{n-1}\,1+2n}{2(2+n)^n}\,p x_1.$$

Die barycentrische Curve ist also hier eine Parabel derselben Ordnung, wie die gegebene. Für die Fläche der gemeinen Parabel, wo $n = 2$, ist

$$y_1^2 = \tfrac{15}{64}\,p x_1$$

die Gleichung der barycentrischen Curve.

Zur Bestimmung der barycentrischen Curve, welche der Schwerpunct eines wachsenden Segmentes beschreibt, dessen einer Endpunct fest ist, haben wir

$$s = \int y\,\partial x - \frac{xy}{2}, \qquad s x_1 = \tfrac{2}{3}\int x\,\partial s, \qquad s y_1 = \tfrac{2}{3}\int y\,\partial s;$$

denn der Schwerpunct eines Elementes ist um $\frac{2}{3}$ der Sehne vom festen Puncte entfernt.

Für die Parabeln $p x = y^n$ ist, wenn man die Segmente vom Anfangspuncte der Coordinaten an wachsen läfst:

$$s = \frac{n-1}{2(n+1)} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1+n}{n}}, \qquad s x_1 = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{(n-1)}{(2n+1)} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{2n+1}{n}},$$

$$s y_1 = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{(n-1)}{(n+2)} p^{\frac{2}{n}} x^{\frac{n+2}{n}},$$

woraus die Gleichung der barycentrischen Curve:

$$y_1^n = \frac{2^{n-1}(1+n)^{n-1}(1+2n)}{3^{n-1}(2+n)^n} p x_1,$$

welche also wiederum eine Parabel derselben Ordnung ist. Für die gemeine Parabel, wo $n=2$, ist die barycentrische Curve der Segmente

$$y_1^2 = \tfrac{6}{8} p x_1.$$

Wenn man ferner eine Parabel $px = y^n$ sich um die Achse der $x$ drehen läfst, und man will die Curve bestimmen, welche der Schwerpunct des von der krummen Oberfläche, von einer durch die Achse der $x$ senkrecht auf die Ebene der $xy$ gelegten Ebene und von den von den Ordinaten beschriebenen Kreisen begrenzten Volumens beschreibt, so hat man:

$$S = \tfrac{1}{2}\pi\int y^2 \partial x = \frac{n\pi p^{\frac{2}{n}} x^{\frac{2+n}{n}}}{2(2+n)},$$

$$Sx_1 = \frac{\pi}{2}\int y^2 x \partial x = \frac{n\pi p^{\frac{2}{n}}}{4(1+n)} x^{\frac{2+2n}{n}},$$

$$Sy_1 = \tfrac{2}{3}\int y^3 \partial x = \frac{2np^{\frac{3}{n}}}{3(3+n)} x^{\frac{3+n}{n}},$$

woraus

$$y_1^n = \frac{2^{2n+1}(2+n)^{n-1}(n+1)}{3^n \pi^n (3+n)^n} p x_1.$$

Ist $n=2$, so ist

$$y_1^2 = \frac{128}{75.\pi^2} x_1.$$

Die barycentrische Curve ist also hier ebenfalls eine Parabel derselben Ordnung.

Was die Umkehrung der obigen Aufgabe betrifft, so reichen die Gleichungen

$$Sx_1 = \int(x)\partial S, \qquad Sy_1 = \int(y)\partial S$$

nicht aus, die Gleichung derjenigen Curve darzustellen, für deren wachsende Bogen, Segmente etc. eine gegebene Curve

$$f(x_1, y_1) = 0$$

der geometrische Ort der Schwerpuncte ist, aufser wenn man die Natur dieser Curve im Voraus bestimmen kann. So ist es z. B. leicht, zu jeder Parabel eine andere Parabel derselben Ordnung zu finden, für deren Segmente etc. die erstere barycentrische Curve ist.

---

Im 13. Bande des Journals No. 28. 4. wird der Beweis verlangt, dafs, wenn die Summe der $x$ten Potenzen der Entfernungen $a$, $b$, $c$ eines Punctes $P$ von drei gegebenen Puncten $A$, $B$, $C$ in derselben Ebene, ein Minimum sein soll, folgende Bedingungsgleichungen Statt finden müssen:

$$a^{x-1}\sin(ac) = b^{x-1}\sin(bc), \qquad a^{x-1}\sin(ab) = c^{x-1}\sin(cb),$$

wo $(ac)$, $(ab)$, $(bc)$ die von den Linien $a$ und $c$, $a$ und $b$, $b$ und $c$ gebildeten Winkel bedeuten.

Es seien die drei Puncte $A$, $B$, $C$ bestimmt durch ihre rechtwinkligen Coordinaten

$$x'y', \qquad x''y'', \qquad x'''y''',$$

so ist, wenn wir die Coordinaten von $P$ durch

$$X, \; Y$$

bezeichnen:

$$\begin{aligned} a &= [(X-x')^2+(Y-y')^2]^{\frac{1}{2}}, \\ b &= [(X-x'')^2+(Y-y'')^2]^{\frac{1}{2}}, \\ c &= [(X-x''')^2+(Y-y''')^2]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Soll nun

$$S = a^x + b^x + c^x$$

ein Minimum sein, so ist nothwendig

$$1. \quad \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial X} = a^{x-1}\dfrac{\partial a}{\partial X} + b^{x-1}\dfrac{\partial b}{\partial X} + c^{x-1}\dfrac{\partial c}{\partial X} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial Y} = a^{x-1}\dfrac{\partial a}{\partial Y} + b^{x-1}\dfrac{\partial b}{\partial Y} + c^{x-1}\dfrac{\partial c}{\partial Y} = 0, \end{cases}$$

oder

$$2. \quad \begin{cases} a^{x-2}(X-x') + b^{x-2}(X-x'') + c^{x-2}(X-x''') = 0, \\ a^{x-2}(Y-y') + b^{x-2}(Y-y'') + c^{x-2}(Y-y''') = 0, \end{cases}$$

welche Gleichungen unmittelbar übergehen in

$$3. \quad \begin{cases} a^{x-1}\cos a_1 + b^{x-1}\cos b_1 + c^{x-1}\cos c_1 = 0, \\ a^{x-1}\sin a_1 + b^{x-1}\sin b_1 + c^{x-1}\sin c_1 = 0, \end{cases}$$

wo $a_1$, $b_1$, $c_1$ die Winkel sind, welche $a$, $b$, $c$ mit der ersten Achse bilden.

Wenn man aus den Gleichungen (3.) zuerst $c$, dann $b$, dann $a$ eliminirt, so erhält man:

$$4. \quad \begin{cases} a^{x-1}(\cos a_1 \sin c_1 - \sin a_1 \cos c_1) + b^{x-1}(\cos b_1 \sin c_1 - \sin b_1 \cos c_1) = 0, \\ a^{x-1}(\cos a_1 \sin b_1 - \sin a_1 \cos b_1) + c^{x-1}(\cos c_1 \sin b_1 - \sin c_1 \cos b_1) = 0, \\ b^{x-1}(\cos b_1 \sin a_1 - \sin b_1 \cos a_1) + c^{x-1}(\cos c_1 \sin a_1 - \sin c_1 \cos a_1) = 0. \end{cases}$$

Statt dieser Gleichung haben wir, wenn wir durch $(ac)$, $(ab)$, $(bc)$ die von den Linien $a$, $b$, $c$ gebildeten Winkel bezeichnen:

$$5.\quad\begin{cases} a^{x-1}\sin(ca)+b^{x-1}\sin(cb) = 0, \\ a^{x-1}\sin(ba)+c^{x-1}\sin(bc) = 0, \\ b^{x-1}\sin(ab)+c^{x-1}\sin(ac) = 0. \end{cases}$$

Die beiden ersten der Gleichungen (5.) sind die vom Herrn Prof. Steiner aufgestellten Bedingungsgleichungen, zu welchen noch eine dritte hinzukommt, die aber eine Folge der beiden andern ist.

Eliminirt man aus den Gleichungen (2.) $c$, und dann $b$, so erhält man:

$$\begin{cases} 0 = a^{x-2}[(X-x')(Y-y''')-(X-x''')(Y-y')] \\ \quad +b^{x-2}[(X-x'')(Y-y''')-(X-x''')(Y-y'')], \\ 0 = a^{x-2}[(X-x')(Y-y'')-(X-x'')(Y-y')] \\ \quad +c^{x-2}[(X-x''')(Y-y'')-(X-x'')(Y-y''')]; \end{cases}$$

und auf dieselbe Art könnte man noch eine dritte Gleichung gewinnen, worin $a$ nicht vorkommt; allein sie würde eine Folge der Gleichungen (6.) sein.

Die Gleichungen (6.) reichen hin, für jeden Werth von $x$ den Punct $P$ zu bestimmen. Uebrigens hat Herr F. Heinen in einer Abhandlung „Ueber Systeme von Kräften (Cleve, 1834)" den Gleichungen (6.) ganz analoge Bedingungsgleichungen aufgestellt, für den allgemeinen Fall, dafs $n$ Puncte im Raume gegeben sind, und ein Punct $P$ gefunden werden soll, für welchen die Summe der $x$ten Potenzen der Entfernungen von jenen $n$ Puncten ein Minimum ist.

Halle, im August 1835.

---

## 8.

# Note sur le calcul des momens d'inertie d'une ellipsoïde homogène par rapport à ses trois axes.

(Par Mr. *R. Lobatto,* Docteur en sciences à la Haye.)

---

Lorsqu'il s'agit d'évaluer le moment d'inertie d'une ellipsoïde entière, par rapport a l'un de ses axes, on peut y parvenir sans effectuer aucune intégration, dès que l'on a trouvé celui d'une sphère par rapport à son diamètre. C'est ce que nous nous proposons de faire voir dans cette note.

Nous indiquerons d'abord un moyen d'obtenir assez simplement le moment d'inertie d'une sphère par rapport a son centre, et d'en déduire ensuite celui relatif à son diamètre.

En effet désignons par $r$ le rayon de la sphère, et les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de sa surface par $x, y, z,$ de sorte que l'équation de celle-ci soit

$$x^2+y^2+z^2 = r^2.$$

La masse $M$ de la sphère ayant pour valeur $\frac{4\varrho\pi}{3}r^3$, $\varrho$ désignant la densité, si l'on conçoit que son volume soit decomposé en une infinité de couches concentriques de même épaisseur, il est évident qu'en mommant $r$ la distance du centre à l'une de ces couches, la masse de celle-ci s'exprimera par $4\varrho\pi r'^2 dr'$, différentielle de la masse entière; la somme des produits de chacun de ces élemens par le carré de sa distance au centre, aura pour valeur $4\varrho\pi r'^4 dr'$: donc en intégrant cette différentielle depuis $r'=0$, jusqu'à $r'=r$, il en resultera immédiatement pour le moment d'inertie de la sphère par rapport à son centre $\frac{4}{5}\varrho\pi r^5 = \frac{3}{5}r^2 M$. Cette dernière quantité exprimera ainsi la valeur de l'intégrale triple

$$\iiint(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

étendue à la masse entière du corps.

Or puisqu'on a évidemment dans la sphère

$$\iiint x^2\,dx\,dy\,dz = \iiint y^2\,dx\,dy\,dz = \iiint z^2\,dx\,dy\,dz,$$

on en conclura

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} \varrho\iiint x^2\,dx\,dy\,dz = \frac{\varrho}{3}\iiint(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz, \\ \varrho\iiint(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{2\varrho}{3}\iiint(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz; \end{cases}$$

donc le moment d'inertie par rapport à un diamètre sera égal au produit $\frac{2}{3}\times\frac{4\varrho\pi}{5}r^5 = \frac{8}{15}\varrho\pi r^5 = \frac{2}{5}Mr^2$.

Passons maintenant à l'ellipsoïde. L'équation de sa surface pourra être mise sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$2a$, $2b$, $2c$ étant les longueurs de ses trois axes. Faisons $x = \frac{ax'}{r}$, $y = \frac{by'}{r}$, $z = \frac{cz'}{r}$, ce qui reduira l'équation précédente à

$$x'^2+y'^2+z'^2 = r^2,$$

de sorte que $x'$, $y'$, $z'$ marquent les coordonnées de la surface d'une sphère dont le rayon $= r$. Si l'on effectue les même substitutions dans l'intégrale triple qui énonce le moment d'inertie par rapport à l'axe des $z$, cette intégrale se changera en

$$\varrho\frac{abc}{r^5}\iiint(a^2x'^2+b^2y'^2)\,dx'\,dy'\,dz'$$
$$= \varrho\frac{a^3bc}{r^5}\iiint x'^2\,dx'\,dy'\,dz' + \varrho\frac{ab^3c}{r^5}\iiint y'^2\,dx'\,dy'\,dz'.$$

Or, chacune de ses intégrales se rapportant à une sphère, on aura sur le champ, en vertu de la première des équations $(\alpha.)$ pour la valeur du moment d'inertie:

$$\frac{4\varrho\pi}{15}a^3bc+\frac{4\varrho\pi}{15}ab^3c = \frac{4\varrho\pi}{15}abc(a^2+b^2),$$

d'où l'on déduit ceux relatifs aux axes des $x$ et $z$ par un simple changement de lettres.

Le procédé que nous venons d'exposer nous a paru plus simple que celui employé jusqu'ici dans les traités de mécanique; et il est aisé de s'assurer qu'on pourrait encore l'appliquer au cas où il faudrait calculer le moment d'inertie d'une portion d'ellipsoïde comprise entre deux sections parallèles à l'un des plans de projection.

La Haye, Février 1836.

# 9.

# Einige Bemerkungen über elliptische Functionen.

(Vom Herrn Prof. Dr. *Gudermann* zu Münster.)

---

1. Eine durch merkwürdige Eigenschaften ausgezeichnete sphärische transcendente Curve, deren Gleichung

$$\cos(k'.x).\cos y = k'$$

ist, wo $x$ die Abscisse und $y$ die zugehörige senkrechte Applicate eines beliebigen Punctes der Curve, $k = \sin\theta$ den Modul, also $k' = \cos\theta$ das Complement des Moduls vorstellt, versinnlicht am besten den Zusammenhang aller elliptischen Functionen und Amplituden mit dem Argumente. Jene Gleichung hat Aehnlichkeit mit der Gleichung $\cos x.\cos y = k'$ eines sphärischen Kreises, dessen Radius $\theta$ ist, und die Curve selbst stimmt in vielen Eigenschaften mit dem Kreise überein. Setzt man $\theta = \frac{\pi}{2}$, so verwandelt sich die obige Gleichung, in welcher nun aber der Anfangspunct verlegt werden mufs, in

$$\cos y = \frac{1}{1+x},$$

d. h. in die Gleichung der sphärischen Longitudinale, welche ebenfalls mehrere bemerkenswerthe Eigenschaften besitzt.

2. Der Zusammenhang zwischen den elliptischen Functionen, ihren Amplituden und dem Argumente wird auch geometrisch dargestellt durch eine sphärische Curve, deren Gleichung

$$\varrho = \text{am}(s) \quad \text{und} \quad v = k.s$$

ist, wo $\varrho$ einen sphärischen Leitstrahl eines Winkels, $v$ den veränderlichen Winkel, welchen der Leitstrahl mit seiner ursprünglichen Richtung macht, und $s$ den Bogen der Curve vorstellt. Der Winkel, welchen eine Berührungslinie der Curve mit dem Leitstrahle $\varrho$ des Berührungspunctes macht, ist dann $= \text{am}\left(ks, \frac{1}{k}\right)$, und durch eben diese Amplitud kann auch die Fläche ausgedrückt werden. Die Curve läuft, in unzähligen Windungen um die Kugel, unendliche Male durch den Punct, von welchem aus die

Leitstrahle gezogen werden, und durch seinen Gegenpunct gehend, aber immer in anderen Richtungen, und läuft also nur in speciellen Fällen in sich zurück.

3. Die Gleichung

$$\cos y . \mathfrak{Sin}\left(\frac{k'}{k}x\right) = \frac{k'}{k},$$

in welcher $x$, $y$, $k$ und $k'$ die obige Bedeutung haben, stellt ebenfalls eine interessante Curve dar; die Applicate $y$ ist jetzt die Amplitude des zugehörigen Bogens der Curve für den Modul $k$ (oder $y = \mathrm{am}(s)$), und der Winkel, welchen ein berührender Halbkreis mit der Applicate des Berührungspunctes macht, ist wieder $= \mathrm{am}\left(ks, \frac{1}{k}\right)$, nach der in den Schriften des Herrn Prof. Jacobi gängigen Bezeichnung.

Münster, im Januar 1836.

---

# 10.

# Auflösung der Aufgabe No. 5. im 15. Bande S. 375 dieses Journals.

(Vom Herrn Rechnungs-Rath *Brune* zu Berlin.)

---

Aufgabe. Zwei Seiten eines beliebigen gegebenen Dreiecks in zwei Abschnitte so zu theilen, dafs der untere Abschnitt der einen Seite sich zum obern der andern verhalte, wie jene Seite zu dieser, und dafs zugleich die Gerade, welche die beiden Theilungspuncte verbindet, ein Minimum sei.

Auflösung. (Fig 12.) Man erweitere das gegebene Dreieck $acb$, dessen Seiten $ac$, $bc$ getheilt werden sollen, zu einem Parallelogramm $acbd$, ziehe die Diagonale $cd$, fälle auf diese aus den Winkeln $a$ und $b$ die Senkrechten $af$, $be$, führe aus $f$ nach $bc$, parallel mit $ac$, die Gerade $fy$, und aus $e$ nach $ac$, parallel mit $bc$, die Gerade $ex$: so sind $x$ und $y$ die gesuchten Theilungspuncte.

Beweis. Da, wie aus der Construction unmittelbar folgt, $ex$ mit $da$, $fy$ mit $db$ parallel und $cf = de$ ist, so ist auch

$$ax : ac = de : dc,$$

$$cy : bc = \begin{cases} cf \\ de \end{cases} : dc:$$

---

$$\text{also } ax : ac = cy : bc,$$

$$\text{oder } ax : cy = ac : bc,$$

$$\text{und daher auch } by : cx = bc : ac.$$

Um ferner zu beweisen, dafs $xy$ auch ein Minimum sei, ziehe man noch die Geraden $ae$ und $bf$. Alsdann ist (weil $af$ gleich und mit $be$ parallel ist), auch $afbe$ ein Parallelogramm, folglich in den beiden Dreiecken $aex$, $fby$,

$$ac = fb, \quad \angle aex = \angle fby, \quad \angle eax = \angle bfy,$$

mithin, wegen der Congruenz dieser Dreiecke, $ex = by$, woraus weiter folgt, dafs $xy$ auch parallel mit $eb$ und daher perpendiculair auf $cd$ ist. Nun kann in dem gegebenen Dreiecke $acb$ nur eine einzige Gerade zugleich die beiden Seiten $ac$, $bc$ nach dem gegebenen Verhältnisse thei-

len und die Gerade *cd* senkrecht schneiden; denn von zwei andern Theilungspuncten, die gleichfalls diesem Verhältnisse entsprechen, mufs nothwendig der eine über, der andere unter jene Gerade fallen, also die Verbindungslinie sich mit der Diagonale *cd* schiefwinkelig schneiden. Gesetzt, es seien $x'$ und $y'$ zwei andere Theilungspuncte, so fälle man aus ihnen auf *cd* die Senkrechten $x'g$, $y'h$, und aus $y'$ auf *be* die Senkrechte $y'l$. Da nun

$$by' : cx' = bc : ac,$$

$$cx' : x'g = ac : \begin{cases} af \\ be \end{cases},$$

$$bl : by' = be : bc,$$

so ist $bl = x'g$;

folglich $x'g + hy' = bl + le = be = xy$.

Aber $x'g + hy'$ ist, als Summe zweier Catheten in zwei rechtwinkeligen Dreiecken, kleiner als die Summe der beiden Hypotenusen eben dieser Dreiecke, das ist hier, kleiner als $x'y'$; mithin ist auch $xy$ kleiner als $x'y'$, und folglich $xy$ ein Minimum.

Anmerkung. Eben so leicht können auch zwei Gegenseiten eines gegebenen Vierecks nach gleichen Bedingungen getheilt werden. Sind (Fig. 13.) *ab*, *dc* die zu theilenden Seiten des Vierecks *abcd*, so erweitere man dasselbe über eine der andern Seiten hinaus zu einem Sechsecke *abcdef*, dessen Gegenseiten parallel und gleich sind, ziehe die beiden (parallel laufenden) Diagonalen *ce*, *bf*, fälle auf diese, beziehlich aus den Winkeln *a*, *d*, die Senkrechten *ag*, *dh*, führe aus *g* nach *dc*, parallel mit *ab*, die Gerade *gy*, und aus *h* nach *ab*, parallel mit *dc*, die Gerade *hx*; so sind $x$ und $y$ die beiden Theilungspuncte. — Die Beweisführung ist der obigen beim Dreiecke analog, indem $xy$ die beiden Diagonalen *bf*, *ce* senkrecht durchschneidet.

Wären die beiden Gegenseiten *ab*, *dc* parallel, so würde diejenige Gerade, welche dieselben, durch den Durchschnittspunct ihrer Diagonalen, *ac*, *bd* senkrecht verbindet, die beiden Theilungspuncte angeben.

---

# 11.

# Beweis eines vom Hrn. Prof. Dr. Steiner im 1. Hefte des 14. Bandes aufgestellten Lehrsatzes.

(Vom Herrn *Schaellibaum*, Privatlehrer zu Berlin.)

„Sind zwei gegenüberstehende Kanten einer dreiseitigen Pyramide der „Gröfse nach gegeben, und liegen sie in zwei gegebenen festen Geraden „$A$, $A_1$: so ist bekanntlich der Körperinhalt der Pyramide constant, man „mag jene Kanten auf diesen festen Geraden annehmen, wo man will. „Dagegen ist die Oberfläche der Pyramide ein Minimum, „wenn man die Kanten so annimmt, dafs die Gerade, welche „ihre Mitten verbindet, auf beiden senkrecht steht."

Seien in der Pyramide $ABCD$ (Fig. 14.) die ihrer Gröfse und Richtung nach gegebenen Kanten $AB = a$, $CD = a_1$, der senkrechte Abstand der festen Geraden, d. h. der Abstand zweier durch sie gelegten parallelen Ebenen, sei $= p$, und diese Senkrechte sei so gelegt, dafs sie die genannten Kanten, oder ihre Verlängerung, in $E$ und $F$ schneide. Zieht man $AF$ und $BF$, so entstehen zwei Pyramiden, die das Dreieck $ABF$ zur gemeinsamen Grundfläche, und ihre Spitzen in $C$ und $D$ haben. Die ursprüngliche Pyramide ist die Summe oder Differenz der bezeichneten Pyramiden, je nachdem die Puncte $E$ und $F$ in den festen Geraden, auch in $a$ und $a_1$ liegen, oder nicht. Eine durch $F$ gezogene Parallele mit $AB$ liegt in der Ebene $ABF$ und ist senkrecht auf $EF$; sie schliefst mit $CD$ den Winkel $(aa_1)$ ein, welchen die Geraden $A$ und $A_1$ selbst mit einander bilden; da $EF$ auch senkrecht auf $CD$, so ist $(aa_1)$ zugleich der Winkel, unter welchem $CD$ gegen die Ebene $ABF$ geneigt ist. Sonach sind die Höhen der beiden Pyramiden $ABFC$, $ABFD$ bezieblich $CF.\sin(aa_1)$, $DF.\sin(aa_1)$; der Inhalt der gemeinsamen Grundfläche ist $= \frac{1}{2}ap$; also der Inhalt der Pyramide $ABCD = \frac{1}{2}ap.\frac{1}{3}(CF+DF).\sin(aa_1) = \frac{1}{2.3}aa_1p.\sin(aa_1)$. Dieser Ausdruck bleibt derselbe für jede Lage von $E$ und $F$ in Bezug auf $a$ und $a_1$, da $CF$ oder $DF$ negativ zu nehmen ist, sobald $F$ nach einer von beiden Seiten über $CD$ hinaus rückt. Er ist also constant für jede Lage von $a$ und $a_1$ auf $A$ und $A_1$, da er nur von constanten Gröfsen abhängt.

Läfst man nun, während $a$ auf $A$ irgend eine feste Lage hat, $a_1$ auf $A_1$ fortrücken, so behalten $C$ und $D$, die Spitzen der Seitendreiecke $ABC$ und $ABD$, gleichen Abstand, welcher gleich der Summe oder Differenz der Abstände dieser Puncte von $F$ ist, je nachdem $F$ in Bezug auf $a_1$ liegt. Wenn $CF = DF$, so haben die Dreiecke $ABC$, $ABD$ gleichen Inhalt; rückt $a_1$ fort, so ist die Summe der Inhalte jedes folgenden Paares zusammengehöriger Dreiecke gröfser als die Summe der Inhalte jedes vorhergehenden Paares, also $ABC + ABD < ABC' + ABD' < ABC''$ $ABD''$ u. s. w.

Man lege (Fig. 15.) durch $a$ und $a_1$ parallele Ebenen $M$, $N$, und durch den Fufspunct $E$ der Senkrechten $EF$ in $M$ eine Gerade $a_2$, parallel mit $a_1$; ferner werde $CF = DF$ angenommen, und die Dreiecke $ABC$, $ABD$ seien vervollständigt. Von $C$ und $D$ aus fälle man Lothe auf $M$, welche die $a_2$ in $P$ und $P_1$ treffen, so dafs $EP = EP_1$. Zieht man ferner von $P$ und $P_1$ die Geraden $PQ$, $P_1Q_1$ senkrecht auf $a$ und verbindet $C$, $Q$ und $D$, $Q_1$, so sind $CQ$ und $DQ_1$ die Höhen der Dreiecke $ABC$, $ABD$; da sie gleich sind, so sind auch die genannten Dreiecke, als über derselben Grundlinie, gleich grofs. Congruent sind die Dreiecke nur dann, wenn $E$ die Mitte von $AB$ ist. — Nimmt man nun auf $a_1$ zwei andere Puncte $C'$, $D'$ als Spitzen von Dreiecken über $AB$ an, so nämlich, dafs $C'D' = CD$, zieht die Senkrechten $C'P'$ und $D'P_1'$, $P'Q'$ und $P_1'Q_1'$, und die Höhen $C'Q'$ und $D'Q_1'$: so verhalten sich die Dreiecke $ABC (= ABD)$, $ABC'$, $ABD'$ wie die drei Höhen $CQ$ $(= DQ_1)$, $C'Q'$, $D'Q_1'$. Diese sind die Hypotenusen dreier rechtwinkliger Dreiecke, in welchen eine Kathete gleich ist. Werden diese Dreiecke so aufeinander gelegt, dafs die gleichen Katheten $(CP, C'P', D'P_1')$ zusammenfallen, und die drei andern Katheten in einer Geraden und auf derselben Seite von $CP$ etc. liegen: so bilden, da $PQ - P'Q' = P_1'Q_1' - PQ$ die zwei Hypotenusen $C'Q'$, $D'Q_1'$ mit dem dazwischen enthaltenen Stücke der Kathete $P_1'Q_1'$ ein Dreieck (Fig. 16.), dessen Grundlinie $Q'Q_1'$ von der dritten Hypotenuse $CQ$ in $Q$ halbirt wird. Verlängert man nun $CQ$, bis $GQ = CQ$, und zieht $GQ_1'$, so ist $GQ_1' = CQ'$, aber $CQ_1' + GQ_1' > CG$ $(= 2CQ)$. Folglich sind die Dreiecke $ABC' + ABD'$ $> 2$ Dr. $ABC$. — Diese Construction zeigt auch unmittelbar, dafs die Summe der Inhalte zweier zusammengehöriger Dreiecke um so gröfser wird, je mehr der Abstand ihrer Spitzen, $CC' = DD'$, von $C$ und $D$, welchem der Abstand $QQ' = QQ_1'$ proportional ist, wächst. Von selbst ist klar, dafs,

sobald $a_1$ über $F$ hinausgerückt ist, und $C'$, $D'$ auf einerlei Seite von $F$ liegen, alsdann die Summe der zusammengehörigen Dreiecke, mit zunehmender Entfernung der Geraden $a_1$ von $F$, immer gröfser wird.

Sei nun die Pyramide $ABCD$ (Fig. 17.) so beschaffen, dafs die Senkrechte auf die zwei festen Geraden $A$ und $A_1$ die Mitten $E$ und $F$ von $a$ und $a_1$ treffe. Dann sind die Seitendreiecke paarweise congruent, nämlich $ABC = ABD$, $CDA = CDB$. Rückt nun $a_1$ fort, etwa in die Lage $C_1D_1$, während $a$ fest bleibt, so behalten die Dreiecke $C_1D_1A$, $C_1D_1B$ gleichen Inhalt; aber die Summe der zwei übrigen Seitenflächen, $ABC_1 + ABD_1$, ist $> ABC + ABD$, und zwar um desto mehr, je gröfser $CC' = DD'$ wird. Unter allen so entstehenden Pyramiden hat somit $ABCD$ die kleinste Oberfläche. — Hält man jetzt irgend eine Lage von $a_1$, etwa $C_1D_1$, fest, und läfst $a$ fortrücken, etwa in die Lage $A_1B_1$: so behalten wieder zwei Seitendreiecke gleichen Inhalt, nämlich $A_1B_1C_1 = ABC_1$, $A_1B_1D_1 = ABD_1$; die Summe der zwei übrigen Seitenflächen aber, $C_1D_1A_1 + C_1D_1B_1$, ist $> C_1D_1A + C_1D_1B$, und zwar desto mehr, je gröfser $AA_1 = BB_1$ wird. Es ist somit die Oberfläche von $A_1B_1C_1D_1 >$ Oberfl. v. $ABC_1D_1 >$ Oberfl. v. $ABCD$, und diese letztere ist ein Minimum für alle Lagen, die $a$ und $a_1$ auf den festen Geraden annehmen mögen.

Die erste Hälfte des bewiesenen Lehrsatzes läfst übrigens noch die Verallgemeinerung zu, „dafs alle dreiseitigen Pyramiden, in welchen das Product zweier gegenüberstehender, in zwei festen Geraden $A$ und $A_1$ liegender Kanten $a$ und $a_1$ constant $= \alpha^2$ ist, einen constanten Inhalt haben," was aus dem Ausdrucke desselben, $\frac{1}{6} a a_1 p \sin(a a_1)$, von selbst hervorgeht. Nehmen nun die genannten Kanten successive alle Werthe an, die der Bedingung $a a_1 = \alpha^2$ entsprechen, so hat nach dem Vorhergehenden, für jedes Paar zusammengehöriger Werthe von $a$ und $a_1$, diejenige Pyramide die kleinste Oberfläche, in welcher die auf $A$ und $A_1$ senkrechte Gerade $p$ die Mitten von $a$ und $a_1$ trifft. „Diese Reihen von Minimen hat aber selbst ihr Minimum, wenn $a = a_1 = \alpha$ ist."

Auf den festen Geraden nehme man (Fig. 18.) $AB = CD = \alpha$, und ferner $A_1B_1 = a$, $C_1D_1 = a_1$ so an, dafs $a a_1 = \alpha^2$; auch sollen diese Stücke so liegen, dafs ihre Mittelpuncte beziehlich mit den Endpuncten $E$, $F$ der Senkrechten $p$ zusammentreffen. Nun sind in der Pyramide $ABCD$ alle Seitenflächen einander gleich, in der Pyramide $A_1B_1C_1D_1$ sind

sie paarweise gleich. Es genügt sonach zu zeigen, dafs die Summe der Dreiecke $ABC$, $CDA$ kleiner als die Summe der Dreiecke $A_1B_1C_1$, $C_1D_1A_1$, oder, wenn man die Höhen derselben, $CH = AL$, $C_1H_1$, $A_1L_1$, construirt und beziehlich mit $h$, $h_1$, $h_2$ bezeichnet, dafs $2ah < ah_2 + a_1h_1$ ist. Es ist $\frac{a}{\alpha} = \frac{\alpha}{a_1} = \frac{GH}{G_1H_1} > \frac{h}{h_2}$, folglich $ah_2 > \alpha h$; ferner $\frac{\alpha}{a_1} = \frac{a}{\alpha} = \frac{K_1L_1}{KL} > \frac{h_1}{h}$, somit $a_1h_1 < \alpha h$.

Aber es ist auch $\frac{h_1}{h} > \frac{h}{h_2}$. Denn legt man die rechtwinkligen Dreiecke $C_1G_1H_1$, $CGH$, $A_1K_1L_1$ mit den gleichen Katheten (den Lothen $CG$, $C_1G_1$, $A_1K_1$) auf einander, so dafs die ungleichen Katheten in einer Geraden und auf einerlei Seite der gleichen Katheten liegen, so bilden die Hypotenusen $A_1L_1$, $C_1H_1$ mit dem dazwischen enthaltenen Stücke der Kathete $K_1L_1$ ein stumpfwinkliges Dreieck, dessen Grundlinie von der Hypotenuse $CH$ so geschnitten wird, dafs die den Seiten $A_1L_1$, $C_1H_1$ anliegenden Stücke derselben sich zu einander verhalten, wie $a:\alpha$. Sei das Dreieck $ABC$ (Fig. 19.) das beschriebene Hypotenusendreieck, $AC = h$, $BC = h_2$, und $DC = h$ schneide die Grundlinie $AB$ so, dafs $\frac{AD}{BD} = \frac{a}{\alpha}$. Zieht man aus $D$ eine gegen $CD$ unter dem Winkel $CAD$ geneigte Gerade, welche die $AC$ in $F$ schneidet, so ist das Dreieck $ADC$ ähnlich dem Dreiecke $DFC$, und $\frac{h_1}{h} = \frac{h}{FC}$. Da ferner $\frac{AD}{DF} = \frac{h_1}{h} < \frac{AD}{BD}\left(= \frac{a}{\alpha}\right)$, so ist $DF > DB$, somit im Dreiecke $BFD$ der Winkel $DBF >$ W. $DFB$; und weil auch W. $CFD >$ W. $CBD$, ist W. $CFB >$ W. $CBF$, also $h_2 > CF$, und $\frac{h_1}{h} > \frac{h}{h_2}$.

Hieraus folgt, dafs $\frac{a}{\alpha} - \frac{h}{h_2} > \frac{\alpha}{a_1} - \frac{h_1}{h}$, oder $\frac{ah_2 - \alpha h}{\alpha h - a_1h_1} > \frac{\alpha h_2}{a_1 h} > 1$, wie sich aus $\frac{\alpha}{a_1} > \frac{h}{h_2}$ ergiebt; und endlich, dafs $2\alpha h < ah_2 + a_1h_1$; was zu beweisen war.

---

# 12.

## Aufgaben und Lehrsätze,

erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

---

(Vom Herrn Prof. *Steiner* zu Berlin.)

Die nachstehenden Sätze stehen zum Theil, wie man bemerken wird, mit den drei letzten, die im vorhergehenden Hefte gegeben worden, in eigenthümlicher Beziehung. Was in der dortigen Anmerkung gesagt worden, gilt daher zugleich auch für einige der hier folgenden Sätze.

1. Wenn ein Winkel und der Umfang eines ebenen oder sphärischen $n$Ecks gegeben sind, so ist sein Inhalt ein Maximum, wenn $\alpha$) alle übrigen Winkel einander gleich und wenn es $\beta$) einem Kreise umschrieben ist.

2. Ist von zwei beliebigen Vielecken, einem $n$Eck und einem $n_1$Eck, von jedem ein Winkel $(\alpha, \alpha_1)$, und ist die Summe ihrer Umfänge $(U+U_1)$ gegeben, so ist die Summe ihrer Flächeninhalte $(F+F_1)$ dann ein *Minimum Maximorum*, wenn jedes Vieleck, für sich betrachtet, den Bedingungen $(\alpha, \beta)$ des vorigen Satzes (1.) genügt, und wenn die ihnen eingeschriebenen Kreise einander gleich sind. (Das heifst: Wird die gegebene Summe $U+U_1$ auf alle möglichen Arten unter die Umfänge $U$, $U_1$ vertheilt, so ist für jeden Fall insbesondere die Summe der Flächeninhalte $F+F_1$ am gröfsten, wenn jedes Vieleck den Bedingungen des Satzes (1.) genügt; und nun ist unter allen diesen gröfsten Summen diejenige die kleinste (Minimum Maximorum), welche statt findet, wenn die den Vielecken eingeschriebenen Kreise einander gleich sind.)

Dieser Satz gilt gleicherweise für drei, vier, fünf, .... Vielecke.

3. Sind von einem ebenen oder sphärischen $n$Eck die Summe von $n-1$ Seiten und die dazwischen liegenden $n-2$ Winkel (einzeln) gegeben, so ist sein Inhalt dann am gröfsten, wenn die übrigen zwei Winkel einander gleich, und wenn jene $n-1$ Seiten von einem Kreise berührt werden, dessen Mittelpunct in der $n$ten Seite liegt.

4. I. Wenn von einem ebenen oder sphärischen Vierecke zwei Winkel, eine Seite und die Summe der drei übrigen Seiten gegeben sind, so sind dabei vier Fälle zu unterscheiden, nämlich 1) die gegebenen Win-

kel liegen an der gegebenen Seite, oder 2) keiner liegt an derselben, oder 3) sie stehen einander gegenüber, oder endlich 4) sie liegen beide an einer Seite, die der gegebenen anliegt. Es ist die Frage, unter welcher Bedingung der Inhalt des Vierecks in jedem der vier Fälle, für sich betrachtet, ein Maximum oder Minimum sei. Für den ersten Fall (1.) findet dies z. B. statt, wenn die nicht gegebenen zwei Winkel einander gleich sind; und zwar findet dabei ein Maximum oder Minimum statt, je nachdem die Summe der gegebenen zwei Winkel grösser oder kleiner als $\pi$ (2 Rechte); ist sie gerade $=\pi$, so ist die Aufgabe unbestimmt, d. h. alle Vierecke haben gleichen Inhalt.

II. Die analoge Aufgabe, wenn ein Winkel, zwei Seiten und die Summe der zwei übrigen Seiten gegeben sind.

5. Heifsen die Seiten eines ebenen oder sphärischen Dreiecks $a$, $b$, $c$, die ihnen gegenüberstehenden Winkel beziehlich $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, und bezeichnet man den Inhalt des Dreiecks durch $\triangle$, den Umfang durch $u$, die Summe der Seiten $a$, $b$ durch $s$ und die Summe der Winkel $\alpha$, $\beta$ durch $\sigma$, so finden für diese verschiedenen Gröfsen, in Hinsicht auf Maximum und Minimum, unter andern folgende Sätze statt:

| | Gegeben. | Maximum. | Minimum. | Bedingung. |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $u$, $c$ | $\triangle$, $\gamma$ | | $a=b$. |
| 2. | $u$ | $\triangle$ | | $a=b=c$. |
| 3. | $\triangle$, $\gamma$ | | $u$, $c$ | $a=b$, oder $\alpha=\beta$. |
| 4. | $\triangle$ | | $u$ | $a=b=c$. |
| 5. | $a$, $b$ | $\triangle$ | | $\gamma=\alpha+\beta$. |
| 6. | $\alpha$, $\beta$ | | $u$ | $c+\pi=a+b$. |
| 7. | $s$ | $\triangle$ | | $a=b$ und $\gamma=\alpha+\beta$. |
| 8. | $\sigma$ | | $u$ | $\alpha=\beta$ und $c+\pi=a+b$. |
| 9. | $\triangle$, $c$ | $\gamma$ | $\sigma$, $u$, $s$ | $a=b$. |
| 10. | $u$, $\gamma$ | $s$, $\triangle$, $\sigma$ | $c$ | $\alpha=\beta$. |
| 11. | $\triangle$, $s$ | | $\gamma$, $u$, $c$ | $a=b$. |
| 12. | $u$, $\sigma$ | $c$, $\triangle$, $\gamma$ | | $\alpha=\beta$. |
| 13. | $c$, $\gamma$ | $\triangle$, $u$ | | $a=b$, oder $\alpha=\beta$. |
| 14. | $s$, $\gamma$ | $\triangle$ | $c$ | $a=b$. |
| 15. | $\sigma$, $c$ | $\gamma$ | $u$ | $\alpha=\beta$. |
| 16. | $u$, $\triangle$ | $c$, $\gamma$ | $c$, $\gamma$ | $a=b$, oder $\alpha=\beta$. |
| 17. | $s$, $\alpha$ | $\triangle$ | | $\gamma=2\beta$. |
| 18. | $\sigma$, $a$ | | $u$ | $c+\pi=2b$. |
| 19. | $s-c$, $\gamma$ | $\triangle$ | $u$ | $a=b$. |
| 20. | $\sigma-\gamma$, $c$ | $u$ | $\triangle$ | $\alpha=\beta$. |

Viele von diesen Sätzen sind allgemein bekannt, namentlich in Beziehung auf das ebene Dreieck. Einige gelten nur für das sphärische Dreieck, wie man leicht bemerken wird. Man wird sie leicht in Worten aussprechen können, z. B. der Satz No. 17. lautet wie folgt:

„Wenn ein Winkel ($\alpha$) eines ebenen oder sphärischen Dreiecks und die Summe $s$ zweier Seiten ($a, b$), wovon die eine dem Winkel gegenüberliegt, gegeben sind, so ist sein Flächeninhalt ($\triangle$) dann am gröfsten, wenn der Winkel ($\gamma$), welcher der dritten Seite gegenübersteht, doppelt so grofs ist, als der andere nicht gegebene Winkel ($\beta$)."

6. I. *„Die unbegrenzten Schenkel eines gegebenen Winkels mit einer beliebigen krummen Linie so zu verbinden, dafs die dadurch entstehende Figur bei gegebenem Umfange den gröfsten Inhalt, oder bei gegebenem Inhalte den kleinsten Umfang habe. Welche Form mufs die genannte Linie haben, und welche Lage gegen die Schenkel des Winkels?"*

II. Die analoge sphärische Aufgabe.

III. Die analoge Aufgabe im Raume, wenn z. B. (statt jenes Winkels) ein gerader Kegel gegeben ist, von welchem ein Stück (dem Scheitel anliegend) abgeschnitten werden soll, das bei gegebener Oberfläche den gröfsten Körperinhalt hat.

7. Unter allen sphärischen Dreiecken, welche irgend einem gegebenen sphärischen Dreiecke eingeschrieben sind, hat dasjenige den kleinsten Umfang, dessen Ecken in den Fufspuncten der (sphärischen) Perpendikel liegen, welche aus den Spitzen des gegebenen Dreiecks auf die gegenüberstehenden Seiten herabgelassen werden. (Beim ebenen Dreieck findet bekanntlich ein gleichlautender Satz statt.)

8. Unter allen sphärischen Dreiecken, welche irgend einem gegebenen sphärischen Dreiecke umschrieben sind, hat dasjenige den gröfsten Inhalt, dessen Seiten auf die Quadranten fallen, welche zwischen den Seiten des gegebenen Dreiecks und den ihnen gegenüberliegenden Ecken sich ziehen lassen.

9. Unter allen sphärischen Vierecken, welche einem gegebenen sphärischen Vierecke um- oder eingeschrieben sind, die besondere Eigenschaft desjenigen anzugeben, dessen Inhalt ein Maximum oder dessen Umfang ein Minimum ist.

10. Unter allen dreiseitigen Pyramiden, welche einer gegebenen dreiseitigen Pyramide eingeschrieben sind, diejenigen zu bestimmen, deren Oberfläche ein Minimum ist. (Desgleichen bei andern Polyëdern.)

11. I. Unter allen Kreissectoren (verschiedener Kreise aber) von gleichem Umfange, denjenigen zu finden, der so beschaffen ist, dafs der ihm eingeschriebene Kreis (der die beiden Radien und den Bogen berührt) ein Maximum, oder der ihm umschriebene Kreis ein Minimum ist.

II. Desgleichen die analoge sphärische Aufgabe.

12. Unter allen Kugelsectoren (d. i. ein gerader Kegel, dessen Grundfläche ein aus seinem Scheitel beschriebenes Kugelfläche-Segment ist) von gleicher Oberfläche denjenigen anzugeben, in welchen sich die gröfste, oder um welchen sich die kleinste Kugel beschreiben läfst.

13. I. Unter allen sphärischen Kreissectoren auf der nämlichen Kugelfläche und von gegebenem Umfange hat derjenige den gröfsten Flächeninhalt, dessen Centriwinkel (den die zwei sphärischen Radien am Pol des Kreises bilden) $= \frac{4}{\pi}$ Rechte, und zwar ist dieser gröfste Inhalt dem Quadrat der Sehne gleich, welche einem der beiden sphärischen Radien, die den Sector bilden, zugehört (d. i. diejenige Gerade, welche die Endpuncte eines der genannten Radien, innerhalb der Kugel, mit einander verbindet).

II. Wenn der Umfang des Sectors gegeben, die Kugel aber nicht, so soll diese so bestimmt werden, dafs der Inhalt des Sectors ein Maximum Maximorum wird.

14. I. Unter den verschiedenen Geraden, welche die Fläche eines gegebenen Dreiecks in zwei gleiche Theile theilen, die kleinste oder gröfste anzugeben. Desgleichen wenn sich die Theile verhalten, wie $n:m$.

II. Desgleichen wenn statt des Dreiecks irgend ein Vieleck, oder irgend eine ebene geschlossene Curve gegeben ist.

III. Desgleichen bei den Figuren auf der Kugelfläche.

15. I. Unter allen Ebenen, welche den Körperraum einer gegebenen dreiseitigen Pyramide in zwei gleiche Theile theilen (oder im Verhältnifs $n:m$) diejenige anzugeben, bei welcher die Durchschnittsfigur den kleinsten oder gröfsten Inhalt oder Umfang hat.

II. Desgleichen, wenn statt der genannten Pyramide irgend ein anderer Körper, von ebenen oder krummen Flächen begrenzt, gegeben ist.

16. I. Wird eine unbegrenzte prismatische (oder cylindrische) Säule von beliebigen Ebenen, die nicht mit den Kanten derselben parallel sind, geschnitten, so liegen die Schwerpuncte der Flächen der Durchschnittsfiguren alle in einer bestimmten Geraden *A*, welche den Kanten der Säule parallel ist. Diese Gerade *A* soll die „barycentrische Axe" der Säule heifsen.

II. „*Nimmt man in der barycentrischen Axe* A *einer prismatischen Säule irgend zwei Puncte* b, c *an, legt durch jeden eine Ebene* B, C, *welche die Säule und ihre Kanten schneidet, so dafs ein schief oder parallel abgeschnittenes Prisma (oder Cylinder) entsteht, so hat dieses Prisma immer den nämlichen Inhalt, welche Lage man auch den schneidenden Ebenen oder Grundflächen* B, C *geben mag, wenn dieselben nur stets durch die festen Puncte* b, c *gehen.*"

Oder:

III. „*Der Körperinhalt jedes beliebigen, schief oder parallel abgeschnittenen Prismas (oder Cylinders) ist gleich dem Product aus der einen (oder andern) Grundfläche* B *oder* C *in das aus dem Schwerpuncte* (c *oder* b) *der andern auf sie gefällte Perpendikel.*" (Daher folgt auch, dafs der Inhalt jeder Grundfläche, oder jeder ebenen Durchschnitts-Figur, um so kleiner ist, je mehr der Neigungswinkel, den sie mit der barycentrischen Axe bildet, sich dem Rechten nähert; dafs also jener ein Minimum wird, wenn letzterer diese Grenze erreicht.)

IV. „*Sind von einem beliebigen Prisma (oder Cylinder) die eine Grundfläche* (B), *die Lage der Seitenflächen, oder die Richtung der Längen-Kanten und der Körperinhalt gegeben, so ist die Gröfse und Lage der andern Grundfläche* (C) *zwar unbestimmt, aber in allen ihren unzähligen verschiedenen Lagen geht sie stets durch einen und denselben bestimmten Punct* (c), *welcher zugleich ihr Schwerpunct ist, und in der barycentrischen Axe des Prismas liegt.*"

In den besseren Lehrbüchern der Stereometrie wird ein Satz bewiesen, welcher der einfachste Fall des vorstehenden Satzes (III.) ist; nur wird er unter einem andern Gesichtspuncte aufgefafst, nämlich es wird gezeigt: „*dafs der Inhalt des schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas gleich sei dem Producte aus der einen Grundfläche in ein Drittheil der Summe der drei Perpendikel, welche aus den Ecken der andern Grundfläche auf jene herabgelassen werden.*" Durch den obigen Satz

wird der eigentliche Grund dieses Ausdrucks aufgeklärt, nämlich er ist durch die besondere Eigenschaft des Dreiecks bedingt: *dafs der Schwerpunct seiner Fläche mit dem Schwerpunct seiner drei Eckpuncte zusammenfällt,"* denn diese Eigenschaft hat zur Folge, dafs die Summe der vorgenannten drei Perpendikel gerade dreimal so grofs ist, als das aus dem Schwerpuncte der zweiten Grundfläche auf die erste gefällte Perpendikel.

17. I. Wenn der Körperwinkel an der Spitze einer beliebigen Pyramide (oder eines Kegels) nebst dem Körperinhalte derselben gegeben ist, so kann zwar ihre Grundfläche, der Gröfse und Lage nach, sich unendlichfach verändern, aber sie ist dabei dem Gesetz unterworfen: *„dafs sie in allen ihren verschiedenen Lagen eine bestimmte krumme Fläche berührt, und dafs der Berührungspunct zugleich ihr Schwerpunct ist."* Der Körperwinkel (oder Kegel) ist ein *„Asymptoten-Körperwinkel"* der krummen Fläche.

II. Es sollen die Gleichung und die Eigenschaften der genannten krummen Fläche gefunden werden *).

Aus der angegebenen Eigenschaft (I.) folgt weiter:

III. *„Dafs unter allen Pyramiden (oder Kegeln) von gleichem Inhalt und gemeinschaftlichem Körperwinkel an der Spitze, diejenige die kleinste Grundfläche hat, bei welcher das Perpendikel aus der Spitze auf die Grundfläche, den Schwerpunct der letztern trifft."*

IV. *„Und dafs unter allen Pyramiden (oder Kegeln) von gleich grofsen Grundflächen und gemeinschaftlichem Körperwinkel an der Spitze, diejenige den gröfsten Körperinhalt hat, welche die nämliche Eigenschaft* (III.) *besitzt."*

18. I. Wenn ein beliebiger Körper der Form und Gröfse nach gegeben ist: von welcher krummen Fläche werden dann die gesammten

---

*) Ist der gegebene Körperwinkel insbesondere dreikantig, und werden seine Kanten zu Coordinaten-Axen angenommen, so hat die Gleichung der in Frage stehenden Fläche (wie aus (I.) leicht folgt) die einfache Form

$$xyz = A,$$

woraus man sieht, dafs die Fläche drei Systeme von Kegelschnitten enthält, nämlich dafs sie von jeder Ebene, welche mit einer der drei Coordinaten-Ebenen (Seitenflächen des Körperwinkels) parallel ist, in einem Kegelschnitt, und zwar in einer Hyperbel, geschnitten wird.

Ist ferner statt des Körperwinkels ein Kegel zweiten Grades gegeben, so ist die zugehörige krumme Fläche ebenfalls nur von diesem Grade, nämlich sie ist das zweitheilige Hyperboloïd.

Ebenen, die von demselben gleich grofse Segmente abschneiden, berührt? und in welchem Puncte wird jede Ebene, als Grundfläche des Segments betrachtet, von derselben berührt? (Ist z. B. die Oberfläche des gegebenen Körpers vom zweiten Grade, so ist die gesuchte Fläche ihr ähnlich, mit ihr concentrisch, und die Grundfläche des Segments wird in ihrem Schwerpuncte berührt.)

II. Dieselben Fragen, wenn anstatt des Segments dessen Grundfläche constanten Inhalt haben soll.

19. Es giebt drei Polyëder, wovon jedes entweder fünf Seitenflächen oder fünf Ecken hat, nämlich 1) die vierseitige Pyramide (hat fünf Ecken und fünf Flächen), 2) die abgestumpfte dreiseitige Pyramide (oder das Prisma) und 3) die sechsflächige Doppelpyramide (von sechs Dreiecken begrenzt und hat 5 Ecken). Angenommen diese drei Körper haben gleich grofse Oberflächen, und jeder sei so construirt, dafs sein Inhalt ein Maximum ist, so ist, wenn man die Inhalte, nach der Reihe, durch $a$, $b$, $c$ bezeichnet,

$$a:b=b:c, \text{ oder } b^2=ac, \text{ wobei } c>b>a;$$

und umgekehrt: haben die Körper gleichen Inhalt, und ist jeder so beschaffen, dafs seine Oberfläche ein Minimum ist, so hat man, wenn diese Oberflächen durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bezeichnet werden,

$$\alpha:\beta=\beta:\gamma, \text{ wobei } \alpha>\beta>\gamma.$$

20. Welche Relationen finden nach Analogie des vorigen Satzes (19.), bei den verschiedenen Körpern Statt, welche sechs Ecken oder sechs Flächen haben? — Oder: wenn die 7 verschiedenen sechsflächigen Körper gleich grofse Oberflächen haben, und wenn jeder so beschaffen ist, dafs er den gröfsten Inhalt hat: in welcher Ordnung folgen dann diese Maxima, ihrer Gröfse nach, aufeinander? welches ist z. B. das Kleinste? Und welches Verhältnifs haben unter diesen Umständen die Inhalte der einzelnen Seitenflächen jedes Körpers, für sich betrachtet, zu einander?

21. *Wenn die Netzform eines Polyëders* (d. h. die Anzahl, Gattung und Aufeinanderfolge seiner Seitenflächen) *so wie seine Oberfläche* (Summe aller Seitenflächen) *gegeben ist: unter welchen Bedingungen ist dann sein Körperinhalt ein Maximum?"*

22. *„Wenn die Grundfläche einer vierseitigen Pyramide der Form und Gröfse nach, und wenn die Summe der Seitenflächen gegeben ist,*

*so soll die Bedingung gefunden werden, unter welcher der Inhalt der Pyramide ein Maximum wird."*

Dieselbe Aufgabe in Rücksicht auf Pyramiden von beliebig vielen Seitenflächen.

Die Lösung dieser Aufgabe ist meines Wissens nur für den besondern Fall bekannt, wo die Grundfläche der Pyramide einem Kreise umgeschrieben ist. Für den gegenwärtigen allgemeinen Fall ist die Lösung weniger leicht und einfach.

23. Wenn die Grundfläche einer beliebigen Pyramide, der Form und Gröfse nach, nebst dem Körperinhalte derselben gegeben ist, so soll die Bedingung gefunden werden, unter welcher entweder 1) der Inhalt des Körperwinkels an der Spitze (d. i. die Summe seiner Flächenwinkel), oder 2) die Summe der Kantenwinkel an der Spitze, oder 3) die Summe der Körperwinkel an der Grundfläche ein Maximum wird.

24. Wenn von einer beliebigen Pyramide der Körperwinkel an der Spitze (der Form und Gröfse nach) nebst dem Körperinhalte gegeben ist, so soll die Bedingung angegeben werden, unter welcher entweder 1) der Umfang der Grundfläche, oder 2) die Summe der Seitenflächen, oder 3) die ganze Oberfläche, oder 4) die Summe der Kanten, etc. ein Minimum wird.

25. Wenn die Grundfläche einer beliebigen Pyramide (oder eines Kegels) der Form und Art nach (d. h. sie ist einer gegebenen Figur ähnlich) und wenn die Oberfläche derselben gegeben ist: unter welchen Bedingungen ist dann ihr Körperinhalt ein Maximum?

Wenn insbesondere die Grundfläche ein Kreis, oder ein dem Kreise umgeschriebenes Vieleck ist, so ist bekanntlich der Inhalt der Pyramide ein Maximum, wenn die Summe der Seitenfläche dreimal so grofs als die Grundfläche ist.

26. Wenn die Grundfläche einer Pyramide der Form und Gröfse nach, und wenn die Summe der an der Spitze liegenden Kanten gegeben ist, so ist ihr Inhalt dann ein Maximum, wenn jede durch die Spitze der Grundfläche parallel gezogene Gerade mit jenen Kanten solche Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ bildet, für welche stets die Gleichung

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \dots = 0$$

statt findet.

27. *„Wenn die Grundfläche einer abgestumpften dreiseitigen Pyramide der Form und Gröfse nach, und wenn die Summe der vier übrigen Flächen gegeben ist: unter welcher Bedingung ist dann ihr Inhalt ein Maximum?"*

Dieselbe Aufgabe für andere Pyramiden, oder für den abgestumpften Kegel, dessen gegebene Grundfläche ein Kreis ist.

28. *„Besteht die Oberfläche eines Körpers aus zwei Theilen: aus einer der Form und Gröfse nach gegebenen ebenen Figur* A *(als Grundfläche angesehen) und aus einer nur der Gröfse nach gegebenen Fläche* B, *so soll man die Form der letzteren für den Fall finden, wo der Inhalt des Körpers ein Maximum wird."*

Dieselbe Aufgabe für irgend einen besonderen Fall, z. B. wenn die gegebene Grundfläche $A$ ein Dreieck, Viereck, etc. oder ein regelmäfsiges Vieleck, oder ein Kreissegment, oder eine Ellipse ist. (Ist $A$ ein Kreis, so ist $B$ ein Segment der Kugelfläche.)

Oder dieselbe Aufgabe allgemeiner, wo $A$ eine beliebige (nicht ebene) gegebene Fläche und wo ihre Grenze, die sie mit $B$ gemein hat, irgend ein (gegebenes) schiefes Vieleck, oder irgend eine Curve von doppelter Krümmung ist.

29. Wenn die Grundlinie eines Dreiecks, so wie ihre Lage gegen eine in derselben Ebene liegende Gerade $A$, nebst der Summe der Schenkel desselben gegeben ist, so sollen die Schenkel so bestimmt werden, dafs sie, wenn man das Dreieck um jene Gerade $A$ (als feste Axe) herumbewegt, zusammen die kleinste oder gröfste Fläche beschreiben.

30. Wenn der Radius einer Kugel und der Abstand ihres Mittelpuncts von einer festen Axe $A$ gegeben sind, so wird, wenn man die Kugel um die feste Axe herumbewegt, jeder Durchmesser derselben irgend eine bestimmte Fläche beschreiben; und zwar werden alle Durchmesser, welche mit der Axe in einer Ebene liegen, gleich grofse, und zwar unter allen die gröfste, derjenige Durchmesser dagegen, welcher auf jener Ebene senkrecht steht, wird unter allen die kleinste Fläche beschreiben. Es ist nun die Frage, welchem Gesetze von den übrigen Durchmessern diejenigen unterworfen sind, welche gleich grofse Flächen beschreiben (d. h. in was für einer Kegelfläche sie liegen)?

---

(Auct. *Hill,* L. Goth.)

**Theorema analyticum.**

Si fuerint $y_1, y_2, y_3, \ldots . y_n$ radices aequationis lineariter differentialis:

$$\partial^n y + a_1 \partial^{n-1} y + a_2 \partial^{n-2} y + a_3 \partial^{n-3} y + \cdots + a_n y = 0,$$

ordinis scilicet $n$; universim hae quidem radices per coefficientes $a_1$, $a_2$, $a_3$, .... $a_n$, quae una cum arbitraria quantitate $x$ variant, neque algebraice, neque signo integrali indefinito $\int$ in usum vocato, exprimi possunt; nihilotamen minus innumerare ipsarum radicum ipsarumque differentialium dantur functiones, quae ita exprimuntur. Et quidem forma alterna, quae ex hae $\partial^{m_1} y_1 . \partial^{m_2} y_2 . \partial^{m_3} y_3 \ldots . \partial^{m_n} y$ permutando signisque et notissima regula alternando oritur, si $m_1$, $m_2$, .... $m_n$ numeri fuerint integri positivi, per $\int a\, \partial x$ reliquasque coefficientes harumque differentialia semper, et quidem algebraice, exprimitur.

**Problema analyticum maximi momenti:**

Datis functionibus quibusvis ($p, q, r$ etc.), quantitatum totidem ($x, y, z$ etc.), aliam functionem ($\Phi$) invenire ejusmodi, ut, valoribus datarum in argumentorum locos suffectis, eadem resurgat vel tantum quantitate constante ($c$) a primitivo valore differat; videlicet:

$$\Phi(p, q) = \Phi(x, y) + c, \quad \Phi(p, q, r) = \Phi(x, y, z) + c; \quad \text{etc.}$$

---

(Von Herrn *Str.* zu Berlin.)

**Satz.**

Der $n$te Näherungswerth des Kettenbruchs $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}\cdots}}}$ ist, wenn $n$ eine gerade Zahl,

$$= \frac{a^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} . b^{\frac{n}{2}} + (n-2) a^{\left(\frac{n-4}{2}\right)} . b^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} + \frac{n-3 . n-4}{1.2} \cdot a^{\left(\frac{n-6}{2}\right)} . b^{\left(\frac{n-4}{2}\right)} + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3} \cdot a^{\left(\frac{n-8}{2}\right)} . b^{\left(\frac{n-6}{2}\right)} + \cdots}{a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} + (n-1) a^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} . b^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} + \frac{(n-2) . n-3}{1.2} \cdot a^{\left(\frac{n-4}{2}\right)} . b^{\left(\frac{n-4}{2}\right)} + \frac{n-3 . n-4 . n-5}{1.2.3} \cdot a^{\left(\frac{n-6}{2}\right)} . b^{\left(\frac{n-6}{2}\right)} + \cdots}$$

**Satz.**

Der $n$te Näherungswerth des Kettenbruchs $\cfrac{1}{2\cos\alpha - \cfrac{1}{2\cos\alpha - \cfrac{1}{2\cos\alpha}\cdots}}$

ist $= \dfrac{\sin(n\alpha)}{\sin((n+1)\alpha)}$.

---

(Vom Herrn Vermessungs-Revisor *Nernst* zu Stralsund.)

## Zur Umkehrung der Reihen.

Wenn $y = \varphi x$ und

$$x = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \cdots$$

ist, so sind die Coëfficienten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... durch folgende Gleichungen gegeben:

$$(\varphi x)_\alpha = 0,$$
$$(\varphi' x)_\alpha \beta - 1 = 0,$$
$$\frac{(\varphi'' x)_\alpha}{1.2}\beta^2 + (\varphi' x)_\alpha \gamma = 0,$$
$$\frac{(\varphi''' x)_\alpha}{1.2.3}\beta^3 + \frac{2(\varphi'' x)_\alpha}{1.2}\beta\gamma + (\varphi' x)_\alpha \delta = 0$$

u. s. w.

$(\varphi x)_\alpha$, $(\varphi' x)_\alpha$, $(\varphi'' x)_\alpha$ u. s. w. bedeuten, dafs nach geschehener Ableitung $\alpha$ für $x$ in $\varphi x$, $\varphi' x$, $\varphi'' x$ u. s. w. gesetzt werden soll.

## Zur Umformung der Reihen.

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{1-x}\right) = & (\varphi x)_1 \\ & + (\varphi' x)_1 x \\ & + \left[(\varphi' x)_1 + \frac{(\varphi'' x)_1}{1.2}\right]x^2 \\ & + \left[(\varphi' x)_1 + \frac{2(\varphi'' x)_1}{1.2} + \frac{(\varphi''' x)_1}{1.2.3}\right]x^3 \\ & + \left[(\varphi' x)_1 + \frac{3(\varphi'' x)_1}{1.2} + \frac{3(\varphi''' x)_1}{1.2.3} + \frac{(\varphi'''' x)_1}{1.2.3.4}\right]x^4 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

$(\varphi x)_1$, $(\varphi' x)_1$, $(\varphi'' x)_1$ u. s. w. sind hier $\varphi x$, $\varphi' x$, $\varphi'' x$, wenn nach geschehener Ableitung 1 für $x$ gesetzt ist.

---

## Druckfehler im 3ten Hefte 15ten Bandes.

Pag. 229 Z. 14 v. u. statt *(AC, BC)* lies *AB, BC*
— 234 — 12 v. u. st. *(ÀBC* und *ÀBD)* l. *ÀBC* und *ÀCD*
— 241 — 15 v. o. st. *(A'B, B'B)* l. *AB', B'B*
— 243 — 7 v. o. st. (Endpunct) l. Eckpunct
— — — 17 v. o. st. (der Kante) l. die Kante
— 257 — 8 v. u. st. (sind) l. sein

# 13.

# Aequationes modulares pro transformatione Functionum Ellipticarum.

(Auctore Dr. *L. A. Sohnke*, prof. math. Halae.)

Integrale $\int_0 \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}.\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)}}$ substitutione adhibita:

$$y = \frac{x(a+a'x^2+a''x^4+\dots+a^{(m)}x^{2m})}{1+b'x^2+b''x^4+\dots+b^{(m)}x^{2m}}$$

in eius simile $\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}.\sqrt{(1-\varkappa^2 x^2)}}$ transformari potest, quae transformatio $n^{ti} = (2m+1)^{ti}$ ordinis nominatur. Relationes analyticas inter $y$ et $x$, $\lambda$ et $\varkappa$ intercedentes Cl. *Jacobi* in libro suo: *Fundamenta nova* etc. docuit. Ibi pag. 39 invenitur:

$$\sqrt[4]{\lambda} = \sqrt[4]{\varkappa^n}.[\sin\operatorname{coam} 4\omega . \sin\operatorname{coam} 8\omega \dots \sin\operatorname{coam} 2(n-1)\omega],$$

ubi significant:

$$\omega = \frac{mK+m'iK'}{n}, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa\varkappa\sin\varphi^2)}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa'\varkappa'\sin\varphi^2)}},$$

$$\varkappa\varkappa+\varkappa'\varkappa' = 1.$$

Numerum $n$, qui ordinem transformationis indicat in sequentibus numerum primum ponamus, quem ad casum notum est reliquos revocari posse.

In fractione $\omega$ quantitatibus $m$ et $m'$ omnes valores et positivos et negativos, ipso $n$ minores, tribui licet, verum l. c. pag. 49 demonstratur, omnes transformationes diversas, quae exstare possint, evasuras esse, si pro $\omega$ elegerimus valores hos:

$$\frac{K}{n}, \quad \frac{iK'}{n}, \quad \frac{K+iK'}{n}, \quad \frac{K+2iK'}{n}, \quad \frac{K+3iK'}{n}, \quad \dots \quad \frac{K+(n-1)iK'}{n},$$

qui in formula ipsius $\lambda$ pro $\omega$ positi $(n+1)$ inter se diversos valores moduli $\lambda$ per $\varkappa$ expressos praebent, unde elucet aequationis algebraicae inter $\lambda$ et $\varkappa$, quae aequatio modularis dicitur, gradum esse $(n+1)$. Pro transformatione et tertii et quinti ordinis aequationem ejusdem gradus adeo inter radices quadraticas modulorum locum habere Cl. *Jacobi* docuit, nec non pro septimo ordine Dr. *Guetzlaff* (in hujus Diarii Tom. XII. p. 173): idem valere pro transformatione cujusvis ordinis ex sequentibus patet.

## §. 1.

Formula laudata:

$$\sqrt[4]{\lambda} = \sqrt[4]{\varkappa^n}.[\sin\operatorname{coam} 4\omega . \sin\operatorname{coam} 8\omega \ldots . \sin\operatorname{coam} 2(n-1)\omega],$$

cum sit: $\sin\operatorname{coam} 8p\omega = \sin\operatorname{coam}(4n\omega - 8p\omega) = \sin\operatorname{coam} 4(n-2p)\omega$, ubi $(n-2p)$ est numerus impar, quoniam ponitur $n$ numerus primus, etiam scribi potest:

$$\sqrt[4]{\lambda} = \sqrt[4]{\varkappa^n}.[\sin\operatorname{coam} 4\omega . \sin\operatorname{coam} 12\omega \ldots . \sin\operatorname{coam} 4(n-2)\omega],$$

qua in expressione alia multipla ipsius $4\omega$ non inveniuntur, nisi imparia. Quorum sinus coamplitudinis tanquam functiones ipsius $\sin\operatorname{coam} 4\omega$ repraesentari posse satis notum est, ita ut, denotante $f[\sin\operatorname{coam} 4\omega]$ functionem ipsius $\sin\operatorname{coam} 4\omega$ rationalem, efficiatur:

$$\sqrt[4]{\lambda} = \sqrt[4]{\varkappa^n}.f[\sin\operatorname{coam} 4\omega], \quad \text{aut posito:} \quad \sqrt[4]{\lambda} = v, \quad \sqrt[4]{\varkappa} = u,$$
$$v = u^n.f[\sin\operatorname{coam} 4\omega].$$

Haec vero in formula loco $\omega$, valore ipsius $v$ eodem manente, scribi posse $\omega$, $2\omega$, $3\omega$, .... $\frac{n-1}{2}\omega$ facile intelligitur, unde prodit:

$$\frac{v}{u^n} = f[\sin\operatorname{coam} 4\omega] = f[\sin\operatorname{coam} 8\omega] \ldots . = f[\sin\operatorname{coam} 2(n-1)\omega],$$

vel etiam:

$$\frac{v^p}{u^{np}} = \{f[\sin\operatorname{coam} 4\omega]\}^p = \{f[\sin\operatorname{coam} 8\omega]\}^p \ldots . = \{f[\sin\operatorname{coam} 2(n-1)\omega]\}^p$$
$$= \frac{2}{n-1}.\Sigma\{f[\sin\operatorname{coam} 4m\omega]\}^p$$

si numero $m$ omnes valores 1, 2, 3, .... $\frac{n-1}{2}$ tribuuntur.

Habemus ergo singulos valores ipsius $v$ sequentes:

$$v_1 = u^n.\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4K}{n}.\sin\operatorname{coam}\frac{8K}{n}\ldots.\sin\operatorname{coam}\frac{2(n-1)K}{n}\right] = u^n.f\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4K}{n}\right],$$

$$v_2 = u^n.\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4iK'}{n}.\sin\operatorname{coam}\frac{8iK'}{n}\ldots.\sin\operatorname{coam}\frac{2(n-1)iK'}{n}\right] = u^n.f\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4iK'}{n}\right],$$

$$v_3 = u^n.\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4K+4iK'}{n}.\sin\operatorname{coam}\frac{8K+8iK'}{n}\ldots.\sin\operatorname{coam}\frac{2(n-1)K+2(n-1)iK'}{n}\right]$$
$$= u^n.f\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4K+4iK'}{n}\right],$$

$$v_4 = u^n.\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4K+8iK'}{n}.\sin\operatorname{coam}\frac{8K+16iK'}{n}\ldots.\sin\operatorname{coam}\frac{2(n-1)K+4(n-1)iK'}{n}\right]$$
$$= u^n.f\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4K+8iK'}{n}\right],$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$v_{n+1} = u^n.\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4K+4(n-1)iK'}{n}.\sin\operatorname{coam}\frac{8K+8(n-1)iK'}{n}\ldots.\sin\operatorname{coam}\frac{2(n-1)K+2(n-1)^2iK'}{n}\right]$$
$$= u^n.f\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4K+4(n-1)iK'}{n}\right]$$

aut:

$$\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\nu_1^p}{u^{np}} = \Sigma\left\{f\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4mK}{n}\right]\right\}^p,$$

$$\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\nu_2^p}{u^{np}} = \Sigma\left\{f\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4miK'}{n}\right]\right\}^p,$$

$$\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\nu_3^p}{u^{np}} = \Sigma\left\{f\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4m(K+iK')}{n}\right]\right\}^p,$$

$$\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\nu_4^p}{u^{np}} = \Sigma\left\{f\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4m(K+2iK')}{n}\right]\right\}^p,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\nu_{n+1}^p}{u^{np}} = \Sigma\left\{f\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4m[K+(n-1)iK']}{n}\right]\right\}^p,$$

unde additione facta eruitur:

$$\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\nu_1^p+\nu_2^p+\nu_3^p+\cdots+\nu_{n+1}^p}{u^{np}}$$

$$= \Sigma\left\{f\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4m(K+m'iK')}{n}\right]\right\}^p + \Sigma\left\{f\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4miK'}{n}\right]\right\}^p,$$

ubi numero $m$ valores $1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2}$, numero $m'$ valores $0, 1, 2, 3, \ldots n-1$ conveniunt. Verumtamen, cum $\sin\operatorname{coam}(u+2iK') = \sin\operatorname{coam} u$ sit, formula ita transformari potest ut factor ipsius $iK'$ ipso $2n$ minor fiat, quo obtinetur:

$$\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\nu_1^p+\nu_2^p+\nu_3^p+\cdots+\nu_{n+1}^p}{u^{np}} = \Sigma\left\{f\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4mK+4m'iK'}{n}\right]\right\}^p,$$

si pro $m$ ponuntur $0, 1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2}$, pro $m'$ $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \ldots \pm\frac{n-1}{2}$, ita tamen ut quoties $m=0$, et ipsi $m'$ valores tantum positivi $1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2}$, tribuantur. Ut hanc formulam eandem esse ac praecedentem eluceat, animadverto et hanc et illam ex $\frac{nn-1}{2}$ terminis inter se diversis constare neque numerum $m$ diversos quam in priori formula valores assumere.

Nunc demonstremus functiones symmetricas ipsius $\sin\operatorname{coam}\frac{4mK+4m'iK'}{n}$ esse functiones rationales ipsius $\varkappa$.

In auxilium vocamus ex *Fund.* pag. 42 formulam:

$$1-\lambda\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) =$$

$$\frac{(1-\varkappa.\sin\operatorname{am} u).[(1-\varkappa.\sin\operatorname{am} u.\sin\operatorname{coam} 4\omega)(1-\varkappa.\sin\operatorname{am} u.\sin\operatorname{coam} 8\omega)\ldots(1-\varkappa.\sin\operatorname{am} u.\sin\operatorname{coam} 2(n-1)\omega)]^2}{(1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am} u.\sin^2\operatorname{am} 4\omega)(1-\varkappa^2.\sin^2\operatorname{am} u.\sin^2\operatorname{am} 8\omega)\ldots(1-\varkappa^2.\sin^2\operatorname{am} u.\sin^2\operatorname{am} 2(n-1)\omega)},$$

vel cum sit: $\frac{(1-\varkappa.\sin\mathrm{am}\,u.\sin\mathrm{coam}\,\alpha)^2}{1-\varkappa^2.\sin^2\mathrm{am}\,u.\sin^2\mathrm{am}\,\alpha} = \frac{(1-\varkappa.\sin\mathrm{am}(u+\alpha))(1-\varkappa.\sin\mathrm{am}(u-\alpha))}{\Delta^2\mathrm{am}\,\alpha}$:

$$(A.)\qquad 1-\lambda\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) =$$

$$\frac{(1-\varkappa.\sin\mathrm{am}\,u)(1-\varkappa.\sin\mathrm{am}(u+4\omega))(1-\varkappa.\sin\mathrm{am}(u+8\omega))\dots(1-\varkappa.\sin\mathrm{am}(u+4(n-1)\omega))}{\Delta^2\mathrm{am}\,4\omega.\Delta^2\mathrm{am}\,8\omega\dots\Delta^2\mathrm{am}\,2(n-1)\omega}.$$

In hac aequatione posito $\omega = \frac{iK'}{n}$ ex notatione §[i] 24. *Fund.* producitur:

$$1-\lambda_1\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_1},\lambda_1\right) =$$

$$\frac{[1-\varkappa.\sin\mathrm{am}\,u]\left[1-\varkappa.\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{4iK'}{n}\right)\right]\left[1-\varkappa.\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{8iK'}{n}\right)\right]\dots\left[1-\varkappa.\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{4(n-1)iK'}{n}\right)\right]}{\Delta^2\mathrm{am}\frac{4iK'}{n}.\Delta^2\mathrm{am}\frac{8iK'}{n}\dots\Delta^2\mathrm{am}\frac{2(n-1)iK'}{n}}.$$

Mutando $\varkappa$ in $\lambda$, quo facto $K'$ in $\Lambda'$, $\lambda_1$ in $\varkappa$, $M_1$ in $M'$ transit, et posito $\frac{u}{M}$ loco $u$, unde $\frac{u}{MM'} = nu$ loco $\frac{u}{M_1}$, obtinemus:

$$(B.)\qquad 1-\varkappa.\sin\mathrm{am}(nu,\varkappa) =$$

$$\frac{\left[1-\lambda.\sin\mathrm{am}\frac{u}{M}\right]\left[1-\lambda.\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}+\frac{4i\Lambda'}{n}\right)\right]\left[1-\lambda.\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}+\frac{8i\Lambda'}{n}\right)\right]\dots\left[1-\lambda.\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}+\frac{4(n-1)i\Lambda'}{n}\right)\right]}{\Delta^2\mathrm{am}\frac{4i\Lambda'}{n}.\Delta^2\mathrm{am}\frac{8i\Lambda'}{n}\dots\Delta^2\mathrm{am}\frac{2(n-1)i\Lambda'}{n}},$$

in cujus aequationis parte dextra Modulus $\lambda$ valet.

Si porro in aequatione $(A.)$ loco $u$ ponimus $u+\frac{4m'iK'}{n}$, unde $\frac{u}{M}$ transit in $\frac{u}{M}+\frac{4m'iK'}{nM} = \frac{u}{M}+\frac{4m'i\Lambda'}{n}$, posito $\omega = \frac{K}{n}$, prodit:

$$1-\lambda.\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}+\frac{4m'i\Lambda'}{n}\right) = \frac{\Pi\left[1-\varkappa\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{4mK+4m'iK'}{n}\right)\right]}{\left[\Delta\,\mathrm{am}\frac{4K}{n}.\Delta\,\mathrm{am}\frac{8K}{n}\dots\Delta\,\mathrm{am}\frac{2(n-1)K}{n}\right]^2},$$

si ipsi $m$ valores $0, 1, 2, 3, \dots n-1$ tribuuntur; jam ubi hac in aequatione ipsi $m'$ tribuantur valores $0, 1, 2, 3, \dots n-1$, facto producto secundum aequationem $(B.)$ obtinemus:

$$1-\varkappa.\sin\mathrm{am}(nu,\varkappa) =$$

$$\frac{\Pi\left[1-\varkappa.\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{4mK+4m'iK'}{n}\right)\right]}{\left[\Delta\,\mathrm{am}\frac{4K}{n}.\Delta\,\mathrm{am}\frac{8K}{n}\dots\Delta\,\mathrm{am}\frac{2(n-1)K}{n}\right]^2\left[\Delta\,\mathrm{am}\frac{4i\Lambda'}{n}.\Delta\,\mathrm{am}\frac{8i\Lambda'}{n}\dots\Delta\,\mathrm{am}\frac{2(n-1)i\Lambda'}{n}\right]^2}$$

ubi utrisque $m$, $m'$ valores $0, 1, 2, 3, \dots n-1$ conveniunt.

Quae formula facile etiam in hanc formam redigitur:

$$1-\varkappa.\sin\text{am}(nu,\varkappa)=(1-\varkappa.\sin\text{am}\,u)\,\Pi\frac{\left[1-\varkappa.\sin\text{am}\,u.\sin\text{coam}\frac{4mK+4m'iK'}{n}\right]^2}{1-\varkappa^2.\sin^2\text{am}\,u.\sin^2\text{am}\frac{4mK+4m'iK'}{n}}$$

si numero $m$ positivi tantum valores $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \frac{n-1}{2}$, numero $m'$ valores $0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots\ \pm\frac{n-1}{2}$ tribuuntur, ita vero ut quoties $m=0$, et ipsi $m'$ valores tantum positivi $1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \frac{n-1}{2}$ conveniant.

Haec formula vero pro $n=4p+1$ modo valet. Nam pro $n=4p-1$, cum valor ipsius $M$ sit negativus, ita ut $\frac{u}{MM'}=-nu$ fiat, signum ipsius $u$ in contrarium mutemus necesse est, unde sub hac conditione habemus:

$$1-\varkappa.\sin\text{am}(nu,\varkappa)=(1+\varkappa.\sin\text{am}\,u)\,\Pi\frac{\left[1+\varkappa.\sin\text{am}\,u.\sin\text{coam}\frac{4mK+m'iK'}{n}\right]^2}{1-\varkappa^2.\sin^2\text{am}\,u.\sin^2\text{am}\frac{4mK+4m'iK'}{n}}.$$

Ut eandem quantitatem algebraice determinemus, ponamus in aequatione 18. *Fund.* pag. 33, quae est:

$$[1-\varkappa.\sin\text{am}(u+v)].[1-\varkappa.\sin\text{am}(u-v)]=\frac{[\Delta\text{am}\,v-\varkappa.\sin\text{am}\,u.\cos\text{am}\,v]^2}{1-\varkappa^2.\sin^2\text{am}\,u.\sin^2\text{am}\,v},$$

$u=2pu$ et $v=(2p-1)u$, quo invenitur:

$$[1-\varkappa.\sin\text{am}(4p-1)u].[1-\varkappa.\sin\text{am}\,u]$$
$$=\frac{[1-\varkappa.\sin\text{am}\,2pu.\sin\text{coam}(2p-1)u]^2.\Delta^2\text{am}(2p-1)u}{1-\varkappa^2.\sin^2\text{am}\,2pu.\sin^2\text{am}(2p-1)u},$$

aut $\sin\text{am}\,u$ per $x$ significato et per $X_m$ functione rationali et integra ipsius $x$ dimensionis $m^{\text{tae}}$, cum notum sit fieri:

$$\sin\text{am}\,2pu=\frac{\sqrt{(1-x^2)}.\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}X_{4p^2-3}}{X_{4p^2}},\qquad \sin\text{am}(2p-1)u=\frac{X_{(2p-1)^2}}{X_{(2p-1)^2-1}},$$

$$\cos\text{am}\,2pu=\frac{X_{4p^2}}{X_{4p^2}},\qquad \cos\text{am}(2p-1)u=\frac{\sqrt{(1-x^2)}.X_{(2p-1)^2-1}}{X_{(2p-1)^2-1}},$$

$$\Delta\text{am}\,2pu=\frac{X_{4p^2}}{X_{4p^2}},\qquad \Delta\text{am}(2p-1)u=\frac{\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}.X_{(2p-1)^2-1}}{X_{(2p-1)^2-1}},$$

$$\sin\text{coam}\,2pu=\frac{X_{4p^2}}{X_{4p^2}},\qquad \sin\text{coam}(2p-1)u=\frac{\sqrt{(1-x^2)}.X_{(2p-1)^2-1}}{\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}.X_{(2p-1)^2-1}},$$

excutitur:

$$1-\varkappa.\sin\text{am}(4p-1)u=\frac{(1+\varkappa x).[X_{8p^2-4p}]^2}{X_{16p^2-8p}};$$

nec minus ex aequatione 19. *Fund.* pag. 33, posito $u=(2p+1)u,\ v=2pu$

deducitur:

$$1 - \varkappa . \sin \operatorname{am} (4p+1) u = \frac{(1-\varkappa x).[X_{8p^2+4p}]^2}{X_{16p^2+8p}}.$$

Invenitur exempli gratia:

$$1 - \varkappa . \sin \operatorname{am} 3u = \frac{[1+\varkappa x].[1-2\varkappa x+2\varkappa x^3-\varkappa^2 x^4]^2}{X_8},$$

$$1 = \varkappa . \sin \operatorname{am} 5u = \frac{\begin{array}{l}[1-\varkappa x].[1-2\varkappa x-4\varkappa^2 x^2+10\varkappa x^3+5\varkappa^2 x^4-4\varkappa(2+3\varkappa^2)x^5\\ \quad -4\varkappa^2(1-\varkappa^2)x^6+4\varkappa^3(3+2\varkappa^2)x^7-5\varkappa^4 x^8-10\varkappa^5 x^9\\ \quad +4\varkappa^4 x^{10}+2\varkappa^5 x^{11}-\varkappa^6 x^{12}]^2\end{array}}{X_{24}},$$

$$1 - \varkappa . \sin \operatorname{am} 7u = \frac{\begin{array}{l}[1+\varkappa x].[1-4\varkappa x-4\varkappa^2 x^2+4\varkappa(7+2\varkappa^2)x^3-14\varkappa^2 x^4\\ \quad -28\varkappa(2+3\varkappa^2)x^5+28\varkappa^2(1+4\varkappa^2)x^6\\ \quad +4\varkappa(8+51\varkappa^2+16\varkappa^4)x^7-\varkappa^2(16+305\varkappa^2+144\varkappa^4)x^8\\ \quad -8\varkappa^3(16+25\varkappa^2+4\varkappa^4)x^9+8\varkappa^4(46+57\varkappa^2+8\varkappa^4)x^{10}\\ \quad +56\varkappa^5(1+2\varkappa^2)x^{11}-4\varkappa^4(56+161\varkappa^2+56\varkappa^4)x^{12}\\ \quad +56\varkappa^5(2+\varkappa^2)x^{13}+8\varkappa^4(8+57\varkappa^2+46\varkappa^4)x^{14}\\ \quad -8\varkappa^5(4+25\varkappa^2+16\varkappa^4)x^{15}\\ \quad -\varkappa^6(144+305\varkappa^2+16\varkappa^4)x^{16}\\ \quad +4\varkappa^7(16+51\varkappa^2+8\varkappa^4)x^{17}+28\varkappa^8(4+\varkappa^2)x^{18}\\ \quad -28\varkappa^9(3+2\varkappa^2)x^{19}-14\varkappa^{10}x^{20}+4\varkappa^9(2+7\varkappa^2)x^{21}\\ \quad -4\varkappa^{10}x^{22}-4\varkappa^{11}x^{23}+\varkappa^{12}x^{24}]^2\end{array}}{X_{48}}.$$

Coefficientes ipsius $x$ in functionibus $X$ obvii omnes sunt expressiones rationales integrae ipsius $\varkappa$, sicuti e theoria algebraica multiplicationis functionum ellipticarum constat. Unde etiam patet expressionem, quae in numeratore ad quadratum elata invenitur quamque supra invenimus $= \Pi\left[1 \pm \varkappa . \sin \operatorname{am} u . \sin \operatorname{coam} \frac{4mK+4m'iK'}{n}\right]$, esse functionem rationalem integram ipsius $x$ et $\varkappa$, qua re concludi potest functiones symmetricas quantitatum $\sin \operatorname{coam} \frac{4mK+4m'iK'}{n}$, ubi ipsi $m$ et $m'$ valores supra dicti tribuuntur, esse functiones rationales integras ipsius $\varkappa$.

## §. 2.

Valores omnes ipsius $\nu$ sive radices aequationis modularis analytice expressae, ut jam dictum est, impetrantur, si in expressione

$$\nu = u^n . [\sin \operatorname{coam} 4\omega . \sin \operatorname{coam} 8\omega \, .... \sin \operatorname{coam} 2(n-1)\omega]$$

pro $\omega$ ponuntur valores:

$$\frac{K}{n}, \; \frac{iK'}{n}, \; \frac{K+iK'}{n}, \; \frac{K+2iK'}{n}, \; .... \; \frac{K+(n-1)iK'}{n}.$$

Cum quibus illos valores, qui secundum Cl. *Jacobi* eruuntur, si in formula 7. *Fund.* pag. 89 quae est

$$(C.)\qquad u = \sqrt{2}.\sqrt[4]{q}.\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots}\right]$$

pro $q$ valores: $q^n$, $q^{\frac{1}{n}}$, $\alpha q^{\frac{1}{n}}$, $\alpha^2 q^{\frac{1}{n}}$, .... $\alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}}$, in quibus $\alpha$ radicem quamlibet aequationis $x^n = 1$ significat, ponuntur congruere jam demonstremus.

$\alpha$) Posito primum $\omega = \frac{K}{n}$, erit:

$$\nu_1 = u^n.\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4K}{n}.\sin\operatorname{coam}\frac{8K}{n}\dots\sin\operatorname{coam}\frac{2(n-1)K}{n}\right]$$

quod idem esse ac si in aequatione $(C.)$ $q^n$ loco $q$ ponimus sequenti modo patet.

Si in *Fund.* pag. 88 formulam cos. am. per $\Delta$ am. dividimus, habemus:

$$\sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}$$
$$= \frac{2}{u^2}\sqrt[4]{q}.\cos x.\frac{(1+2q^2\cos 2x+q^4)(1+2q^4\cos 2x+q^8)(1+2q^6\cos 2x+q^{12})\dots}{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\dots}$$
$$= \frac{2}{u^2}\sqrt[4]{q}.\cos x\,\Pi\frac{1+2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}}{1+2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}},$$

ergo:

$$\nu_1 = u^n.\frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{u^{n-1}}.\sqrt[4]{q}^{\frac{n-1}{2}}.\cos\frac{2\pi}{n}.\cos\frac{4\pi}{n}.\cos\frac{6\pi}{n}\dots\cos\frac{n-1}{\pi}\pi\times$$
$$\Pi\frac{\left(1+2q^{2r}\cos\frac{4\pi}{n}+q^{4r}\right)\left(1+2q^{2r}\cos\frac{8\pi}{n}+q^{4r}\right)\dots\left(1+2q^{2r}\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+q^{4r}\right)}{\left(1+2q^{2r-1}\cos\frac{4\pi}{n}+q^{4r-2}\right)\left(1+2q^{2r-1}\cos\frac{8\pi}{n}+q^{r-2}\right)\dots\left(1+2q^{2r-1}\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+q^{4r-2}\right)}.$$

Cum vero sit secundum theorema Cotesianum:

$$\left(1+2x\cos\frac{4\pi}{n}+x^2\right)\left(1+2x\cos\frac{8\pi}{n}+x^2\right)\dots\left(1+2x\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+x^2\right) = \frac{1+x^n}{1+x}$$

et $\cos\frac{2\pi}{n}.\cos\frac{4\pi}{n}.\cos\frac{6\pi}{n}\dots\cos\frac{n-1}{n}\pi = \pm\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}$, prout $n$ sit $8p\pm1$ aut $8p\pm3$, eruitur

$$\nu_1 = \pm u\sqrt[4]{q^{n-1}}\,\Pi\frac{(1+q^{2nr})(1+q^{2r-1})}{(1+q^{n(2r-1)})(1+q^{2r})}$$

ubi signum multiplicatorium sic intelligendum est ut pro $r$ deinceps 1, 2, 3, .... ad infinitum usque ponatur. Quod si revera fit nec non pro $u$ valor ex aequatione scribitur, prodit:

$$\nu_1 = \pm\sqrt{2}.\sqrt[8]{q^n}.\left[\frac{(1+q^{2n})(1+q^{4n})(1+q^{6n})\dots}{(1+q^n)(1+q^{3n})(1+q^{5n})\dots}\right],$$

ubi positivum signum valet si $n$ est formae $8p\pm 1$, negativum autem pro $n=8p\pm 3$.

$\beta$) Reliquae radices omnes sub hac forma comprehenduntur:

$$(D.)\qquad \nu = u^n.\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4mK+4m'iK'}{n}.\sin\operatorname{coam}\frac{8mK+8m'iK'}{n}\dots\right.$$
$$\left.\dots\sin\operatorname{coam}\frac{2(n-1)mK+2(n-1)m'iK'}{n}\right]$$

si $m'$ aliquem numerorum 1, 2, 3, .... $(n-1)$ significat et $m$ unitatem, hac vero conditione addita, ut pro $m'=1$ sit $m$ ponendum tum $=1$, tum $=0$.

Applicata formula pro sin. coam., qua jam supra usi sumus, fit:

$$(E.)\qquad \nu = 2^{\frac{n-1}{2}}.u.\sqrt[8]{q^{n-1}}.\Pi\left(\cos\left(\frac{2mp\pi}{n}+\frac{2m'pi\pi K'}{nK}\right)\frac{\Pi\left[1+2q^{2r}.\cos\left(\frac{4mp\pi}{n}+\frac{4m'pi\pi K'}{nK}\right)+q^{4r}\right]}{\Pi\left[1+2q^{2r-1}.\cos\left(\frac{4mp\pi}{n}+\frac{4m'pi\pi K'}{nK}\right)+q^{4r-2}\right]}\right)$$

qua in aequatione prius signum multiplicatorium indicat productum esse formandum ex omnibus terminis, qui eruuntur si pro $p$ deinceps 1, 2, 3, .... $\frac{n-1}{n}$ ponuntur, altera vero signa ad $r$ referuntur ita ut pro $r$ sit ponendum 1, 2, 3, .... $\infty$.

Ad productum accuratius dilucidandum adnotabo formulas:

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \tfrac{1}{2}e^{-ix}[1+e^{2ix}]$$

et cum sit $q=e^{-\frac{\pi K'}{K}}$,

$$\frac{1+q^{2r}.\cos 2x+q^{4r}}{1+q^{2r-1}.\cos 2x+q^{4r-2}} = \frac{\left[1+e^{-\frac{2r\pi K'}{K}+2ix}\right].\left[1+e^{-\frac{2r\pi K'}{K}-2ix}\right]}{\left[1+e^{-\frac{(2r-1)\pi K'}{K}+2ix}\right].\left[1+e^{-\frac{(2r-1)\pi K'}{K}-2ix}\right]};$$

quibus adhibitis invenitur:

$$\nu = 2^{\frac{n-1}{2}}.u.\sqrt[8]{q^{n-1}}.\Pi\left\{e^{-\frac{2mpi\pi}{n}+\frac{2m'p\pi K'}{nK}}.\left(1+e^{\frac{4mpi\pi}{n}-\frac{4m'p\pi K'}{nK}}\right)\times\right.$$
$$\left.\frac{\Pi\left[1+e^{-\frac{2r\pi K'}{K}+\frac{4mpi\pi}{n}-\frac{4m'p\pi K'}{nK}}\right].\left[1+e^{-\frac{2r\pi K'}{K}-\frac{4mpi\pi}{n}+\frac{4m'p\pi K'}{nK}}\right]}{\Pi\left[1+e^{-\frac{(2r-1)\pi K'}{K}+\frac{4mpi\pi}{n}-\frac{4m'p\pi K'}{nK}}\right].\left[1+e^{-\frac{(2r-1)\pi K'}{K}-\frac{4mpi\pi}{n}+\frac{4m'p\pi K'}{K}}\right]}\right\}.$$

Jam numerum integrum $s$ determinemus ejusmodi qui satisfaciat congruentiae $2m's\equiv m$ (mod. $n$) aut si placet aequationi $2m's=m+\beta n$, denotante $\beta$ numerum minimum, qui aequationem explere possit, et ponamus $e^{\frac{2si\pi}{n}}=\alpha$, quod $\alpha$ est radix aliqua aequationis $x^n=1$; tum $e^{-\frac{2r\pi K'}{K}\pm\frac{4mpi\pi}{n}\mp\frac{4m'p\pi K'}{nK}}$ aequabit

$$= \left(e^{-\frac{\pi K'}{nK}}\right)^{2nr\pm 4m'p}\left(e^{\frac{2si\pi}{n}}\right)^{2nr\pm 4m'p} = \left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{2nr\pm 4m'p}$$

quoniam est:

$$\left(e^{\frac{2si\pi}{n}}\right)^{2nr} = 1.$$

Ita permutata aequatio ($E.$) formam induit hanc:

$$(F.)\ \nu = u.\sqrt[8]{q^{n-1}}\,\Pi\left\{\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{-2m'p}.\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{4m'p}\right].\frac{\Pi\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{2nr+4m'p}\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{2nr-4m'p}\right]}{\Pi\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{(2r-1)n+4m'p}\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{(2r-1)n-4m'p}\right]}\right\}.$$

Satis vero notum est per expressionem $2nr \pm 4m'p$, ratione signi non habita, omnes numeros pares repraesentari, si pro $r$ omnes numeri $0, 1, 2, 3, \ldots \infty$, pro $p$ vero omnes numeri $0, 1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2}$ ponantur, quum congruentia $\pm 4m'p \equiv 2\gamma$ (mod. $n$), ubi $\gamma$ numerum quemlibet integrum significat, semper solvi possit, idque unico tantum modo si $n$ est numerus primus et $p$ valorem ipso $\frac{n-1}{2}$ majorem assumere nequit. Itaque in numeratore:

$$\Pi\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{2nr+4m'p}\right]\cdot\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{2nr-4m'p}\right]$$

pares potestates omnes inveniuntur, exceptis tum illis, pro quibus $r$ valorem zero assumturum esset, tum illis, quorum exponentes ipsius $2n$ forent multipla; priores autem factore, qui huic producto praefixus est, $\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{4m'p}\right]$ exhibentur et reliquos accipies si numeratorem factoris $u$ ($C.$) uti licet in hunc modum scribis:

$$\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{2n}\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{4n}\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{6n}\right]\ldots.$$

Illos factores, qui potestates negativas continent, ergo hujus formae sunt $\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{2\gamma}\right]$, mutamus in $\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{-2\gamma}\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{2\gamma}\right]$.

Quae in numeratore cum ita sint atque in denominatore res plane similiter se habeat, valorem ipsius $\nu$ sequenti modo scribi licet:

$$\nu = \sqrt{2}.\sqrt[8]{q^n}.\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{-2m'.\frac{n^2-1}{8}}.\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^x.\frac{\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^2\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^4\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^6\right]\ldots.}{\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^3\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^5\right]\ldots.};$$

per $\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^x$ significatur productum omnium factorum, qui in numeratore et in denominatore ex potestatibus negativis nascuntur. Ipsum $x$ functionem esse ipsius $m'$ facile perspicitur cum $x$ valores diversos assumat pro diversis radicibus $\nu$ aut quod ad idem redit pro diverso valore ipsius $m'$. Ponamus

ergo $x = \varphi(m')$, tum erit:

$$(G.)\quad \nu = \sqrt{2}.\sqrt[8]{\left(\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{n^2-2m'(n^2-1)+8.\varphi(m')}\right)}.\frac{\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^2\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^4\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^6\right]\dots}{\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^3\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^5\right]\dots}.$$

Valor ipsius $\nu$, qualis per aequationem ($D.$) repraesentatur, quoniam immutatus remanet, si $m'+zn$, cujus $z$ numerum quemlibet integrum denotat, in locum ipsius $m'$ cedit, inde consequitur, ut expressio ipsius $\nu$ quoque talis, qualem aequatio ($G.$) praebet, permutationi non sit obnoxia ulli, ubi $m'+zn$ pro $m'$ scribitur. Atque cum praeterea vel $\alpha$ in eadem ipsa positione nullam permutationem subeat, aequatio ($G.$) transit in hanc:

$$\nu = \sqrt{2}.\sqrt[8]{\left(\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^{n^2-2zn(n^2-1)-2m'(n^2-1)+8.\varphi(m'+zn)}\right)}.\frac{\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^2\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^4\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^6\right]\dots}{\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^3\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^5\right]\dots}.$$

Ita quidem comparatione facta cum ($G.$) patet
$n^2-2zn(n^2-1)-2m'(n^2-1)+8.\varphi(m'+zn)$ aequare $= n^2-2m'(n^2-1)+8.\varphi(m')$
vel:

$$\varphi(m'+zn)-\varphi(m') = \frac{zn(n^2-1)}{4}$$

vel ex theoremate Tayloriano:

$$\frac{\partial\varphi(m')}{\partial m'}.zn+\frac{\partial^2\varphi(m')}{\partial m'^2}.\frac{z^2n^2}{1.2}+\dots = \frac{zn(n^2-1)}{4},$$

quod per $zn$ divisum posito deinde $z=0$ praebet:

$$\frac{\partial\varphi(m')}{\partial m'} = \frac{n^2-1}{4}.$$

Integratione facta eruitur:

$$\varphi(m') = \frac{m'(n^2-1)}{4}+C.$$

Ut constantem $C$ determinemus, ponimus in ($G.$) $m'=1$, $m=0$, quo fit $\alpha=1$, tunc efficitur:

$$\nu_2 = \sqrt{2}.\sqrt[8]{\left(\left(q^{\frac{1}{n}}\right)^{-n^2+2+8.\varphi(1)}\right)}.\frac{\left[1+q^{\frac{2}{n}}\right].\left[1+q^{\frac{4}{n}}\right].\left[1+q^{\frac{6}{n}}\right]\dots}{\left[1+q^{\frac{1}{n}}\right].\left[1+q^{\frac{3}{n}}\right].\left[1+q^{\frac{5}{n}}\right]\dots},$$

qua in aequatione $\left(q^{\frac{1}{n}}\right)^{\varphi(1)}$ productum esse scimus, quod ex negativis potestatibus, quae insunt in aequatione ($F.$) conflatum est. In qua aequatione ($F.$), statuens $m'$ esse $=1$, $m=0$, ubi factores elegeris, qui negativas in se contineant potestates, non nisi tum, ubi $r=1$ ponitur praetereaque in solo denominatore a fine incipienti tibi sese praebent hi:

$$\left[1+q^{-\frac{n-2}{n}}\right].\left[1+q^{-\frac{n-6}{n}}\right].\left[1+q^{-\frac{n-10}{n}}\right]\dots\begin{cases}\left[1+q^{-\frac{3}{n}}\right] \text{si } n = 4m+1\\ \left[1+q^{-\frac{1}{n}}\right] \text{si } n = 4m-1\end{cases}$$

quorum productum facile hanc formam induit:

$$q^{-\frac{n^2-1}{8n}}.\left[1+q^{\frac{n-2}{n}}\right].\left[1+q^{\frac{n-6}{n}}\right].\left[1+q^{\frac{n-10}{n}}\right]\dots\begin{cases}\left[1+q^{\frac{3}{n}}\right]\\ \left[1+q^{\frac{1}{n}}\right].\end{cases}$$

Factor $q^{-\frac{n^2-1}{8n}}$ ex denominatore in numeratorem translatus gignit:

$$q^{\frac{n^2-1}{8n}} = \left(q^{\frac{1}{n}}\right)^{\varphi(1)},$$

unde producitur:

$$\varphi(1) = \frac{n^2-1}{8};$$

ex quibus colligitur:

$$\varphi(m') = \frac{m'(n^2-1)}{4} - \frac{n^2-1}{8}.$$

Qui valor in aequatione $(G.)$ positus, efficit ut ea transeat in:

$$\nu = \sqrt{2}.\sqrt[8]{\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)}.\frac{\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^2\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^4\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^6\right]\dots}{\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^3\right].\left[1+\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right)^5\right]\dots}.$$

Hinc videmus transformationes singulas quamvis in diverso ordine nos lucrari sive ponamus in valore

$$\nu = u^n.[\sin\operatorname{coam} 4\omega . \sin\operatorname{coam} 8\omega \dots \sin\operatorname{coam} 2(n-1)\omega]$$

pro $\omega$:

$$\frac{K}{n},\quad \frac{iK'}{n},\quad \frac{K+iK'}{n},\quad \frac{K+2iK'}{n},\quad \dots\quad \frac{K+(n-1)iK'}{n}.$$

sive in aequatione $(C.)$:

$$(C.)\qquad u = \sqrt{2}.\sqrt[8]{q}.\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots}\right]$$

pro $q$ scribamus: $q^n$, $q^{\frac{1}{n}}$, $\alpha q^{\frac{1}{n}}$, $\alpha^2 q^{\frac{1}{n}}$, .... $\alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}}$.

Ut denique eluceat, ipsum $\alpha$ suos valores omnes accipere, si pro $m'$ singuli numeri 1, 2, 3, .... $n-1$ ponantur, in memoriam revocare sufficiet a congruentia $2m's \equiv 1$ (mod. $n$) pro certo valore ipsius $m'$ unam tantum solutionem, ipso $n$ minorem admitti, ita ut posito $m' = 1, 2, 3, \dots$ ... $n-1$ pro $s$ expromantur $n-1$ valores ipso $n$ minores, quos omnes inter se diversos esse patet.

3.

Aequatio modularis, quam inter $u$ et $v$ revera locum habere et cujus gradum esse $n+1$ in §" secunda vidimus, pluribus conditionibus accuratius est determinata, quas nunc afferam.

*a*) Forma aequationis est haec:

$$v^{n+1}+C_1v^n+C_2v^{n-1}+C_3v^{n-2}+\cdots+C_nv+C_{n+1} = 0,$$

in qua coefficientes $C_1$, $C_2$, $C_3$, .... sunt functiones rationales integrae ipsius $u$. Terminus constans $C_{n+1}$, uti ex theoria aequationum algebraicarum notum est, productum radicum exprimit, ita ut secundum §. 1. fiat

$$C_{n+1} = u^{n(n+1)}.\Pi\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4mK+4m'iK'}{n}\right],$$

ubi $m$ et $m'$ valores loco citato exactius definitos assumunt. Si vero aequationem 8. per 9. pag. 66 in *Fund.* dividimus nec non radicem, quadraticam extrahimus, habemus

$$\Pi\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4mK+4m'iK'}{n}\right] = \pm\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{nn-1}{4}} = \pm\left(\frac{1}{u}\right)^{nn-1},$$

ergo:

$$C_{n+1} = \pm\left(\frac{1}{u}\right)^{nn-1}.u^{n(n+1)} = \pm u^{n+1}.$$

Ut de signo hujus termini certiores fiamus, forma omnium radicum, secunda excepta, haec est:

$$v = u^n.\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4K+4m'iK'}{n}.\sin\operatorname{coam}\frac{8K+8m'iK'}{n}\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\sin\operatorname{coam}\frac{2(n-1)K+2(n-1)m'iK'}{n}\right]$$

quae expressio, valoribus diversis ipsi $m'$ tributis, signum suum minime mutat, cum $\sin\operatorname{coam} u$ quovis multiplo ipsius $iK'$ ad argumentum $u$ addito signum suum servet. Radices igitur omnes idem signum habeant necesse est, quod est ipsius

$$v_1 = u^n.\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4K}{n}.\sin\operatorname{coam}\frac{8K}{n}\ldots\sin\operatorname{coam}\frac{2(n-1)K}{n}\right].$$

Cum vero sit $\sin\operatorname{coam}(u+K) = -\sin\operatorname{am} u$, in hoc producto illos factores, qui argumentum ipso $K$ majus continent, a ceteris separemus, unde evadit pro $n = 8r+1$ et $= 8r-3$:

$$v_1 = (-1)^{\frac{n-1}{4}}.u^n.\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4K}{n}.\sin\operatorname{coam}\frac{8K}{n}\ldots\sin\operatorname{coam}\frac{(n-1)K}{n}\right]\times$$
$$\left[\sin\operatorname{am}\frac{3K}{n}.\sin\operatorname{am}\frac{7K}{n}\ldots\sin\operatorname{am}\frac{(n-2)K}{n}\right];$$

pro $n = 8r-1$ et $= 8r+3$:

$$\nu_1 = (-1)^{\frac{n+1}{4}}.u.\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4K}{n}.\sin\operatorname{coam}\frac{8K}{n}\ldots\sin\operatorname{coam}\frac{(n-3)K}{n}\right]\times \left[\sin\operatorname{am}\frac{K}{n}.\sin\operatorname{am}\frac{5K}{n}\ldots\sin\operatorname{am}\frac{(n-2)K}{n}\right],$$

qua ex re manifestum est, radicem primam, ideoque reliquas omnes, secunda excepta habere positiva signa pro $n = 8m \pm 1$, negativa vero pro $n = 8m \pm 3$. Radix secunda semper est positiva. Productum ergo radicum omnium sive $C_{n+1}$ erit positivum sive $= +u^{n+1}$, si $n$ habeat formam $8r \pm 1$, et negativum sive $= -u^{n+1}$, si $n = 8r \pm 3$.

*b*) Aequationes modulares, commutatis inter se $\varkappa$ et $\lambda$, immutatas manere ex *Fund.* §. 29. notum est. Exinde idem valere si $u$ et $\nu$ inter se commutentur sponte sequitur, dummodo, quod sub sequenti litera facturi sumus, utrum $\nu$ pro $u$ ipso sit ponendum an pro $u$ negativo, accuratiori examini subjiciamus.

Jam vero ex his concludi potest aequationes respectu tam ad $\nu$ quam ad $u$ ejusdem gradus esse ita ut coefficientes $C_1$, $C_2$, $C_3$, .... altiorem potestatem ipsius $u$, quam $(n+1)^{\text{tam}}$ continere nequeant, cum summa potestas ipsius $\nu$ sit $(n+1)^{\text{ta}}$. Hi coefficientes habent adeo formam certam hanc: $u^m.(\alpha+\beta u^8+\gamma u^{16}+\delta u^{24}+\cdots)$, ubi in parenthesi illae tantum potestates ipsius $u$ inveniuntur, quarum exponentes per 8 divisibiles sunt. Quod ut probetur ex *Fund.* pag. 89 formulam 7. in usum nostrum liceat convertere

$$\sqrt[4]{\varkappa} = u = \sqrt[8]{2}.\sqrt{q}.\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots.}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots.}\right]$$
$$= \sqrt{2}.\sqrt[8]{q}.[1-q+2q^2-3q^3+4q^4-6q^5+9q^6-12q^7+\cdots]$$
$$= \sqrt{2}.\sqrt[8]{q}.[f(q)]$$

ergo:

$$u^2 = 2.\sqrt[8]{q^2}.[f(q)]^2,$$
$$u^3 = 2.\sqrt{2}.\sqrt[8]{q^3}.[f(q)]^3,$$
$$u^4 = 4.\sqrt[8]{q^4}.[f(q)]^4,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u^8 = 16.q.[f(q)]^8,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u^{n+1} = \sqrt{2^{n+1}}.\sqrt[8]{q^{n+1}}.[f(q)]^{n+1} = \sqrt{2^{n+1}}.q^r.\sqrt[8]{q^t}.[f(q)]^{n+1}$$

ubi $n+1 = 8s+t$ positum est, unde pro $n = 8r+1$ fit $t = 2$,
- $n = 8r+3$ - $t = 4$,
- $n = 8r-1$ - $t = 0$,
- $n = 8r-3$ - $t = 6$.

In paragrapho secundo unum valorem ipsius $\nu$ vidimus erui si in valore ipsius $u$ modo allato $q^n$ loco $q$ ponatur, quo facto impetramus:

$$\nu = \pm\sqrt{2}.\sqrt[8]{q^n}.[f(q^n)],$$
$$\nu^2 = 2 . \sqrt[8]{q^{2n}}.[f(q^n)]^2,$$
$$\nu^3 = \pm 2\sqrt{2}.\sqrt[8]{q^{3n}}.[f(q^n)]^3,$$
$$\nu^4 = 4 . \sqrt[8]{q^{4n}}.[f(q)^n]^4,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\nu^8 = 16 . \quad q^n.[f(q^n)]^8,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\nu^{n+1} = \sqrt{2^{n+1}}.\sqrt[8]{q^{n(n+1)}}.[f(q^n)]^{n+1} = \sqrt{2^{n+1}}.q^{s'}.\sqrt[8]{q^t}.[f(q^n)]^{n+1},$$

qui exponens $t$ ipsius $q$ sub signo radicali ab illo $t$ in valore ipsius $u^{n+1}$ differre nequit, cum facile intelligatur numerum $n(n+1)$ per 8 divisum, si $n$ ut impar numerus ponitur, idem residuum habere ac $(n+1)$. Ubi signa duplicia apposita inveniuntur, superius valet pro $n = 8m\pm 1$, inferius pro $n = 8m\pm 3$.

Si in aequatione modulari, quae jam tanquam perfecte composita statuenda est pro $u$ et $\nu$ valores modo dicti ponuntur, termini qui ex $\nu^{n+1}$ et $u^{n+1}$ nascuntur eandem quantitatem irrationalem $\sqrt[8]{q^t}$ continent neque aliam reliqui omnes termini debent involvere ne quis coëfficientium in aequatione per hanc irrationalitatem divisa irrationalis restet. Potestas igitur quaedam $u^m$ in talem tantum potestatem $\nu^p$ ducta inveniri potest ut $m+p \equiv t$ (mod. 8) fiat; ideo coefficiens $C$ potestatis $\nu^p$ in universum habet formam hanc: $\alpha u^m + \beta u^{m+8} + \gamma u^{m+16} + \delta u^{m+24} + \cdots$

*c*) Haec productum quod ex prima potestate ipsius $u$ et prima potestate ipsius $\nu$ formatur in unaquaque aequatione modulari necessario inesse debere satis demonstrant. Tria igitur membra adhuc definita hanc aequationis formam produnt:

$$\nu^{n+1} + \cdots + \alpha u \nu \pm u^{n+1} = 0.$$

Cum vero $\varkappa$ et $\lambda$ inter se commutatis, quo aequationis mutationem quampiam fieri non licet, terminus $\alpha u \nu$ in se ipsum redire debeat, facile per-

spicitur *pro* $n = 8m + 1$ *aut* $n = 8m - 1$, cum in ultimo termino aequationis superius signum valeat, u *et* $\nu$ *ipsa esse inter se commutanda, pro* $n = 8m + 3$ *aut* $n = 8m - 3$, ubi negativum signum locum habet, u *esse ponendum loco* $\nu$, *loco* u *autem* $-\nu$; nullo enim alio pacto terminus $\alpha u \nu$ signum suum servare potest.

*d*) Ex illa observatione, quod aequatio modularis $u$ et $\nu$ inter se commutatis immutata manet, *coefficientes terminorum* $u^m \nu^p$ *et* $u^p \nu^m$ *aequales esse* sponte sequitur, *hac vero conditione adjecta ut eorum signa sint contraria, si* n *habeat formam* $8r \pm 3$ *et* p *sit in numeris paribus.*

*e*) Ex alia nota proprietate (*Fund.* pag. 31) aequationes modulares immutatae manent, si loco $u$, $\nu$ ponatur $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{\nu}$ unde *coefficientes terminorum* $u^m.\nu^p$ *et* $u^{n+1-m}.\nu^{n+1-p}$ *non diversos esse* patet. Inde sequitur hoc theorema: *Si aequationem secundum potestates descendentes ipsius* $\nu$ *et factores singulorum terminorum secundum potestates ascendentes ipsius* u *ordinaveris, in terminis qui aeque longo intervallo ab initio atque a fine distant, aequales habebis coefficientes, qui vero pro* $n = 8r \pm 3$ *contrario signo affecti sunt.*

*f*) Posito $u = 1$, fit etiam $\nu = 1$ et tali quidem modo ut pro $n = 8r \pm 1$ omnes $(n + 1)$ valores ipsius $\nu$ fiant $= +1$, pro $n = 8r \pm 3$ vero $n$ valores $= -1$, unicus $= +1$. Expressiones enim ipsius $\nu$ comprehenduntur in hac forma:

$$\nu = u^n.\left[\sin\operatorname{coam}\frac{4mK + 4m'iK'}{n}.\sin\operatorname{coam}\frac{8mK + 8m'iK'}{n}\dots\right.$$
$$\left.\dots\sin\operatorname{coam}\frac{2(n-1)mK + 2(n-1)m'iK'}{n}\right];$$

pro $\sin\operatorname{coam}\frac{4mK + m'iK'}{n}$ vero scribi licet

$$\sin\operatorname{am}\frac{(n - 4mp)K - 4m'piK'}{n} = i.\operatorname{tang}\operatorname{am}\left[\frac{n - 4mp}{n}.\frac{K}{i} - \frac{4m'p}{n}.K'\right] \;(\text{mod. } \varkappa').$$

Posito autem $u = 1$, unde $\varkappa = 1$, $\varkappa' = 0$ transit tang am $w$ (mod. $\varkappa'$) in tang $w$; ideoque fit:

$$i.\operatorname{tang}\operatorname{am}\left[\frac{n-4mp}{n}.\frac{K}{i} - \frac{4m'p}{n}.K'\right] \;(\text{mod. } \varkappa') = i.\operatorname{tang}\left[\frac{n-4mp}{n}.\frac{K}{i} - \frac{4m'p}{n}.K'\right]$$
$$= \frac{e^{\frac{n-4mp}{n}.K - \frac{4m'p}{n}.iK'} - e^{-\frac{n-4mp}{n}.K + \frac{4m'p}{n}.iK'}}{e^{\frac{n-4mp}{n}.K - \frac{4m'p}{n}.iK'} + e^{-\frac{n-4mp}{n}.K + \frac{4m'p}{n}.iK'}} = \frac{1 - e^{-\frac{2(n-4mp)}{n}.K + \frac{8m'p}{n}.iK'}}{1 + e^{-\frac{2(n-4mp)}{n}.K + \frac{8m'p}{n}.iK'}},$$

cum vero pro $\varkappa' = 0$ sit $K = \infty$ et $K' = \frac{\pi}{2}$, efficitur

$$i.\operatorname{tang\,am}\left[\frac{n-4mp}{n}.\frac{K}{i} - \frac{4m'p}{n}.K'\right] \text{(mod. 0)} = 1;$$

ergo etiam $\nu$ ad unitatem reducitur, de cujus signo idem prorsus valet, quod sub lit. *a.* hujus §[i] diximus. Hinc patet *aequationem modularem, ubi ponas* $u = 1$, *pro* $n = 8r \pm 1$ *transire in* $(\nu - 1)^{n+1} = 0$ *et pro* $n = 8r \pm 3$ *in* $(\nu + 1)^n.(\nu - 1) = 0$. Inde summa coefficientium, quibus diversae potestates ipsius $u$ affectae sunt, in quoque termino aequationis secundum potestates ipsius $\nu$ ordinatae cognoscitur, ita ut singuli quique coefficientes e reliquis determinari possint. Summa enim coefficientium termini $\nu^p$:

$$\text{pro } n = 8r \pm 1 \text{ erit } = (-1)^p.P_{n+1}^{n+1-p},$$
$$\text{- } n = 8r \pm 3 \text{ - } = [P_n^{n+1-p} - P_n^{n-p}],$$

ubi in universum per $P_m^s$ coefficientem termini $(s+1)^{ti}$ in evolutione $m^{tae}$ potestatis binomii cujusvis significamus.

## §. 4.

His conditionibus rite perpensis et collectis aequationes modulares facili negotio derivantur. Exstant vero duae methodi ad aequationes obtinendas aptae, quarum alteram paucis tantum verbis adumbrare et uno tantummodo exemplo illustrare est animus, quia calculus prolixior est quam in altera.

Coefficientes aequationis modularis quae secundum §. 3. lit. *b.* formam sequentem habet

$$\nu^{n+1} + u^s \nu^n(\alpha + \beta u^8 + \gamma u^{16} + \ldots.) + u^{s'} \nu^{n-1}(\alpha' + \beta' u^8 + \gamma' u^{16} + \ldots.) \ldots. \pm u^{n+1} = 0$$

hoc modo se accuratius definitos praebent.

Signum ultimi termini ex §. 3. lit. *a.* determinatur. Secundum §. 3. lit. *d.* termini $u^m.\nu^p$ et $u^p.\nu^m$, secundum §. 3. lit. *e.* termini, qui ab initio atque a fine aeque distant aequales habent factores, ex §. 3. lit. *f.* summa coefficientium cujuscunque termini definitur.

Ex his numerum coefficientium determinandorum valde minui manifestum est. Si igitur aequationem aliquam revera calculo indagare volumus primo loco ex §. 3. lit. *b.* scimus quaenam potestates ipsius $u$ et $\nu$ in singulis quibusque terminis contineantur nec non plures conditiones quas inter horum coefficientes intercedere e modo dictis elucet; deinde ponamus pro $u$ et $\nu$ valores (ex §. 3. lit. *b.*) in series infinitas evolutos. Summa coefficientium uniuscujusque potestatis ipsius $q$ ipsi zero aequiposita aequa-

tiones suppeditat conditionales inter factores terminorum aequationis modularis ex quibus conditionibus hi factores derivari possunt.

Potestates ipsius $u$ aut serie

$$u = \sqrt{2}.\sqrt[8]{q}.[1-q+2q^2-3q^3+4q^4-6q^5+9q^6-12q^7+\ldots]$$

in potestates suas elata inveniendae sunt aut singuli termini potestatum e theoremate polynomico. quod dicitur derivandi.

Calculo satis prolixo potestates ipsius $u$ ad vicesimam usque formavi, quas ad alium etiam usum aptas hic apponam. Hae potestates sunt:

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{\varkappa} = u = \sqrt{2}.\sqrt[8]{q}.\{&1-q+2q^2-3q^3+4q^4-6q^5+9q^6-12q^7+16q^8-22q^9\\
&+29q^{10}-38q^{11}+50q^{12}-64q^{13}+82q^{14}-105q^{15}+132q^{16}\\
&-166q^{17}+208q^{18}-258q^{19}+320q^{20}-395q^{21}+484q^{22}\\
&-592q^{23}+722q^{24}-876q^{25}+1060q^{26}-\ldots\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^2 = 2\sqrt[8]{q^2}.\{&1-2q+5q^2-10q^3+18q^4-32q^5+55q^6-90q^7+144q^8-226q^9\\
&+346q^{10}-522q^{11}+777q^{12}-1138q^{13}+1648q^{14}-2362q^{15}\\
&+3348q^{16}-4704q^{17}+6554q^{18}-9056q^{19}+12425q^{20}-16932q^{21}\\
&+\ldots\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^3 = 2\sqrt{2}.\sqrt[8]{q^3}.\{&1-3q+9q^2-22q^3+48q^4-99q^5+194q^6-363q^7+657q^8\\
&-1155q^9+1977q^{10}-3312q^{11}+5443q^{12}-8787q^{13}+13968q^{14}\\
&-21894q^{15}+33873q^{16}-51795q^{17}+78345q^{18}-117412q^{19}\\
&+174033q^{20}-255945q^{21}+\ldots\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^4 = 4.\sqrt[8]{}.q^4.\{&1-4q+14q^2-40q^3+101q^4-236q^5+518q^6-1080q^7+2162q^8\\
&-4180q^9+7840q^{10}-14328q^{11}+25591q^{12}-44776q^{13}+76918q^{14}\\
&-129952q^{15}+216240q^{16}-354864q^{17}+574958q^{18}-\ldots\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^5 = 4\sqrt{2}.\sqrt[8]{q^5}.\{&1-5q+20q^2-65q^3+185q^4-481q^5+1165q^6-2665q^7\\
&+5820q^8-12220q^9+24802q^{10}-48880q^{11}+93865q^{12}\\
&-176125q^{13}+323685q^{14}-583798q^{15}+1035060q^{16}\\
&-1806600q^{17}+3108085q^{18}-\ldots\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^6 = \sqrt[8]{q^6}.\{&1-6q+27q^2-98q^3+309q^4-882q^5+2330q^6-5784q^7+13644q^8\\
&-30826q^9+67107q^{10}-141444q^{11}+289746q^{12}-578646q^{13}\\
&+1129527q^{14}-2159774q^{15}+4052721q^{16}-7474806q^{17}\\
&+3108085q^{18}-\ldots\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^7 = 8\sqrt{2}.\sqrt[8]{q^7}.\{&1-7q+35q^2-140q^3+483q^4-1498q^5+4277q^6-11425q^7\\
&+28889q^8-69734q^9+161735q^{10}-362271q^{11}+786877q^{12}\\
&-1662927q^{13}+3428770q^{14}-6913760q^{15}+13660346q^{16}\\
&-26492361q^{17}+50504755q^{18}-\ldots\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^8 = 16.q.\{1 &- 8q + 44q^2 - 192q^3 + 718q^4 - 2400q^5 + 7352q^6 - 20992q^7 \\
&+ 56549q^8 - 145008q^9 + 356388q^{10} - 844032q^{11} + 1934534q^{12} \\
&- 4306368q^{13} + 9337704q^{14} - 19771392q^{15} + 40965362q^{16} \\
&- 83207976q^{17} + 165944732q^{18} - \ldots\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^9 = 16\sqrt{2}.q\sqrt[8]{q}.\{1 &- 9q + 54q^2 - 255q^3 + 1026q^4 - 3672q^5 + 11997q^6 \\
&- 36414q^7 + 103977q^8 - 281911q^9 + 730953q^{10} \\
&- 1822689q^{11} + 4390824q^{12} - 10256508q^{13} + 23303025q^{14} \\
&- 51631227q^{15} + 111804966q^{16} - 237074742q^{17} \\
&+ 493063403q^{18} - \ldots\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{10} = 32.q\sqrt[8]{q^2}.\{1 &- 10q + 65q^2 - 330q^3 + 1420q^4 - 5412q^5 + 18765q^6 - 60270q^7 \\
&+ 181645q^8 - 518660q^9 + 1413465q^{10} - 3697960q^{11} \\
&+ 9331565q^{12} - 22800050q^{13} + 54112825q^{14} - 125090220q^{15} \\
&+ 282298020q^{16} - 623185010q^{17} + 1348033540q^{18} - \ldots\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{11} = 32\sqrt{2}.q\sqrt[8]{q^3}.\{1 &- 11q + 77q^2 - 418q^3 + 1914q^4 - 7733q^5 + 28336q^6 \\
&- 95931q^7 + 304062q^8 - 911240q^9 + 2601786q^{10} \\
&- 7120136q^{11} + 18766759q^{12} - 47830486q^{13} \\
&+ 118270746q^{14} - 284527793q^{15} + 667553898q^{16} \\
&- 1530587256q^{17} + 3435726536q^{18} - \ldots\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{12} = 64q\sqrt[8]{q^4}.\{1 &- 12q + 90q^2 - 520q^3 + 2523q^4 - 10764q^5 + 41534q^6 \\
&- 147720q^7 + 490869q^8 - 1539472q^9 + 4592430q^{10} \\
&- 13111632q^{11} + 36006362q^{12} - 95497116q^{13} + 245457000q^{14} \\
&- 613183064q^{15} + 1492474572q^{16} - 3546915228q^{17} \\
&+ 8245677110q^{18} - \ldots\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{13} = 64\sqrt{2}.q\sqrt[8]{q^5}.\{1 &- 13q + 104q^2 - 637q^3 + 3263q^4 - 14651q^5 + 59345q^6 \\
&- 221091q^7 + 768131q^8 - 2514551q^9 + 7818200q^{10} \\
&- 23233535q^{11} + 66328964q^{12} + 182681916q^{13} \\
&- 487098378q^{14} - 1261118313q^{15} + 3178449222q^{16} \\
&- 7815313766q^{17} + 18783535199q^{18} - \ldots\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{14} = 128.q\sqrt[8]{q^6}.\{1 &- 14q + 119q^2 - 770q^3 + 4151q^4 - 19558q^5 + 82936q^6 \\
&- 322828q^7 + 1169847q^8 - 3988292q^9 + 12896562q^{10} \\
&- 39809574q^{11} + 117921321q^{12} - 336630840q^{13} \\
&+ 929461993q^{14} - 2489690882q^{15} + 6486711301q^{16} \\
&- 16475721276q^{17} + 40874694490q^{18} - \ldots\},
\end{aligned}$$

$$u^{15} = 128\sqrt{2}\,.\,q\sqrt[8]{q^7}\;\{1-15q+135q^2-920q^3+5205q^4-25668q^5+113675q^9$$
$$-461265q^7+1739710q^8-6164345q^9+20690964q^{10}$$
$$-66222405q^{11}+203173760q^{12}-600165795q^{13}$$
$$+1713196575q^{14}-4740491107q^{15}+12748926285q^{16}$$
$$-33400680615q^{17}+85415669230q^{18}-\ldots\},$$

$$u^{16} = 256\;q^2.\,\{1-16q+152q^2-1088q^3+6444q^4-33184q^5+153152q^6$$
$$-646528q^7+2533070q^8-9311664q^9+32337616q^{10}$$
$$-107299904q^{11}+340436664q^{12}-1039026144q^{13}$$
$$+3061896704q^{14}-8739810688q^{15}+24229115109q^{16}$$
$$-65390485328q^{17}+172155210320q^{18}-\ldots\},$$

$$u^{17} = 256\sqrt{2}\,.\,q^2\sqrt[8]{q}\,.\,\{1-17q-170q^2-1275q^3+7888q^4-42330q^5$$
$$+203201q^6-890800q^7+3619334q^8-13780540q^9$$
$$+49590581q^{10}-169812320q^{11}+556366922q^{12}$$
$$-1752038020q^{13}+5323089708q^{14}-15653783345q^{15}$$
$$+44679433473q^{16}-124069449335q^{17}$$
$$+335888162944q^{18}-\ldots\},$$

$$u^{18} = 512\,.\,q^2\sqrt[8]{q^2}\,.\,\{1-18q+189q^2-1482q^3+9558q^4-53352q^5+265923q^6$$
$$-1208610q^7+5084478q^8-20021534q^9+74438388q^{10}$$
$$-263104686q^{11}+889020813q^{12}-2884990266q^{13}$$
$$+9026077050q^{14}-27314626158q^{15}+8017703378q^{16}$$
$$-228831885054q^{17}+636376573943q^{18}-\ldots\},$$

$$u^{19} = 512\sqrt{2}\,.\,q^2\sqrt[8]{q^3}\,.\,\{1-19q+209q^2-1710q^3+11476q^4-66519q^5$$
$$+343710q^6-1617147q^7+7034047q^8-28607673q^9$$
$$+109745767q^{10}-\ldots\},$$

$$u^{20} = 1024\,.\,q^2\sqrt[8]{q^4}\,.\,\{1-20q+230q^2-1960q^3+13665q^4-82124q^5+439270q^6$$
$$-2136600q^7+9596460q^8-40260300q^9+159174524q^{10}$$
$$+\ldots\}.$$

## §. 5.

**Exempli loco, secundum quod aequatio modularis cujusvis ordinis deduci possit, calculum pro aequatione decimi tertii ordinis determinanda per partes consumatum addam.**

**Habemus nimirum ex §. 3. lit. *b*.**

$$u = \sqrt{2}\,.\sqrt[8]{q}\,.[f(q)], \qquad v = -\sqrt{2}\,.\,q\,.\sqrt[8]{q^5}\,.[f(q^{13})],$$
$$u^2 = 2\,.\sqrt[8]{q^2}\,.[f(q)]^2, \qquad v^2 = +\;2\,.\,q^3\,.\sqrt[8]{q^2}\,.[f(q^{13})]^2,$$

$$u^3 = 2\sqrt{2}.\ \sqrt[8]{q^3}.[f(q)]^3, \qquad \nu^3 = -\ 2\sqrt{2}.q^4.\sqrt[8]{q^7}.[f(q^{13})]^3,$$
$$u^4 = 4.\ \sqrt[8]{q^4}.[f(q)]^4, \qquad \nu^4 = +\ 4.q^6.\sqrt[8]{q^4}.[f(q^{13})]^4,$$
$$u^5 = 4\sqrt{2}.\ \sqrt[8]{q^5}.[f(q)]^5, \qquad \nu^5 = -\ 4\sqrt{2}.q^8.\sqrt[6]{q}.[f(q^{13})]^5,$$
$$u^6 = 8.\ \sqrt[8]{q^6}.[f(q)]^6, \qquad \nu^6 = +\ 8.q^9.\sqrt[6]{q^6}.[f(q^{13})]^6,$$
$$u^7 = 8\sqrt{2}.\ \sqrt[8]{q^7}.[f(q)]^7, \qquad \nu^7 = -\ 8\sqrt{2}.q^{11}.\sqrt[8]{q^3}.[f(q^{13})]^7,$$
$$u^8 = 16\ .\ q.[f(q)]^8, \qquad \nu^8 = +\ 16.q^{13}\ .\ [f(q^{13})]^8,$$
$$u^9 = 16\sqrt{2}.q\sqrt[8]{q}.[f(q)]^9, \qquad \nu^9 = -16\sqrt{2}.q^{14}.\sqrt[8]{q^5}.[f(q^{13})]^9,$$
$$u^{10} = 32.q\sqrt[8]{q^2}.[f(q)]^{10}, \qquad \nu^{10} = +\ 32.q^{16}.\sqrt[8]{q^2}.[f(q^{13})]^{10},$$
$$u^{11} = 32\sqrt{2}.q\sqrt[8]{q^3}.[f(q)]^{11}, \qquad \nu^{11} = -32\sqrt{2}.q^{17}.\sqrt[8]{q^7}.[f(q^{13})]^{11},$$
$$u^{12} = 64.q\sqrt[8]{q^4}.[f(q)]^{12}, \qquad \nu^{12} = +\ 64.q^{19}.\sqrt[8]{q^4}.[f(q^{13})]^{12},$$
$$u^{13} = 64\sqrt{2}.q\sqrt[8]{q^5}.[f(q)]^{13}, \qquad \nu^{13} = -64\sqrt{2}.q^{21}.\sqrt[8]{q}.[f(q^{13})]^{13},$$
$$u^{14} = 128.q\sqrt[8]{q^6}.[f(q)]^{14}, \qquad \nu^{14} = +\ 128.q^{22}.\sqrt[8]{q^6}.[f(q^{13})]^{14},$$

Quoniam potestas $\nu^{14}$ quantitatem irrationalem $\sqrt[8]{q^6}$ continet ex lit. *b.* §ⁱ 3. scimus tales tantum potestates ipsius $u$ et $\nu$ conjunctim positas in aequatione inveniri posse, quae eandem quantitatem irrationalem faciant, unde pro aequatione modulari decimi tertii ordinis sequens forma evadit:

$$\begin{aligned}\nu^{14} &+ \nu^{13}u^5(\alpha_1+\alpha_2u^8)+\nu^{12}u^2(\beta_1+\beta_2u^8)+\gamma\nu^{11}u^7+\nu^{10}u^4(\delta_1+\delta_2u^8)\\ &+\nu^9u(\varepsilon_1+\varepsilon_2u^8)+\zeta\nu^8u^6+\nu^7u^3(\eta_1+\eta_2u^8)+\theta\nu^6u^8+\nu^5u^5(\iota_1+\iota_2u^8)\\ &+\nu^4u^2(\varkappa_1+\varkappa_2u^8)+\lambda\nu^3u^7+\nu^2u^4(\mu_1+\mu_2\iota^8)+\nu u(\nu_1+\nu_2u^8)-u^{14}=0.\end{aligned}$$

Ultimus terminus hujus aequationis habet secundum lit. *a.* §ⁱ 3. signum negativum, quoniam 13 est numerus formae $8r-3$.

Ex lit. *d.* §ⁱ 3. sequuntur:

$$\iota_2-\alpha_1;\quad \mu_2=-\beta_1;\quad \delta_2=-\beta_2;\quad \eta_2=\gamma;\quad \varkappa_2=-\delta_1;\quad \nu_2=\varepsilon_1;$$
$$\theta=-\zeta;\quad \lambda=\eta_1;\quad \mu_1=-\varkappa_1.$$

Ex lit. *e.* §ⁱ 3. sequuntur:

$$\nu_2=-\alpha_1;\quad \nu_1=-\alpha_2;\quad \mu_2=-\beta_1;\quad \mu_1=-\beta_2;\quad \lambda=-\gamma;\quad \varkappa_2=-\delta_1;$$
$$\varkappa_1=-\delta_2;\quad \iota_2=-\varepsilon_1;\quad \iota_1=-\varepsilon_2;\quad \theta=-\zeta;\quad \eta_2=-\eta_1.$$

Ex lit. *f.* §ⁱ 3. sequitur aequationem, ubi in ea $u=1$ ponitur, transire in $(\nu+1)^{13}(\nu-1)=0$ sive in

$$\begin{aligned}\nu^{14}&+12\nu^{13}+65\nu^{12}+208\nu^{11}+429\nu^{10}+572\nu^9+429\nu^8-429\nu^6-572\nu^5\\ &-429\nu^4-208\nu^3-65\nu^2-12\nu-1 = 0.\end{aligned}$$

Quae cum aequatione antecedente comparata has praebet aequationes conditionales:

$$\alpha_1+\alpha_2=12;\quad \beta_1+\beta_2=65;\quad \gamma=208;\quad \delta_1+\delta_2=429;\quad \varepsilon_1+\varepsilon_2=572;$$
$$\zeta=429;\quad \eta_1+\eta_2=0.$$

Ex his elucet aequationem posse scribi sequenti modo:

$$\begin{aligned}
&\nu^{14}+\nu^{13}u^5.[(12-\alpha_2)+\alpha_2 u^8]+\nu^{12}u^2[(65-\beta_2)+\beta_2 u^8]\\
&\quad+208\nu^{11}u^7+\nu^{10}u^4[(429+\beta_2)-\beta_2 u^8]-\nu^9 u[(12-\alpha_2)-(584-\alpha_2)u^8]\\
&\quad+429\nu^8 u^6-\nu^7 u^3(208-208u^8)-429\nu^6 u^8-\nu^5 u^5[(584-\alpha_2)-(12-\alpha_2)u^8]\\
&\quad+\nu^4 u^2[\beta_2-(429+\beta_2)u^8]-208\nu^3 u^7-\nu^2 u^4[\beta_2+(65-\beta_2)u^8]\\
&\quad-\nu u[\alpha_2+(12-\alpha_7)u^8]-u^{14}=0.
\end{aligned}$$

Restant igitur duo tantum coefficientes determinandi: $\alpha_2$ et $\beta_2$. Ut hi determinentur pro diversis potestatibus ipsius $u$ ponimus valores, quos in §° antecedente dedimus; pro $\nu$ vero quod est

$$=-\sqrt{2}.q\sqrt[8]{q^5}.[1-q^{13}+2q^{26}-3q^{39}+\ldots.],$$

scribere sufficit $-\sqrt{2}.q\sqrt[8]{q^5}$, quoniam reliqui ejus termini potestates continent decima tertia majores. Eruitur ergo:

$$\left.\begin{aligned}
-\qquad u^{14} &= \qquad 128\,[-q+14q^2-119q^3+\ldots.]\\
-(12-\alpha_2)\nu u^9 &= (12-\alpha_2).32\,[\qquad\quad q^2-\ \ 9q^3+\ldots.]\\
-\qquad \alpha_2.\nu u &= \qquad \alpha_2.\ 2\,[\ q-\quad q^2+\ \ 2q^3+\ldots.]\\
-\qquad \beta_2.\nu^2 u^4 &= \qquad \beta_2.\ 8\,[\qquad\qquad -\quad q^3+\ldots.]
\end{aligned}\right\}=0.$$

Reliquos aequationis terminos omnes omitti licet, quoniam infimae potestates ipsius $q$, quae in iis continentur, tertiam superant, ex qua jam $\beta_2$ determinari potest. Additione facta et coefficientibus singularum potestatum ipsius $q$ ipsi zero aequipositis evadunt aequationes:

$$-128+2\alpha_2=0,$$
$$-119.128-9.32(12-\alpha_2)+4\alpha_2-8\beta_2=0,$$

ex quibus deducitur:

$$\alpha_2=64;\quad \beta_2=0;$$

unde denique aequatio modularis decimi tertii ordinis eruitur sequens:

$$\begin{aligned}
&\nu^{14}-4\nu^{13}u^5(13-16u^8)+65\nu^{12}u^2+208\nu^{11}u^7+429\nu^{10}u^4+52\nu^9 u(1+10u^8)\\
&\quad+429\nu^8 u^6-208\nu^7 u^3(1-u^8)-429\nu^6 u^8-52\nu^5 u^5(10+u^8)-429\nu^4 u^{10}\\
&\quad 208\nu^3 u^7-65\nu^2 u^{12}-4\nu u(16-13u^8)-u^{14}=0.
\end{aligned}$$

Nota. Facile intelligitur infimam potestatem ipsius $q$, quae in aequatione quavis modulari inveniri possit in duobus tantum terminis in series evolutis contineri posse, in his dico: $u^{n+1}$ et $\alpha.u\nu$, qui posito $n+1=8s+t$ praebent:

$$2^{\frac{n+1}{2}}.[q^{\prime}+\ldots.], \qquad \alpha.2.[q^{\prime}+\ldots.];$$

qua ex re concluditur aequationem conditionalem, ex qua coefficiens ipsius $u\nu$ determinetur, esse hanc:

$$2\alpha = -(2)^{\frac{n+1}{2}}, \text{ ergo: } \alpha = -(2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

§. 6.

Altera methodus coefficientes inveniendi in eo nititur quod coefficientes cujusvis aequationis algebraicae ex summis potestatum radicum componi possunt. Habemus enim, ut omnibus notum est, in aequatione:

$$\nu^{n+1}+C_1\nu^n+C_2\nu^{n-1}+\cdots+C_n\nu\pm u^{n+1} = 0,$$

ad coefficientes determinandos has aequationes conditionales:

$$S_1+C_1 = 0,$$
$$S_2+C_1S_1+2C_2 = 0,$$
$$S_3+C_1S_2+C_2S_1+3C_3 = 0,$$
$$S_4+C_1S_3+C_2S_2+C_3S_1+4C_4 = 0$$

et cetera,

ubi per $S_m$ significatur summa $m^{\text{tarum}}$ potestatum radicum.

Si $q=r^8$ et

$$\frac{(1+r^{16})(1+r^{32})(1+r^{48})\ldots.}{(1+r^8)(1+r^{24})(1+r^{40})\ldots.} = 1+A_1r^8+A_2r^{16}+A_3r^{24}+\ldots. = f(r^8)$$

ponimus, fit secundum *Fund.* pag. 89, 7.

$$u = \sqrt{2}.r.f(r^8).$$

Si $n$ est numerus primus, impetramus secundum §. 2. omnes $(n+1)$ valores ipsius $\nu$ hos:

$$\pm\sqrt{2}.r^n.f(r^{8n}) \quad \text{et} \quad \sqrt{2}.r^{\frac{1}{n}}.f\left(r^{\frac{8}{n}}\right),$$

si pro $r^{\frac{1}{n}}$ omnes ejus valores in numero $n$ ponuntur. Quod ad primam radicem attinet, utrum signum positivum an negativum sit sumendum; ea quaestio jam supra §. 2. lit. $\alpha$. absoluta est. Erit ergo:

$$S_1(\nu) = \sqrt{2}.\left[\pm r^n.f(r^{8n})+\Sigma r^{\frac{1}{n}}.f\left(r^{\frac{8}{n}}\right)\right],$$

in qua expressione illi tantum termini sumendi sunt, qui irrationalitatem non continent, quoniam ex §. 1. scimus aequationis coefficientes omnes ergo etiam $S$ functiones esse rationales ipsius $u$ ideoque ipsius $r'$. Si igitur $\alpha$ et $\beta$ tali modo determinamus ut sit $8\alpha_1+1=n.\beta_1$, habemus

$$S_1(\nu)=\sqrt{2}.[\pm r^n.f(r^{8n})+n(A_{\alpha_1}.r^{\beta_1}+A_{\alpha_1+n}.r^{\beta_1+8}+A_{\alpha_1+2n}.r^{\beta_1+16}+\ldots.)].$$

$$\begin{array}{lcccccccccc} \text{Pro} & n & = & 3, & 5, & 7, & 11, & 13, & 17, & 19, & \dots \\ \text{fiunt:} & \alpha_1 & = & 1, & 3, & 6, & 4, & 8, & 2, & 7, & \dots \\ \text{et} & \beta_1 & = & 3, & 5, & 7, & 3, & 5, & 1, & 3, & \dots \end{array}$$

Exponentes $\beta_1$, $\beta_1+8$, $\beta_1+16$, .... tantum ad illum usque valorem continuare opus est, qui minime ab $n$ differt et ipsius $f(r^{8n})$ primus tantum terminus qui unitatem aequat sumendus est quoniam sequentes termini potestates $n^{\text{ta}}$ superiores continent.

Hinc nanciscimur:

$$\begin{array}{llll} \text{pro:} & n = 3, & S_1^{(3)}\nu & = \sqrt{2}.[-1+3A_1]r^3, \\ - & n = 5, & S_1^{(5)}\nu & = \sqrt{2}.[-1+5A_3]r^5, \\ - & n = 7, & S_1^{(7)}\nu & = \sqrt{2}.[+1+7A_6]r^7, \\ - & n = 11, & S_1^{(11)}\nu & = \sqrt{2}.[11A_4+(-1+11A_{15})r^8]r^3, \\ - & n = 13, & S_1^{(13)}\nu & = \sqrt{2}.[13A_8+(-1+13A_{21})r^8]r^5, \\ - & n = 17, & S_1^{(17)}\nu & = \sqrt{2}.[17A_2+17A_{19}r^8+(+1+17A_{36})r^{16}]r, \\ - & n = 19, & S_1^{(19)}\nu & = \sqrt{2}.[19A_7+19A_{26}r^8+(-1+19A_{45})r^{16}]r^3, \end{array}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Similia valent de reliquis summis. Fiunt enim:

$$\begin{aligned} S_2^{(n)}\nu &= 2\left\{r^{2n}.[f(r^{8n})]^2+\Sigma r^{\frac{2}{n}}\left[f\left(r^{\frac{8}{n}}\right)\right]^2\right\} \\ &= 2n[A_{\alpha_2}^{(2)}.r^{\beta_2}+A_{\alpha_2+n}^{(2)}.r^{\beta_2+8}+A_{\alpha_2+2n}^{(2)}.r^{\beta_2+16}+\dots], \end{aligned}$$

si $\alpha_2$ et $\beta_2$ tales valores assumunt, qui aequationi $8\alpha_2+2=n\beta_2$ satisfaciunt;

$$S_3^{(n)}\nu = 2\sqrt{2}.n.[A_{\alpha_3}^{(3)}.r^{\beta_3}+A_{\alpha_3+n}^{(3)}.r^{\beta_3+8}+A_{\alpha_3+2n}^{(3)}.r^{\beta_3+16}+\dots], \quad \text{si} \quad 8\alpha_3+3=n\beta_3;$$

$$S_4^{(n)}\nu = 4.n.[A_{\alpha_4}^{(4)}.r^{\beta_4}+A_{\alpha_4+n}^{(4)}.r^{\beta_4+8}+A_{\alpha_4+2n}^{(4)}.r^{\beta_4+16}+\dots], \quad \text{si} \quad 8\alpha_4+4=n\beta_4;$$

et cetera.

Per $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$, .... coefficientes evolutionum secundae, tertiae, quartae etc. potestatis ipsius $u$ significantur, quales in §. 4. inveniuntur.

## §. 7.

### Deducitur aequatio modularis pro transformatione tertii ordinis.

Forma hujus aequationis ex §. 3. lit. $b$. est:

$$\nu^4+au^3\nu^3+bu\nu-u^4 = 0.$$

Secundum §. 3. lit. $f$. fiunt:

$$a = \text{P}_3^1-\text{P}_3^0 = 3-1 = 2, \quad b = \text{P}_3^0-\text{P}_3^1 = 1-3 = -2;$$

ergo aequatio ipsa est haec:

$$\nu^4+2u^3\nu^3-2u\nu-u^4 = 0, \quad \text{sive:} \quad \nu^4-u^4-2u\nu(1-u^2\nu^2) = 0,$$

$$\text{aut:} \quad (\nu-u)^3(\nu+u)-2\nu u(1+u^2)(1-\nu^2) = 0.$$

Deducitur aequatio modularis pro transformatione quinti ordinis.

Forma hujus aequationis est ex §. 3. lit. *a.* et *b.*

$$\nu^6+au^5\nu^5+bu^2\nu^4+cu^4\nu^2+du\nu-u^6 = 0.$$

Secundum §. 3. lit. *e.* habemus:

$$d=-a; \quad c=-b.$$

Secundum §. 3. lit. *f.* est:

$$a=P_5^1-P_5^0=5-1=4, \quad b=P_5^2-P_5^1=10-5=5;$$

ergo aequatio quaesita:

$$\nu^6+4u^5\nu^5+5u^2\nu^4-5u^4\nu^2-4u\nu-u^6 = 0,$$

sive:

$$\nu^6-u^6-4u\nu(1-u^4\nu^4)+5u^2\nu^2(\nu^2-u^2) = 0,$$

aut:

$$(\nu-u)^5(\nu+u)-4u\nu(1+u^4)(1-\nu^4) = 0.$$

Deducitur aequatio modularis pro transformatione septimi ordinis.

Forma hujus aequationis est:

$$\nu^8+au^7\nu^7+bu^6\nu^6+cu^5\nu^5+du^4\nu^4+eu^3\nu^3+fu^2\nu^2+gu\nu+u^8 = 0.$$

Ex §. 3. lit. *e.* sequuntur:

$$g=a; \quad f=b; \quad e=c.$$

Ex §. 3. lit. *f.* sequuntur:

$$a=-P_8^1=-8, \quad b=P_8^2=28, \quad c=-P_8^3=-56, \quad d=P_8^4=70,$$

ergo aequatio quaesita:

$$\nu^8-8u^7\nu^7+28u^6\nu^6-56u^5\nu^5+70u^4\nu^4-56u^3\nu^3+28u^2\nu^2-8u\nu+u^8 = 0,$$

sive:

$$(1-u^8)(1-\nu^8) = (1-u\nu)^8.$$

Deducitur aequatio modularis pro transformatione undecimi ordinis.

Forma hujus aequationis est:

$$\nu^{12}+u^3\nu^{11}(a_1+a_2u^8)+bu^6\nu^{10}+u\nu^9(c_1+c_2u^8)+du^4\nu^8+eu^7\nu^7+u^2\nu^6(f_1+f_2u^8)$$
$$+gu^5\nu^5+hu^8\nu^4+u^3\nu^3(i_1+i_2u^8)+ku^6\nu^2+u\nu(l_1+l_2u^8)-u^{12} = 0.$$

Ex §. 3. lit. *e.* sequuntur:

$$l_2=-a_1; \quad l_1=-a_2; \quad k=-b; \quad i_2=c_1; \quad i_1=c_2; \quad h=-d;$$
$$g=-e; \quad f_2=-f_1.$$

Ex §. 3. lit. *d.* sequuntur:

$$i_2=a_1; \quad f_2=-b; \quad l_2=c_1; \quad h=-d; \quad k=-f_1.$$

Ex §. 3. lit. *f.* sequuntur:

$$a_1+a_2=P_{11}^1-P_{11}^0=11-\ 1=10,$$
$$b\ =P_{11}^2-P_{11}^1=55-11=44,$$

$$
\begin{aligned}
c_1+c_2 &= P_{11}^3 - P_{11}^2 = 165 - 55 = 110,\\
d &= P_{11}^4 - P_{11}^3 = 330-165 = 165,\\
e &= P_{11}^5 - P_{11}^4 = 462-330 = 132,\\
f_1+f_2 &= P_{11}^6 - P_{11}^5 = 462-462 = 0.
\end{aligned}
$$

Ex §. 5. *Nota.* est $l_1 = -32$.

Ex his conditionibus jam coefficientes omnes sunt quantitates notae; aequatio igitur componi potest:

$$
\begin{aligned}
&\nu^{12} - u^3\nu^{11}(22-32u^8) + 44u^6\nu^{10} + 22u\nu^9(1+4u^8) + 165u^4\nu^8 + 132u^7\nu^7\\
&+44u^2\nu^6(1-u^8) - 132u^5\nu^5 - 165u^8\nu^4 - 22u^3\nu^3(4+u^8) - 44u^6\nu^2\\
&-u\nu(32-22u^8) - u^{12} = 0.
\end{aligned}
$$

aut si placet:

$$
\begin{aligned}
&(\nu-u)^{11}(\nu+u) + 44u^2\nu^2(\nu^4-u^4)(1-u^4)(1-\nu^4) - 32u\nu(1+u^{10})(1-\nu^{10})\\
&-22u\nu(1+u^2)(1-\nu^2).\{(\nu^2+u^2).[4u^2\nu^2-(u^2-\nu^2)^2] + 4u^2\nu^2(1-u^2\nu^2)(1-u^2)(1+\nu^2)\}\\
&= 0\,{}^{*)}.
\end{aligned}
$$

Deducitur aequatio modularis pro transformatione decimi tertii ordinis.

Forma hujus aequationis est:

$$
\begin{aligned}
&\nu^{14} + u^5\nu^{13}(a_1+a_2u^8) + u^2\nu^{12}(b_1+b_2u^8) + cu^7\nu^{11} + u^4\nu^{10}(d_1+d_2u^8) + u\nu^9(e_1+e_2u^8)\\
&+fu^6\nu^8 + u^3\nu^7(g_1+g_2u^8) + hu^8\nu^6 + u^5\nu^5(i_1+i_2u^8) + u^2\nu^4(k_1+k_2u^8) + lu^7\nu^3\\
&+u^4\nu^2(m_1+m_2u^8) + u\nu(n_1+n_2u^8) - u^{14} = 0.
\end{aligned}
$$

Ex §. 3. lit. *e*. sequuntur:

$$
\begin{aligned}
&n_2 = -a_1;\quad n_1 = -a_2;\quad m_2 = -b_1;\quad m_1 = -b_2;\quad l = -c;\quad k_2 = -d_1;\\
&k_1 = -d_2;\quad i_2 = -e_1;\quad i_1 = -e_2;\quad h = -f;\quad g_2 = -g_1.
\end{aligned}
$$

Ex §. 3. lit. *d*. sequuntur:

$$
\begin{aligned}
&i_2 = a_1;\quad m_2 = -b_1;\quad d_2 = -b_2;\quad g_2 = c;\quad k_2 = -d_1;\quad n_2 = e_1;\\
&h = -f;\quad l = g_1;\quad m_1 = -k_1.
\end{aligned}
$$

Ex §. 3. lit. *f*. sequuntur:

$$
\begin{aligned}
a_1+a_2 &= P_{13}^1 - P_{13}^0 = 13 - 1 = 12,\\
b_1+b_2 &= P_{13}^2 - P_{13}^1 = 78 - 13 = 65,\\
c &= P_{13}^3 - P_{13}^2 = 286 - 78 = 208,\\
d_1+d_2 &= P_{13}^4 - P_{13}^3 = 715 - 286 = 429,\\
e_1+e_2 &= P_{13}^5 - P_{13}^4 = 1287 - 715 = 572,\\
f &= P_{13}^6 - P_{13}^5 = 1716 - 1287 = 429,\\
g_1+g_2 &= P_{13}^7 - P_{13}^6 = 1716 - 1716 = 0.
\end{aligned}
$$

---

*) In hujus Diarii Tom. XII. pag. 178, ubi hanc aequationem sine demonstratione dedi error typographicus invenitur; illo enim loco in secundo termino juxta $(\nu^2+u^2)$ factor omissus est hic: $[4u^2\nu^2-(u^2-\nu^2)^2]$.

Ex §. 5. *Nota.* est $n_1 = -64$.

Aequatio ergo transit in sequentem:

$$\nu^{14} - u^5\nu^{13}(52 - 64u^8) + u^2\nu^{12}(b_1 + b_2u^8) + 208u^7\nu^{11} + u^4\nu^{10}[(429 + b_2) - b_2u^8]$$
$$+ u\nu^9(52 + 520u^8) + 429u^6\nu^8 - u^3\nu^7(208 - 208u^8) - 429u^8\nu^6$$
$$- u^5\nu^5(520 + 52u^8) + u^2\nu^2[b_2 - (429 + b_2)u^8] - 208u^7\nu^3 - u^4\nu^2(b_2 + b_1u^8)$$
$$- u\nu(64 - 52u^8) - u^{14} = 0.$$

Restat igitur ut coefficientem secundum, qui est $= \frac{S_1^{(13)}S_1^{(13)}}{2} - \frac{S_2^{(13)}}{2}$, determinemus.

Secundum §. 6. est

$$S_2^n = 2n.[A_{\alpha_2}^{(2)}.r^{\beta_2} + A_{\alpha_2+n}^{(2)}.r^{\beta_2+8} + \cdots],$$

si $\alpha_2$ et $\beta_2$ tales valores accipiunt ut aequationi $8\alpha_2 + 2 = n.\beta_2$ satisfaciant, ergo:

$$S_2^{(13)} = 26.[A_3^{(2)}.r^2 + A_{16}^{(2)}.r^{10}],$$

sive posito secundum §. 4. $A_3^{(2)} = -10$, $A_{16}^{(2)} = 3348$,

$$S_2^{(13)} = 26[-10r^2 + 3348r^{10}],$$

qui termini ex aliis potestatibus ipsius $u$ nasci nequeunt nisi ex secunda et decima, ita ut aequiponendum sit:

$$S_2^{(13)} = mu^2 + m'u^{10};$$

si hic valor, qui substitutione $u = \sqrt{2}.r.[1 - r^8 + \cdots]$ adhibita, transit in: $2mr^2 + (32m' - 4m)r^{10}\ldots.$ cum praecedente comparatur, eruitur:

$$2m = -260 \quad \text{et} \quad 32m' - 4m = 26.3348,$$

ergo:

$$m = -130; \quad m' = 2704 \quad \text{unde} \quad S_2^{(13)} = -130u^2 + 2704u^{10}.$$

$S_1^{(13)}$ jam ex aequatione ipsa notum est, nimirum $S_1^{(13)} = -52u^5 + 64u^{13}$, ergo fit coefficiens secundi termini:

$$b_1u^2 + b_2u^{10} = \frac{S_1^{(13)}.S_1^{(13)}}{2} - \frac{S_2^{(13)}}{2} = \frac{2704u^{10}}{2} + \frac{130u^2}{2} - \frac{2704u^{10}}{2} = 65u^2,$$

ergo $b_1 = 65$, $b_2 = 0$.

Aequatio igitur modularis decimi tertii ordinis erit:

$$\nu^{14} - u^5\nu^{13}(52 = 64u^8) + 65u^2\nu^{12} + 208u^7\nu^{11} + 429u^4\nu^{10} + 52u\nu^9(1 + 10u^8)$$
$$+ 429u^6\nu^8 + 208u^3\nu^7(1 - u^8) - 429u^8\nu^6 - 52u^5\nu^5(10 + u^8) - 429u^{10}\nu^4$$
$$- 208u^7\nu^3 - 65u^{12}\nu^2 - u\nu(64 - 52u^8) - u^{14} = 0,$$

aut:

$$(\nu - u)^{13}(\nu + u)$$
$$-4u\nu(1 + u^4)(1 - \nu^4).[13(3u^4\nu^4 + 4u^2\nu^2(\nu^2 + u^2)^2 + (1 + \nu^4)(1 - u^4)(1 - u^4\nu^4))$$
$$+ 3(1 - u^4 + u^8)(1 + \nu^4 + \nu^8)] = 0.$$

Deducitur aequatio modularis pro transformatione decimi septimi ordinis.

Forma hujus aequationis est:

$$\begin{aligned}
&\nu^{18}+u\nu^{17}(a_1+a_2u^8+a_3u^{16})+u^2\nu^{16}(b_1+b_2u^8)+u^3\nu^{15}(c_1+c_2u^8)+u^4\nu^{14}(d_1+d_2u^8)\\
&\quad+u^5\nu^{13}(e_1+e_2u^8)+u^6\nu^{12}(f_1+f_2u^8)+u^7\nu^{11}(g_1+g_2u^8)+u^8\nu^{10}(h_1+h_2u^8)\\
&\quad+u\nu^9(i_1+i_2u^8+i_3u^{16})+u^2\nu^8(k_1+k_2u^8)+u^3\nu^7(l_1+l_2u^8)+u^4\nu^6(m_1+m_2u^8)\\
&\quad+u^5\nu^5(n_1+n_2u^8)+u^6\nu^4(o_1+o_2u^8)+u^7\nu^3(p_1+p_2u^8)+u^8\nu^2(q_1+q_2u^8)\\
&\quad+u\nu(r_1+r_2u^8+r_3u^{16})+u^{18} = 0.
\end{aligned}$$

Ex §. 3. lit. *e.* sequuntur:

$$\begin{aligned}
&r_3=a_1;\quad r_2=a_2;\quad r_1=a_3;\quad q_2=b_1;\quad q_1=b_2;\quad p_2=c_1;\quad p_1=c_2;\\
&o_2=d_1;\quad o_1=d_2;\quad n_2=e_1;\quad n_1=e_2;\quad m_2=f_1;\quad m_1=f_2;\quad l_2=g_1;\\
&l_1=g_2;\quad k_2=h_1;\quad k_1=h_2;\quad i_3=i_1.
\end{aligned}$$

Ex §. 3. lit. *d.* sequuntur:

$$\begin{aligned}
&r_3=a_1;\quad i_3=a_2;\quad q_2=b_1;\quad h_2=b_2;\quad p_2=c_1;\quad g_2=c_2;\quad o_2=d_1;\\
&f_2=d_2;\quad n_2=e_1;\quad m_2=f_1;\quad l_2=g_1;\quad k_2=h_1;\quad r_2=i_1;\quad q_1=k_1;\\
&p_1=l_1;\quad o_1=m_1.
\end{aligned}$$

Ex §. 3. lit. *f.* sequuntur:

$$\begin{aligned}
a_1+a_2+a_3 &= -\mathrm{P}^1_{18} = -\ 18,\\
b_1+b_2 &= +\mathrm{P}^2_{18} = +\ 153,\\
c_1+c_2 &= -\mathrm{P}^3_{18} = -\ 816,\\
d_1+d_2 &= +\mathrm{P}^4_{18} = +\ 3060,\\
e_1+e_2 &= -\mathrm{P}^5_{18} = -\ 8568,\\
f_1+f_2 &= +\mathrm{P}^6_{18} = +18564,\\
g_1+g_2 &= -\mathrm{P}^7_{18} = -31824,\\
h_1+h_2 &= +\mathrm{P}^8_{18} = +43758,\\
i_1+i_2+i_3 &= -\mathrm{P}^9_{18} = -48620.
\end{aligned}$$

Ex §. 5. *Nota.* est $r_1=-256$.

Aequatio ergo sequentem formam induit:

$$\begin{aligned}
&\nu^{18}+u\nu^{17}[a_1+(238-a_1)u^8-256u^{16}]+u^2\nu^{16}[b_1+(153-b_1)u^8]\\
&\quad+u^3\nu^{15}[c_1-(816+c_1)u^8]+u^4\nu^{14}[d_1+(3060-d_1)u^8]\\
&\quad+u^5\nu^{13}[e_1-(8568+e_1)u^8]+u^6\nu^{12}[(15504+d_1)+(3060-d_1)u^8]\\
&\quad+u^7\nu^{11}[(-31008+c_1)-(816+c_1)u^8]+u^8\nu^{10}[(43605+b_1)+(153-b_1)u^8]\\
&\quad+u\nu^9[(238-a_1)+(-49096+2a_1)u^8+(238-a_1)u^{16}]\\
&\quad+u^2\nu^8[(153-b_1)+(43605+b_1)u^8]+u^3\nu^7[-(816+c_1)+(-31008+c_1)u^8]\\
&\quad+u^4\nu^6[(3060-d_1)+(15504+d_1)u^8]+u^5\nu^5[-(8568+e_1)+e_1u^8]\\
&\quad+u^6\nu^4[(3060-d_1)+d_1u^8]+u^7\nu^3[-(816+c_1)+c_1u^8]\\
&\quad+u^8\nu^2[(153-b_1)+b_1u^8]+u\nu[-256+(238-a_1)+a_1]+u^{18} = 0.
\end{aligned}$$

Ut coefficientem primum $a_1 u + (238 - a_1) u^9 + 256 u^{17} = C_1 = - S_1^{(17)}$ determinemus, ex §. 6. scimus esse:

$$S_1^{(17)} = \sqrt{2}.[17 A_2 + 17 A_{19} r^8 + (1 + 17 A_{36}) r^{16}].r$$
$$= \sqrt{2}.[17.2r - 17.258 r^9 + \cdots]$$

atque

$$S_1^{(17)} = -a_1 u - (238 - a_1) u^9 - 256 u^{17}$$
$$= \sqrt{2}[-a_1 r + a_1 r^9 - 2 a_1 r^{17} + \cdots - 16(238 - a_1)(r^9 - 9 r^{17} + \cdots) - \cdots];$$

si hi ambo valores ipsius $S_1^{(17)}$ inter se comparantur, evadit:

$$a_1 = -34,$$

ergo:

$$S_1^{(17)} = 34 u + \cdots \quad \text{et} \quad C_1 = 34 u + \cdots$$

Quod ad secundum coefficientem, est:

$$b_1 u^2 + (153 - b_1) u^{10} = C_2 = -\frac{S_2^{(17)}}{2} - \frac{C_1 . S_1^{(17)}}{2}.$$

Ex §. 6. vero fit:

$$S_2^{(17)} = 34.[A_4^{(2)}.r^2 + A_{21}^{(2)}.r^{10} + \cdots]$$
$$= 34.[18 r^2 + \cdots],$$

atque:

$$S_2^{(17)} = m u^2 + m' u^{10}$$
$$= 2 m r^2 + \cdots$$

unde ex amborum comparatione oritur:

$$m = 306, \quad \text{ergo} \quad S_2^{(17)} = 306 u^2 + \cdots$$

unde:

$$C_2 = b_1 u^2 + (153 - b_1) u^{10} = -153 u^2 + 578 u^2 + \cdots = +425 u^2 + \cdots,$$

ergo:

$$b_1 = +425.$$

Tertius coefficiens est

$$c_1 u^3 - (816 + c_1) u^{11} = C_3 = -\frac{S_3}{3} - \frac{C_1 . S_2}{3} - \frac{C_2 . S_1}{3}:$$

Ex §. 6. fit:

$$S_3^{(17)} = 34\sqrt{2}.[A_6^{(3)}.r^3 + A_{23}^{(3)}.r^{11}]$$
$$= 34\sqrt{2}.[194 r^3 + \cdots]$$

atque

$$S_3^{(17)} = m u^3 + m' u^{11}$$
$$= 2\sqrt{2}.m r^3 - \cdots;$$

alter valor ipsius $S_3$ cum altero comparatus praebet:

$$m = 3298, \quad \text{ergo} \quad S_3^{(17)} = 3298 u^3 + \cdots,$$

unde:

$$C_3 = c_1 u^3 - (816 + c_1) u^{11} = -1099\tfrac{1}{3} . u^3 + 3468 u^3 - 4816\tfrac{2}{3} u^3 \dots$$
$$= -2448 u^3 \dots,$$

ergo:

$$c_1 = -2448.$$

Quartus coefficiens est:

$$d_1 u^4 + (3060 - d_1) u^{12} = C_4 = -\frac{S_4}{4} - \frac{C_1 S_3}{4} - \frac{C_2 S_2}{4} - \frac{C_3 S_1}{4}.$$

Ex §. 6. fit:

$$S_4^{(17)} = 68 . [A_8^{(4)} . r^4 + A_{25}^{(4)} . r^{12}]$$
$$= 68 . [2162 r^4 + \cdots]$$

atque

$$S_4^{(17)} = m u^4 + m' u^{12}$$
$$= 4 m r^4 + \cdots$$

alter valor ipsius $S_4$ cum altero comparatus praebet:

$$m = 36754,$$

ergo:

$$S_4^{(17)} = 36754 u^4 - \cdots,$$

unde:

$$C_4 = d_1 u^4 + (3060 - d_1) u^{12}$$
$$= -9188\tfrac{1}{2} u^4 + 28033 u^4 - 32512\tfrac{1}{2} u^4 + 20808 u^4 \dots$$
$$= 7140 u^4 \dots,$$

ergo:

$$d_1 = 7140.$$

Quintus coefficiens est:

$$e_1 u^5 - (8568 + e_1) u^{13} = C_5 = -\frac{S_5}{5} - \frac{C_1 S_4}{5} - \frac{C_2 S_3}{5} - \frac{C_3 S_2}{5} - \frac{C_4 S_1}{5}.$$

Ex §. 6. fit:

$$S_5^{(17)} = 68\sqrt{2} . [A_{10}^{(5)} . r^5 + A_{27}^{(5)} . r^{13}]$$
$$= 68\sqrt{2} . [24802 r^5 + \cdots]$$

atque

$$S_5^{(17)} = m u^5 + m' u^{13}$$
$$= 4\sqrt{2} . m r^5 + \cdots$$

alter valor ipsius $S_5$ cum altero comparatus praebet:

$$m = 421634,$$

ergo:

$$S_5^{(17)} = 421634 u^5 + \cdots$$

unde:

$$C_5 = e_1 u^5 - (8568 + e_1) u^{13}$$
$$= -84326\tfrac{4}{5} u^5 + 249927\tfrac{1}{5} u^5 - 280330 u^5 + 149817\tfrac{3}{5} u^5 - 48552 u^5$$
$$= -13464 u^5 - \cdots$$

ergo:

$$e_1 = -13464.$$

Si denique hi valores in aequatione prius dicta ponuntur, aequatio modularis decimi septimi ordinis eruitur:

$$\nu^{18}-(34-272u^8+256u^{16})u\nu^{17}+17(25-16u^8)u^2\nu^{16}-816(3-2u^8)u^3\nu^{15}$$
$$+1020(7-4u^8)u^4\nu^{14}-1224(11-4u^8)u^5\nu^{13}+204(111-20u^8)u^6\nu^{12}$$
$$-816(41-2u^8)u^7\nu^{11}+34(1295-8u^8)u^8\nu^{10}+68(4-723u^8+4u^{16})u\nu^9$$
$$-34(8-1295u^8)u^2\nu^8+816(2-41u^8)u^3\nu^7-204(20+111u^8)u^4\nu^6$$
$$+1224(4-11u^8)u^5\nu^5-1020(4-7u^8)u^6\nu^4+816(2-3u^8)u^7\nu^3$$
$$-17(16-25u^8)u^8\nu^2-(256-272u^8+34u^{16})u\nu+u^{18} = 0,$$

aut:

$$(\nu-u)^{18}-16u\nu(1-u^8)(1-\nu^8).[17u\nu(\nu-u)^6-(\nu^4-u^4)^2+16(1-u^4\nu^4)^2] = 0.$$

Deducitur aequatio modularis pro transformatione undevicesimi ordinis.

Forma hujus aequationis est:

$$\nu^{20}+(a_1+a_2u^8+a_3u^{16})u^3\nu^{19}+(b_1+b_2u^8)u^6\nu^{18}+(c_1+c_2u^8+c_3u^{16})u\nu^{17}$$
$$+(d_1+d_2u^8)u^4\nu^{16}+(e_1+e_2u^8)u^7\nu^{15}+(f_1+f_2u^8+f_3u^{16})u^2\nu^{14}$$
$$+(g_1+g_2u^8)u^5\nu^{13}+(h_1+h_2u^8)u^8\nu^{12}+(i_1+i_2u^8+i_3u^{16})u^3\nu^{11}$$
$$+(k_1+k_2u^8)u^6\nu^{10}+(l_1+l_2u^8+l_3u^{16})u\nu^9+(m_1+m_2u^8)u^4\nu^8$$
$$+(n_1+n_2u^8)u^7\nu^7+(o_1+o_2u^8+o_3u^{16})u^2\nu^6+(p_1+p_2u^8)u^5\nu^5$$
$$+(q+q_2u^8\ \ u^8\nu^4+(r_1+r_2u^8+r_3u^{16})u^3\nu^3+(s_1+s_2u^8)u^6\nu^2$$
$$+(t_1+t_2u^8+t_3u^{16})u^{20} = 0.$$

Ex §. 3. lit. *e*. sequuntur:

$t_3=-a_1$; $t_2=-a_2$; $t_1=-a_3$; $s_2=-b_1$; $s_1=-b_2$; $r_3=-c_1$;
$r_2=-c_2$; $r_1=-c_3$; $q_2=-d_1$; $q_1=-d_2$; $p_2=-e_1$; $p_1=-e_2$;
$o_3=-f_1$; $o_2=-f_2$; $o_1=-f_3$; $n_2=-g_1$; $n_1=-g_2$; $m_2=-h_1$;
$m_1=-h_2$; $l_3=-i_1$; $l_2=-i_2$; $l_1=-i_3$; $k_2=-k_1$.

Ex §. 3. lit. *d*. sequuntur:

$r_3=a_1$; $i_3=a_2$; $o_3=-b_1$; $f_3=-b_2$; $t_3=c_1$; $l_3=c_2$; $q_2=-d_1$;
$h_2=-d_2$; $n_2=e_1$; $s_2=-f_1$; $k_2=-f_2$; $p_2=g_1$; $m_2=-h_1$;
$r_2=i_1$; $o_2=-k_1$; $t_2=l_1$; $q_1=-m_1$; $s_1=-o_1$.

Ex §. 3. lit. *f*. sequuntur:

$$a_1+a_2+a_3=P^1_{19}-P^0_{19}= 19-1= 18,$$
$$b_1+b_2=P^2_{19}-P^1_{19}= 171-19= 152,$$
$$c_1+c_2+c_3=P^3_{19}-P^2_{19}= 969-171= 798,$$
$$d_1+d_2=P^4_{19}-P^3_{19}= 3876-969=2907,$$
$$e_1+e_2=P^5_{19}-P^4_{19}=11628-3876=7752,$$

$$\begin{aligned} f_1+f_2+f_3 &= P_{19}^6-P_{19}^5 = 27132-11628 = 15504,\\ g_1+g_2 &= P_{19}^7-P_{19}^6 = 50388-27132 = 23256,\\ h_1+h_2 &= P_{19}^8-P_{19}^7 = 75582-50388 = 25194,\\ i_1+i_2+i_3 &= P_{19}^9-P_{19}^8 = 92378-75582 = 16796,\\ k_1+k_2 &= P_{19}^{10}-P_{19}^9 = 92378-92378 = 0. \end{aligned}$$

Ex §. 5. *Nota.* est:

$$t_1 = -512.$$

Aequatio ergo sequentem formam induit:

$$\begin{aligned} &v^{20}+[a_1-(494+a_1)u^8+512u^{16}]u^3v^{19}+[b_1+(152-b_1)u^8]u^6v^{18}\\ &+[-a_1+c_2u^8+(798+a_1-c_2)u^{16}]uv^{17}+[d_1+(2907-d_1)u^8]u^4v^{16}\\ &+[e_1+(7752-e_1)u^8]u^7v^{15}+[b_1+(15656-2b_1)u^8-(152-b_1)u^{16}]u^2v^{14}\\ &+[-e_1+(23256+e_1)u^8]u^5v^{13}+[(28101-d_1)-(2907-d_1)u^8]u^8v^{12}\\ &+[-c_2+(17290+a_1+c_2)u^8-(494+a_1)u^{16}]u^3v^{11}\\ &+[(15656-2b_1)-(15656-2b_1)u^8]u^6v^{10}\\ &+[(494+a_1)-(17290+a_1+c_2)u^8+c_2u^{16}]uv^9\\ &+[(2907-d_1)-(28101-d_1)u^8]u^4v^8-[(23256+e_1)-e_1u^8]u^7v^7\\ &+[(152-b_1)-(15656-2b_1)u^8-b_1]u^2v^6-[(7752-e_1)+e_1u^8]u^5v^5\\ &-[(2907-d_1)+d_1u^8]u^8v^4-[(798+a_1-c_2)+c_2u^8-a_1u^{16}]u^3v^3\\ &-[(152-b_1)+b_1u^8]u^6v^2-[512-(494+a_1)u^8+a_1]uv-u^{20} = 0. \end{aligned}$$

Ut primus coefficiens determinetur est:

$$C_1 = a_1u^3-(494+a_1)u^{11}+512u^{19} = -S_1.$$

Ex §. 6. vero fit:

$$\begin{aligned} S_1^{(19)} &= \sqrt{2}.[19A_7r^3+10A_{26}r^{11}+(-1+19A_{45})r^{19}]\\ &= \sqrt{2}.[-19.12.r^3+\cdots] \end{aligned}$$

atque

$$\begin{aligned} S_1^{(19)} &= mu^3+m'u^{11}+m''u^{19}\\ &= 2\sqrt{2}.mr^3+\cdots, \end{aligned}$$

alter valor ipsius $S_1$ cum altero comparatus praebet:

$$m = -114,$$

ergo

$$S_1^{(19)} = -114u^3+\cdots,$$

unde:

$$C_1 = \quad 114u^3+\cdots$$

Secundus coefficiens est:

$$b_1u^6+(152-b_1)u^{14} = C_2 = -\frac{S_2}{2}-\frac{C_1S_1}{2}.$$

Ex §. 6. fit:

$$S_2^{(19)} = 38.[A_{14}^{(2)}.r^6 + A_{33}^{(2)}.r^{14}]$$
$$= 38.[1648 r^6 + \cdots]$$

atque

$$S_2^{(19)} = m u^6 + m' u^{14}$$
$$= 8 m r^6 + \cdots,$$

alter valor ipsius $S_2$ cum altero comparatus praebet:

$$m = 7828,$$

ergo:

$$S_2^{(19)} = 7828 u^6 + \cdots,$$

unde:

$$C_2 = -3914 u^6 + 6498 u^6 + \cdots = 2584 u^6 + \cdots,$$

ergo:

$$b_1 = 2584.$$

Tertius coefficiens est:

$$-a_1 u + c_2 u^9 + (798 + a_1 - c_2) u^{17} = C_3 = -\frac{S_3}{3} - \frac{C_1 S_2}{3} - \frac{C_2 S_1}{3}.$$

Ex §. 6. fit:

$$S_3^{(19)} = 38\sqrt{2}.[A_2^{(1)} r + A_{21}^{(3)} r^9 + A_{40}^{(3)} r^{17}]$$
$$= 38\sqrt{2}.[9 r - 255945 r^9 + \cdots]$$

atque

$$S_3^{(19)} = m u + m' u^9 + m'' u^{17}$$
$$= \sqrt{2}.\{m r - m r^9 + 2 m r^{17}$$
$$+ 16 m' r^9 - 144 m' r^{17}$$
$$+ 256 m'' r^{17}\},$$

alter valor ipsius $S_3$ cum altero comparatus praebet:

$$m = 9.\ 38,$$
$$-m + 16 m' = -38.255945,$$

ergo:

$$m = 342,$$
$$m' = -607848,$$

ergo:

$$S_3^{(19)} = 342 u - 607848 u^9,$$

unde:

$$C_3 = -114 u + 202616 u^9 + 297464 u^9 + 98192 u^9 + \cdots$$
$$= -114 u + 3344 u^9 + \cdots,$$

ergo:

$$c_2 = 3344.$$

Quartus coefficiens est:

$$d_1 u^4 + (2907 - d_1) u^{12} = C_4 = -\frac{S_4}{4} - \frac{C_1 S_3}{4} - \frac{C_2 S_2}{4} - \frac{C_3 S_1}{4}.$$

Ex §. 6. fit:

$$S_4^{(19)} = 76.[A_9^{(4)} r^4 + A_{28}^{(4)} r^{12}]$$
$$= 76.[-4180 r^4 + \cdots],$$

atque

$$S_4^{(19)} = m u^4 + m' u^{12}$$
$$= 4 m r^4 + \cdots,$$

alter valor ipsius $S_4$ cum altero comparatus praebet:

$$m = -79420,$$

ergo:

$$S_4^{(19)} = -79420 u^4 + \cdots,$$

unde:

$$C_4 = 19855 u^4 - 9747 u^4 - 3249 u^4 \ldots = 6859 u^4,$$

ergo:

$$d_1 = 6859.$$

Quintus coefficiens est:

$$e_1 u^7 + (7752 - e_1) u^{15} = C_5 = -\frac{S_5}{5} - \frac{C_1 S_4}{5} - \frac{C_2 S_3}{5} - \frac{C_3 S_2}{5} - \frac{C_4 S_1}{5}.$$

Ex §. 6. fit:

$$S_5^{(19)} = 76\sqrt{2}.[A_{10}^{(5)} r^7 + A_{35}^{(5)} r^{15}]$$
$$= 76\sqrt{2}.[1035060 r^7 + \cdots]$$

atque

$$S_5^{(19)} = m u^7 + m' u^{15}$$
$$= \sqrt{2}.[8 m r^7 + \cdots].$$

alter valor ipsius $S_5$ cum altero comparatus praebet:

$$m = 9833070,$$

ergo:

$$S_5^{(19)} = 9833070 u^7 + \cdots$$

unde:

$$C_1 = -1966614 u^7 + 1810776 u^7 - \frac{883728}{5} u^7 + \frac{892392}{5} u^7 + \frac{781926}{5} u^7 + \cdots$$
$$= 2280 u^7 + \cdots,$$

ergo:

$$e_1 = 2280.$$

Ex his aequatio modularis undevicesimi ordinis oritur haec:

$$\nu^{20}+(114-608u^8+512u^{16})u^3\nu^{19}+152(17-16u^8)u^6\nu^{18}$$
$$-38(3-88u^8+64u^{16})u\nu^{17}+19(361-208u^8)u^4\nu^{16}+456(5+12u^8)u^7\nu^{15}$$
$$+152(17+69u^8+16u^{16})u^2\nu^{14}-456(5-56u^8)u^5\nu^{13}+494(43+8u^8)u^8\nu^{12}$$
$$-76(44-273u^8+8u^{16})u^3\nu^{11}+10488(1-u^8)u^6\nu^{10}$$
$$+76(8-273u^8+44u^{16})u\nu^9-494(8+43u^8)u^4\nu^8-456(56-5u^8)u^7\nu^7$$
$$-152(16+69u^8+17u^{16})u^2\nu^6-456(12-5u^8)u^5\nu^5+19(208-361u^8)u^8\nu^4$$
$$+38(64-88u^8+3u^{16})u^3\nu^3+152(16-17u^8)u^6\nu^2$$
$$-(512-608u^8+114u^{16})u\nu-u^{20} = 0.$$

His exemplis, quomodo aequatio modularis pro transformatione cujusvis ordinis deduci possit, satis demonstratur.

Halae, mens. Mart. 1836.

# 14.
# Summenrechnung für einfache und zusammengesetzte Reihen, gegründet auf die Differenziale und Integrale der Functionen, wodurch die Reihen erzeugt werden.

(Vom Herrn Prof. *Oettinger* zu Heidelberg.)

(Fortsetzung von No. 6. und 14. Band XI., No. 24. Bd. XII., No. 22., 23. und 24. Bd. XIII., No. 18. und 23. Band. XIV., No. 17. und 21. Band. XV.)

---

## *A.* Summenrechnung für einfache Reihen mittelst der Differenziale und Integrale ihrer Functionen.

### §. 124.

Die Summenrechnung für einfache und zusammengesetzte Reihen mittelst der Differenziale und Integrale ihrer Functionen, wird auf eine ähnliche Art gewonnen, wie die gewonnen wurde, die auf den Unterschieden und Aufstufungen der Functionen beruht.

Wir legen zu dem Ende die allgemeinen Reihen, wie wir sie §. 72. und 73., ferner §. 90.—92. gefunden haben, zum Grunde; führen statt der Unterschiede und Aufstufungen ihre Entwicklungen mittelst der Differenziale und Integrale ein. Diese Einführung wird uns die Summenrechnung für solche Reihen, die durch einfache Functionen erzeugt werden, gewinnen lassen. Auch hier haben wir, wie früher, zwischen solchen Reihen zu unterscheiden, deren Glieder nur mit positiven unter einander verbunden sind, und solchen, die einen Zeichenwechsel haben.

Gehen wir von den Gleichungen (350.) aus, so ergiebt sich der Summenausdruck der Reihe

$$X_0+X_1+X_2+\dots+X_n = \Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-1}X_0,$$

wenn der erste negative Unterschied der Functionen $X_{n+1}$ und $X_0$ nach No. 219. durch Differenziale dargestellt und nach Vorschrift der Gleichung eingeführt wird. Die Einführung erzeugt folgendes Resultat:

540. $$X_0+X_1+X_2+\cdots+X_n$$
$$=\int\frac{X_{n+1}.\partial x}{\Delta x}-\int\frac{X.\partial x}{\Delta x}$$
$$-\frac{1}{2}X_{n+1}+\frac{X}{2}$$
$$+\frac{1}{6.2}.\frac{\Delta x.\partial X_{n+1}}{1.\partial x}-\frac{1}{2.6}.\frac{\Delta x.\partial X}{1.\partial x}$$
$$-\frac{1}{30.4}.\frac{(\Delta x)^3.\partial^3 X_{n+1}}{1.2.3(\partial x)^3}+\frac{1}{30.4}.\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3}$$
$$+\frac{1}{42.6}.\frac{(\Delta x)^5.\partial^5 X_{n+1}}{1.2.3.4.5(\partial x)^5}-\frac{1}{42.6}.\frac{(\Delta x)^5\partial^5 X}{1.2.3.4.5(\partial x)^5}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Die zweite Reihe erzeugt, wenn aus (219.) und (220.) die angezeigten Darstellungen eingeführt werden:

541. $$(n+1)X_0+nX_1+(n-1)X_2+\cdots+2X_{n-1}+X_n$$
$$=\int^2\frac{X_{n+2}(\partial x)^2}{(\Delta x)^2}-\int^2\frac{X_1(\partial x)^2}{(\Delta x)^2}$$
$$-\int\frac{X_{n+2}\,\partial x}{\Delta x}-(n+1)\int\frac{X.\partial x}{\Delta x}+\int\frac{X_1.\partial x}{\Delta x}$$
$$+\frac{5X_{n+2}}{12}+\frac{(n+1)X}{2}-\frac{5X_1}{12.\partial x}$$
$$-\frac{\Delta x.\partial X_{n+2}}{12.\partial x}-\frac{n+1}{12}.\frac{\partial X}{1.\partial x}+\frac{\Delta x.\partial X_1}{12.\partial x}$$
$$+\frac{(\Delta x)^2.\partial^2 X_{n+2}}{120.1.2(\partial x)^2}-\frac{(\Delta x)^2.\partial^2 X_1}{1.2(\partial x)^2}$$
$$+\frac{(\Delta x)^3.\partial^3 X_{n+2}}{120.1.2.3(\partial x)^3}+\frac{n+1}{30.4}.\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3}-\frac{(\Delta x)^3.\partial^3 X_1}{1.2.3(\partial x)^3}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Die dritte Reihe von (350.) erzeugt, wenn aus (219.), (220.) und (221.) die erforderlichen Werthe eingeführt werden, folgendes:

542. $$\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}X_0+\frac{n(n+1)}{1.2}X_1+\cdots+\frac{2.3}{1.2}X_{n-1}+X_n$$
$$=\int^3\frac{X_{n+3}(\partial x)^3}{(\Delta x)^3}-\int^3\frac{X_2(\partial x)^3}{(\Delta x)^3}$$
$$-\frac{3}{2}\int^2\frac{X_{n+3}(\partial x)^2}{(\Delta x)^2}-\frac{(n+1)f^2X_1(\partial x)^2}{(\Delta x)^2}+\frac{3}{2}\int^2\frac{X_2(\partial x)^2}{(\Delta x)^2}$$
$$+\int\frac{X_{n+3}(\partial x)}{\Delta x}-\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\int\frac{X.\partial x}{\Delta x}+\frac{(n+1)fX_1.\partial x}{\Delta x}-\int\frac{X_2.\partial x}{\Delta x}$$
$$-\frac{3X_{n+3}}{8}+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}.\frac{X}{2}-\frac{5.(n+1)X_1}{12}+\frac{3X_2}{8}$$
$$+\frac{19\Delta x.\partial X_{n+3}}{240.\partial x}-\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}.\frac{\Delta x.\partial X}{12.\partial x}+\frac{(n+1)\Delta x.\partial X_1}{12.\partial x}-\frac{19\Delta x.\partial X_2}{240}$$
$$-\frac{(\Delta x)^2\partial^2 X_{n+3}}{80.1.2(\partial x)^2}-\frac{(n+1)(\Delta x)^2\partial^2 X_1}{120.1.2(\partial x)^2}+\frac{(\Delta x)^2.\partial^2 X_2}{80.1.2(\partial x)^2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

u. s. w. Auf gleiche Weise kann man die spätern Gleichungen von (350.) behandeln. Man erkennt leicht, dafs sich die Verticalreihen des Summenausdruckes mit jeder spätern Darstellung um eine vermehren.

§. 125.

Um Summenausdrücke für einfache Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, durch Differenziale darzustellen, haben wir die Gleichungen (351.) und (352.) eben so zu behandeln, wie wir die Gleichungen (350.) behandelt haben.

Wir werden unsern Zweck erreichen, wenn statt der negativen Aufstufungen für die einfachen Functionen ihre Entwicklungen in Reihen aus (114.) u. ff. eingeführt werden. Auch hier haben wir zwischen Reihen von ungerader und gerader Gliederanzahl zu unterscheiden. Der Summenausdruck für eine ungerade Gliederanzahl führt zu folgender Darstellung:

543. $X_0 - X_1 + X_2 - \dots + X_n$

$$\begin{aligned}
&= \frac{X_{n+1}}{2} && - \frac{X}{2} \\
&- \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta x . \partial X_{n+1}}{1 . \partial x} && - \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta x . \partial X}{1 . \partial X} \\
&+ \frac{1}{8} \cdot \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_{n+1}}{1.2.3 (\partial x)^3} && + \frac{1}{8} \cdot \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3 (\partial x)^3} \\
&- \frac{1}{4} \cdot \frac{(\Delta x)^5 \partial^5 X_{n+1}}{1.2 \dots 5 (\partial x)^5} && - \frac{1}{4} \cdot \frac{(\Delta x)^5 \partial^5 X}{1.2 \dots 5 (\partial x)^5} \\
&+ \frac{17}{16} \cdot \frac{(\Delta x)^7 \partial^7 X_{n+1}}{1.2 \dots 7 (\partial x)^7} && + \frac{17}{16} \cdot \frac{(\Delta x)^7 \partial^7 X}{1.2 \dots 7 (\partial x)^7} \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot && \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir:

544. $(n+1) X_0 - n X_1 + (n-1) X_2 - \dots + X_n$

$$\begin{aligned}
&= \frac{X_{n+2}}{4} && + \frac{(n+1) X}{2} && + \frac{X_1}{4} \\
&- \frac{\Delta x . \partial X_{n+2}}{4 . \partial x} && - \frac{(n+1) \Delta x . \partial X}{4 . \partial x} && - \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta x . \partial X_1}{\partial x} \\
&+ \frac{1}{8} \cdot \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_{n+2}}{1.2 (\partial x)^2} && && + \frac{1}{8} \cdot \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_1}{1.2 (\partial x)^2} \\
&+ \frac{1}{8} \cdot \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_{n+2}}{1.2.3 (\partial x)^3} && + \frac{1}{8} \cdot \frac{(n+1)(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3 (\partial x)^3} && + \frac{1}{8} \cdot \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_1}{1.2.3 (\partial x)^3} \\
&- \frac{1}{4} \cdot \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X_{n+2}}{1.2.3.4 (\partial x)^4} && && - \frac{1}{4} \cdot \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X_1}{1.2.3.4 (\partial x)^4} \\
&- \frac{1}{4} \cdot \frac{(\Delta x)^5 \partial^5 X_{n+2}}{1.2 \dots 5 (\partial x)^5} && - \frac{1}{4} \cdot \frac{(n+1)(\Delta x)^5 \partial^5 X}{1.2 \dots 5 (\partial x)^5} && - \frac{1}{4} \cdot \frac{(\Delta x)^5 \partial^5 X_1}{1.2.3.4.5 (\partial x)^5} \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot && \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot && \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

**Aus der dritten Gleichung gewinnt man**

$$545.\quad \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}X_0-\frac{n(n+1)}{1.2}X_1+\dots-\frac{2.3}{1.2}X_{n-1}+X_n$$

$$\begin{aligned}
=&\frac{X_{n+3}}{8}+\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{X}{2}+\frac{(n+1)X_1}{4}+\frac{X_2}{8}\\
&-\frac{3\Delta x.\partial X_{n+3}}{16.\partial x}-\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{\Delta x.\partial X}{4.\partial x}-\frac{(n+1)\Delta x.\partial X_1}{4.\partial x}-\frac{3\Delta x.\partial X_2}{16.\partial x}\\
&+\frac{3(\Delta x)^2\partial^2 X_{n+3}}{16.1.2(\partial x)^2}+\frac{(n+1)(\Delta x)^2\partial^2 X_1}{8.1.2(\partial x)^2}+\frac{3(\Delta x)^2\partial^2 X_2}{16.1.2(\partial x)^2}\\
&+\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X}{8.1.2.3(\partial x)^4}+\frac{(n+1)(\Delta x)^3\partial^3 X_1}{8.1.2.3(\partial x)^3}\\
&-\frac{3(\Delta x)^4\partial^4 X_{n+3}}{8.1.2.3.4(\partial x)^4}-\frac{(n+1)(\Delta x)^4\partial^4 X_1}{4.1\dots4(\partial x)^4}-\frac{3(\Delta x)^4\partial^4 X^2}{8.1.2.3(\partial x)^3}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

u. s. w.

**Legt man die Gleichungen (352.) zum Grunde, so gewinnt man für Reihen von gerader Gliederanzahl folgende Darstellung:**

$$546.\quad X_0-X_1+X_2-X_3\dots-X_n$$

$$\begin{aligned}
=&-\frac{X_{n+1}}{2}+\frac{X}{2}\\
&+\frac{1}{4}\cdot\frac{\Delta x.\partial X_{n+1}}{1.\partial x}-\frac{\Delta x.\partial X}{4.\partial x}\\
&-\frac{1}{8}\cdot\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X_{n+1}}{1.2.3(\partial x)^3}+\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X}{8.1.2.3(\partial x)^3}\\
&+\frac{1}{4}\cdot\frac{(\Delta x)^5\partial^5 X_{n+1}}{1.2\dots5(\partial x)^5}-\frac{(\Delta x)^5\partial^5 X}{4.1.2\dots5(\partial x)^5}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

$$547.\quad (n+1)X_0-nX_1+(n-1)X_2-\dots-X_n$$

$$\begin{aligned}
=&-\frac{X_{n+2}}{4}+\frac{(n+1)X}{2}+\frac{X_1}{4}\\
&+\frac{\Delta x.\partial X_{n+2}}{4.\partial x}-\frac{(n+1)\Delta x.\partial X}{4.\partial x}-\frac{\Delta x.\partial X_1}{4.\partial x}\\
&-\frac{(\Delta x)^2\partial^2 X_{n+2}}{8.1.2(\partial x)^2}+\frac{(\Delta x)^2\partial^2 X_1}{8.1.2(\partial x)^2}\\
&-\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X_{n+2}}{8.1.2.3(\partial x)^3}+\frac{(n+1)(\Delta x)^3\partial^3 X}{8.1.2.3(\partial x)^3}+\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X_1}{8.1.2.3(\partial x)^3}\\
&+\frac{(\Delta x)^4\partial^4 X_{n+2}}{4.1.2.3.4(\partial x)^4}-\frac{(\Delta x)^4\partial^4 X_1}{4.1.2.3.4(\Delta x)^4}\\
&+\frac{(\Delta x)^5\partial^5 X_{n+2}}{4.1.2\dots5(\partial x)^5}-\frac{(n+1)(\Delta x)^5\partial^5 X}{4.1.2\dots5(\partial x)^5}-\frac{(\Delta x)^5\partial^5 X_1}{4.1\dots5(\partial x)^5}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

u. s. w.

Die Vergleichung der in (543. — 545.) gewonnenen Resultate mit denen von (546.) und (547.) zeigt, dass sich die Summenausdrücke für Reihen von einer geraden Gliederanzahl nur dadurch von denen von ungerader Gliederanzahl unterscheiden, dafs die Glieder der ersten Scheitelreihe mit entgegengesetzten Zeichen versehen sind.

§. 126.

In den beiden vorhergehenden §§. haben wir solche Reihen betrachtet, deren Glieder mit den figurirten Zahlen verbunden sind, die in der Weise abnehmen, als der veränderliche Theil der Glieder, mit denen sie verbunden sind, zunehmen.

Wir suchen nun auf Summenausdrücke mittelst der Differenziale und Integrale darzustellen für solche Reihen, worin die Vorzahlen, die mit ihren Gliedern verbunden sind, eben so zunehmen, wie der veränderliche Theil der Glieder, mit denen sie verbunden sind. Wir erreichen unsern Zweck, wenn wir die in §. 90. — 92. gefundenen Gleichungen zum Grunde legen, und die negativen Unterschiede und Aufstufungen nach Angabe der Gleichungen (449. — 451.), durch Differenziale und Integrale dargestellt, einführen.

Betrachten wir nun zuerst solche Reihen, deren Glieder sämmtlich mit positiven Zeichen versehen sind, und gehen von den Gleichungen (449.) aus, so ist zu berücksichtigen, dafs die erste schon (540.) §. 124. dargestellt ist. Die Darstellung der zweiten Gleichung führt mit Berücksichtigung der Gleichungen (219.) und (220.) zu folgendem Resultate:

548. $$X_0+2X_1+3X_2+4X_3+\cdots+(n+1)X_n$$
$$=(n+1)\int\frac{X_{n+1}.\partial x}{\Delta x}-\int\frac{X_{n+1}.(\partial x)^2}{(\Delta x)^2}+\int^2\frac{X(\partial x)^2}{(\Delta x)^2}$$
$$+\int\frac{X_{n+1}.\partial x}{\Delta x}\quad-\int\frac{X.\partial x}{\Delta x}$$
$$-\frac{(n+1)X_{n+1}}{2}\qquad-\frac{5X_{n+1}}{12}\qquad+\frac{5X}{12}$$
$$-\frac{(n+1)\Delta x.\partial X_{n+1}}{2.6.\partial x}\quad+\frac{\Delta x.\partial X_{n+1}}{12.\partial x}\quad-\frac{\Delta x.\partial X}{12.\partial x}$$
$$-\frac{(\Delta x)^2\partial^2 X_{n+1}}{120.1.2(\partial x)^2}+\frac{(\Delta x)^2\partial^2 X}{120.1.2(\partial x)^2}$$
$$-\frac{(n+1)(\Delta x)^3\partial^3 X_{n+1}}{30.4.1.2.3(\partial x)^3}-\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X_{n+1}}{120.1.2.3(\partial x)^3}+\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X}{120.1.2.3.(\partial x)^3}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Die dritte Gleichung führt, mit Berücksichtigung von No. 219. und 220., zu folgender Darstellung:

$$
\begin{aligned}
549.\quad & X_0+\frac{2.3}{1.2}X_1+\frac{3.4}{1.2}X_2+\cdots+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}X_n \\
& \int^3\frac{X_{n+1}(\partial x)^3}{(\Delta x)^3}-\int^3\frac{X(\partial x)^3}{(\Delta x)^3} \\
& -\frac{n+1}{1}\int^2\frac{X_{n+1}(\partial x)^2}{(\Delta x)^2}-\frac{3}{2}\int^2\frac{X_{n+1}(\partial x)^3}{(\Delta x)^2}+\frac{3}{2}\int^2\frac{X(\partial x)^2}{(\Delta x)^2} \\
& +\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\int\frac{X_{n+1}.\partial x}{\Delta x}+\frac{n+1}{1}\int\frac{X_{n+1}.\partial x}{\Delta x}+\int\frac{X_{n+1}.\partial x}{\Delta x}-\int\frac{X.\partial x}{\Delta x} \\
& -\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}.\frac{X_{n+1}}{2}-\frac{(n+1).5.X_{n+1}}{12}-\frac{3.X_{n+1}.\partial x}{8}+\frac{3X}{8} \\
& +\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}.\frac{(\Delta x)\partial X_{n+1}}{12.\partial x}+\frac{(n+1)(\Delta x)\partial X_{n+1}}{12.\partial x}+\frac{19.\Delta x.\partial X_{n+1}}{240.\partial x}-\frac{19.\Delta x.\partial X}{240.\partial x} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

u. s. w. Die weitere Darstellung der angeführten Reihen mit ihren Summenausdrücken läfst sich leicht verfolgen.

So wie wir Summenausdrücke für Reihen, deren Glieder mit lauter positiven Zeichen verbunden sind, gefunden haben: so können wir auch Summenausdrücke für Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, aufsuchen. Die Gleichungen (114. — 116.) werden die entwickelten Darstellungen, die wir in (450.) und (451.) anzuführen haben, angeben. Wir unterscheiden zwischen Reihen von ungerader und gerader Gliederanzahl. Für Reihen von einer ungeraden Gliederanzahl erhalten wir aus der zweiten und dritten Gleichung von (450.) folgende Darstellungen:

$$
\begin{aligned}
550.\quad & X_0-2X_1+3X_2-\cdots+(n+1)X_n \\
& =\frac{(n+1)X_{n+1}}{2}+\frac{X_{n+1}}{4}+\frac{X}{4} \\
& -\frac{(n+1)\Delta x.\partial X_{n+1}}{4.\partial x}-\frac{\Delta x.\partial X_{n+1}}{4.\partial x}-\frac{\Delta x.\partial X}{4.\partial x} \\
& +\frac{(\Delta x)^2\partial^2 X_{n+1}}{8.1.2(\partial x)^2}+\frac{(\Delta x)^2\partial^2 X}{8.1.2(\partial x)^2} \\
& +\frac{(n+1)(\Delta x)^3\partial^3 X_{n+1}}{8.1.2.3(\partial x)^3}+\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X_{n+1}}{8.1.2.3(\partial x)^3}+\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X}{8.1.2.3(\partial x)^3} \\
& -\frac{(\Delta x)^4\partial^4 X_{n+1}}{4.1.2.3.4(\partial x)^4}-\frac{(\Delta x)^4\partial^4 X}{4.1.2.3.4(\partial x)^4} \\
& -\frac{(n+1)(\Delta x)^5.\partial^5 X_{n+1}}{4.1.2.3.4.5(\partial x)^5}-\frac{(\Delta x)^5\partial^5 X_{n+1}}{4.1\ldots.5(\partial x)^5}-\frac{(\Delta x)^5\partial^5 X}{4.1.2\ldots.5(\partial x)^5} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$551. \quad X_0 - \frac{2.3}{1.2}X_1 + \frac{3.4}{1.2}X_2 - \dots + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}X_n$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\cdot\frac{X_{n+1}}{4} \quad + \frac{n+1}{4}X_{n+1} \quad + \frac{X_{n+1}}{8} \quad + \frac{X}{8}$$

$$- \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\cdot\frac{\Delta x.\partial X_{n+1}}{4.\partial x} - \frac{n+1}{4}\cdot\frac{\Delta x.\partial X_{n+1}}{\partial x} - \frac{3\Delta x.\partial X_{n+1}}{16.\partial x} - \frac{3\Delta x.\partial X}{16.\partial x}$$

$$+ \frac{n+1}{8}\cdot\frac{(\Delta x)^2\partial^2 X_{n+1}}{1.2(\partial x)^2} + \frac{3(\Delta x)^2\partial^2 X_{n+1}}{16.1.2(\partial x)^2} + \frac{3(\Delta x)^2\partial^2 X}{16.1.2(\partial x)^2}$$

$$+ \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\cdot\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X_{n+1}}{8.1.2.3(\partial x)^3} + \frac{n+1}{8}\cdot\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X_{n+1}}{1.2.3(\partial x)^3}$$

$$- \frac{n+1}{4}\cdot\frac{(\Delta x)^4\partial^4 X_{n+1}}{1.2.3(\partial x)^4} + \frac{3(\Delta x)^4\partial^4 X_{n+1}}{8.1.2.3.4(\partial x)^4} - \frac{3(\Delta x)^4\partial^4 X}{8.1.2.3.4(\partial x)^4}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Für Reihen derselben Art von einer geraden Gliederanzahl gewinnt man aber nach (451.):**

$$552. \quad X_0 - 2X_1 + 3X_2 - \dots - (n+1)X_n$$

$$= -\frac{(n+1)X_{n+1}}{2} \quad - \frac{X_{n+1}}{4} \quad + \frac{X}{4}$$

$$+ \frac{(n+1)\Delta x.\partial X_{n+1}}{4.\partial x} \quad + \frac{\Delta x.\partial X_{n+1}}{4.\partial x} \quad - \frac{\Delta x.\partial X}{4.\partial x}$$

$$- \frac{(\Delta x)^2\partial^2 X_{n+1}}{8.1.2(\partial x)^2} \quad + \frac{(\Delta x^2)\partial^2 X}{8.1.2(\partial x)^2}$$

$$- \frac{(n+1)(\Delta x)^3\partial^3 X_{n+1}}{8.1.2.3(\partial x)^3} - \frac{(\Delta x)^3\partial^3 X_{n+1}}{8.1.2.3(\partial x)^4} + \frac{(\Delta x)^3\partial^3 X_{n+1}}{8.1.2.3(\partial x)^4}$$

$$+ (\Delta x)^4\partial^4 X_{n+1} \quad - (\Delta x)^4\partial^4 X$$

$$- \frac{(n+1)(\Delta x)^5\partial^5 X_{n+1}}{4.1.2\dots5(\partial x)^5} - \frac{(\Delta x)^5.\partial^5 X_{n+1}}{4.1.2\dots5(\partial x)^5} - \frac{(\Delta x)^5\partial^5 X}{4.1.2\dots5(\partial x)^5}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$553. \quad X_0 - \frac{2.3}{1.2}X_1 + \frac{3.4}{1.2}X_2 - \dots - \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}X_n$$

$$= -\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\cdot\frac{X_{n+1}}{2} \quad - \frac{n+1}{4}.X_{n+1} \quad - \frac{X_{n+1}}{8} \quad + \frac{X}{8}$$

$$+ \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\cdot\frac{(\Delta x)\partial X_{n+1}}{4.\partial x} + \frac{n+1}{4}\cdot\frac{(\Delta x)\partial X_{n+1}}{\partial x} + \frac{3\Delta x.\partial X_{n+1}}{16.\partial x} + \frac{3\Delta x.\partial X}{16.\partial x}$$

$$- \frac{n+1}{8}\cdot\frac{(\Delta x)^2\partial^2 X_{n+1}}{1.2(\partial x)^2} - \frac{3(\Delta x)^2\partial^2 X_{n+1}}{16.1.2(\partial x)^2} + \frac{3(\Delta x)^2\partial^2 X}{16.1.2(\partial x)^2}$$

$$- \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\cdot\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X_{n+1}}{8.1.2.3(\partial x)^3} - \frac{n+1}{8}\cdot\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X_{n+1}}{1.2.3(\partial x)^3}$$

$$+ \frac{n+1}{4}\cdot\frac{(\Delta x)^4\partial^4 X_{n+1}}{1.2.3.4(\partial x)^4} + \frac{3(\Delta x)^4\partial^4 X_{n+1}}{8.1.2.3.4(\partial x)^4} - \frac{3(\Delta x)^4\partial^4 X}{8.1.2.3.4(\partial x)^4}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Man erkennt leicht, dafs sich die Gleichungen (550.) und (551.), die für Reihen von ungerader Gliederanzahl gelten, von denen, die für Reihen von gerader Gliederanzahl gelten, nur durch entgegengesetzte Zeichen der drei ersten Scheitelreihen im Summenausdrucke unterscheiden.

## Anwendungen.

### §. 127.

Nachdem wir nun die Reihen, nebst ihren Summenausdrücken, für einfache Functionen, ihrer allgemeinen Form nach, in den §§. 124—126. gegeben haben, so wenden wir uns nun zu Anwendungen dieser Gleichungen.

Man bemerkt, dafs alle Gleichungen in den genannten §§. auf unendliche Reihen führen. Deswegen möchte es dem ersten Blicke nach scheinen, dafs sie für Summirung der Reihen unbrauchbar sind. Sie sind aber dennoch sehr brauchbar, und besonders in dem Falle, wenn die fortgesetzte Differenziation einer erzeugenden Function auf 0, oder auf solche Ausdrücke führt, deren spätere Differenziale sehr convergiren, wie dies bei Bruchfunctionen und Functionen der Logarithmen der Fall ist.

Berücksichtigen wir endlich, dafs es uns nicht gelang den Summenausdruck für Reihen der Logarithmen, harmonische Reihen u. s. w. in der fünften Abhandlung finden zu können, weil wir die negativen Unterschiede und Aufstufungen dieser Functionen direct nicht darzustellen vermochten; so müssen uns die hier gewonnenen Summenausdrücke um so willkommener sein, weil sie uns in Stand setzen, das Vermifste nachholen und unsere Aufgabe ihrer Auflösung näher zu bringen.

Wir wenden uns daher nach diesen Bemerkungen zu der Summirung der sogenannten harmonischen Reihe, deren Glieder mit positiven Zeichen versehen sind. Wir finden ihre Summe, wenn wir in der Gleichung (540.) $X=\frac{1}{x}$ setzen. Dann entsteht

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\Delta x}+\frac{1}{x+2\Delta x}+\dots+\frac{1}{x+n\Delta x}\\
&=\int\frac{\partial x}{\Delta x(x+(n+1)\Delta x)} && -\int\frac{\partial x}{\Delta x.x}\\
&\quad-\frac{1}{2(x+(n+1)\Delta x)} && +\frac{1}{2x}\\
&\quad+\frac{\Delta x}{12}\partial\frac{1}{(x+(n+1)\Delta x)\partial x} && -\frac{\Delta x}{12}\partial\frac{1}{x.\partial x}\\
&\quad-\frac{(\Delta x)^3}{120}\partial^3\frac{1}{1.2.3(x+(n+1)\Delta x)(\partial x)^3} && +\frac{(\Delta x)^3}{120}\partial^3\frac{1}{1.2.3.x.\partial x}\\
&\quad\dots\dots\dots\dots && \dots
\end{aligned}$$

**Berücksichtigen wir, dafs auch hier das letzte Glied mit den Gliedern der ersten Scheitelreihe im Summenausdrucke nicht übereinstimmt, so läfst sich diese Übereinstimmung dadurch herbeiführen, dafs $\frac{1}{x+(n+1)\Delta x}$ auf beiden Seiten zugezählt, und dann allenthalben $n-1$ statt $n$ gesetzt wird. Geschieht dies, so gewinnen wir folgende Darstellung:**

$$554.\qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{x+\Delta x}+\frac{1}{x+2\Delta x}+\cdots+\frac{1}{x+n\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{\Delta x}\int\frac{\partial x}{(x+n\Delta x)} && -\frac{1}{\Delta x}\int\frac{\partial x}{x}\\
&+\frac{1}{2(x+n\Delta x)} && +\frac{1}{2x}\\
&+\frac{\Delta x}{12}\,\partial\,\frac{1}{(x+n\Delta x)}\cdot\frac{1}{\partial x} && -\frac{\Delta x}{12}\,\partial\,\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\partial x}\\
&-\frac{(\Delta x)^3}{120}\,\partial^3\,\frac{1}{(x+n\Delta x)}\cdot\frac{1}{1.2.3(\partial x)^3} && +\frac{(\Delta x)^3}{120}\,\partial^3\,\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1.2.3(\partial x)^3}\\
&+\frac{(\Delta x)^5}{252}\,\partial^5\,\frac{1}{(x+n\Delta x)}\cdot\frac{1}{1.2....5(\partial x)^5} && -\frac{(\Delta x)^5}{252}\,\partial^5\,\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1.2....5(\partial x)^5}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

**Um diese Reihe summiren zu können, sind uns die Integrale und Differenziale der angezeigten Functionen nöthig. Nun ist bekanntlich**

$$\int\frac{\partial x}{(x+n\Delta x)}=\log(x+n\Delta x)\qquad\text{und}\qquad\int\frac{\partial x}{x}=\log x;$$

**ferner**

$$\partial^r\frac{1}{(x+n\Delta x)^q}\cdot\frac{1}{(\partial x)^r}=(-)^r\,\frac{q(q+1)(q+2)....(q+r-1)}{(x+n\Delta x)^{q+r}}$$

**und**

$$\partial^r\,\frac{1}{x^q}\cdot\frac{1}{(\partial x)^r}=(-)^r\,\frac{q(q+1)(q+2)....(q+r-1)}{x^{q+r}}.$$

**Werden diese angezeigten Werthe eingeführt, so entsteht folgende Reihe mit ihrem Summenausdrucke:**

$$555.\qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{x+\Delta x}+\frac{1}{x+2\Delta x}+\cdots+\frac{1}{x+n\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
=\frac{\log(x+n\Delta x)}{\Delta x}+\frac{1}{2(x+n\Delta x)}-\frac{\Delta x}{6.2(x+n\Delta x)^2}+\frac{(\Delta x)^3}{30.4(x+n\Delta x)^4}-\frac{(\Delta x)^5}{42.6(x+n\Delta x)^6}+\cdots\\
-\frac{\log x}{\Delta x}+\frac{1}{2x}+\frac{\Delta x}{6.2x^2}-\frac{(\Delta x)^3}{30.4x^4}+\frac{(\Delta x)^5}{42.6x^6}-\frac{(\Delta x)^7}{30.8x^8}+\cdots
\end{aligned}$$

**Die beiden Reihen im Summenausdrucke sind der Form nach unendlich. Sie werden dann sehr brauchbar sein, wenn sie selbst sehr stark convergiren. Ihre Convergenz hängt davon ab, dafs $\Delta x$ im Verhältnisse zu $x$ eine kleine Zahl sei.**

Sind $x$ und $n$ sehr grofse Zahlen, und ist $\Delta x = 1$, so erkennt man leicht, dafs einige der ersten Glieder der beiden Reihen im Summenausdrucke hinreichen, um den Werth mit grofser Genauigkeit darzustellen. Soll aber die Reihe für den Fall summirt werden, wenn $x = 1$ ist: dann mufs der Werth der zweiten Reihe von vorn bestimmt werden. Dieser findet sich dadurch, dafs man für $n$ und $\Delta x$ einen bestimmten Werth annimmt, und dann nach dieser Annahme den Werth der Reihe selbst und den der ersten Reihe im Summenausdrucke berechnet, und hieraus den der zweiten bestimmt. Hat man den Werth dieser Reihe für einen speciellen Fall berechnet, so gilt er auch für jeden andern, unter denselben Bedingungen für $n$ und $\Delta x$. Setzen wir daher $x = 1$, $n = 9$ und $\Delta x = 1$, so erhalten wir aus (555.), da $\log 1 = 0$ ist,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{4.30} + \frac{1}{6.42} - \frac{1}{8.30} + \dots$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} - \log 10 - \frac{1}{2.10} + \frac{1}{12.10^2} - \frac{1}{30.4.10^4} + \dots$$
$$= 0{,}5772156 \dots$$

Den so eben gefundenen Werth begreift man gewöhnlich unter dem Namen der Constante; aber mit Unrecht; denn man sieht, dafs der Werth dieser Reihe, womit man gewöhnlich die Constante bezeichnet, eben so willkürlich und veränderlich ist, als die übrigen Theile des Summenausdruckes selbst. Der gefundene Werth gilt immer nur für den Fall, wenn die harmonische Reihe von 1 an beginnt und $\Delta x = 1$ ist. Daher erhalten wir folgende Gleichung:

$$556. \quad 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$
$$= \log n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6.2n^2} + \frac{1}{30.4.n^4} - \frac{1}{42.6.n^6} + \dots + 0{,}5572156 \dots$$

Bei anderen Werthen für die oben genannten Gröfsen mufs der Werth der zweiten Reihe wieder anders bestimmt werden. Ist die Reihe selbst unendlich, so gewinnen wir folgendes Resultat:

$$557. \quad 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \dots = \log \infty + 0{,}5772156 \dots$$

Den Summenausdruck für diese Reihe hat Euler in seiner Differenzial-Rechnung Thl. II. Cap. 6. §. 142. u. s. f. (Übersetzung von Michelsen) mit weitern Anwendungen gegeben. Wir verweisen den Leser hierauf, und glauben unserem Plane zu genügen, wenn wir die aus unserer Me-

thode entnommene Entwickelung einer allgemeineren Gleichung vorgelegt haben. Wir wenden uns nun zur Aufsuchung eines Summenausdruckes für Logarithmenreihen; denn die Summenausdrücke für die reciproke Potenzenreihen haben wir schon §. 78 gegeben.

## §. 128.

Summirung der Logarithmenreihen, deren Glieder mit positiven Zeichen verbunden sind.

Wir finden den Summenausdruck für Logarithmenreihen, wenn wir in der Gleichung (540.) $X_0 = \log x$ setzen. Dann erhalten wir:

$$\log x + \log(x+\Delta x) + \log(x+2\Delta x) + \cdots + \log(x+n\Delta x)$$
$$= \int \frac{\log(x+(n+1)\Delta x)\partial x}{\Delta x} \quad - \int \frac{\log x . \partial x}{\Delta x}$$
$$- \frac{\log(x+(n+1)\Delta x)}{2} \quad + \frac{\log x}{2}$$
$$+ \frac{\Delta x}{6.2} . \frac{\partial^2 \log(x+(n+1)\Delta x)}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2.6} . \frac{\partial \log x}{\partial x}$$
$$- \frac{(\Delta x)^3}{4.30} . \frac{\partial^3 \log(x+(n+1)\Delta x)}{1.2.3(\partial x)^3} + \frac{(\Delta x)^3}{4.30} . \frac{\partial^3 \log x}{1.2.3(\partial x)^3}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^5}{6.42} . \frac{\partial^5 \log(x+(n+1)\Delta x)}{1.2....5(\partial x)^5} - \frac{(\Delta x)^5}{6.42} . \frac{\partial^5 \log x}{1.2....5(\partial x)^5}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Berücksichtigen wir, dafs das letzte Glied in der Summenreihe mit den Gliedern der ersten Scheitelreihe des Summenausdruckes nicht übereinstimmt, so wird sich diese Übereinstimmung leicht ergeben, wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens $\log(x+(n+1)\Delta x)$ zuzählt und dann $n-1$ statt $n$ setzt. Hiernach erhalten wir

55. $$\log x + \log(x+\Delta x) + \log(x+2\Delta x) + \cdots + \log(x+nxx)$$
$$= \frac{1}{\Delta x} \int \log(x+n\Delta x)\partial x - \frac{1}{\Delta x} \int \log x . \partial x$$
$$+ \frac{\log(x+n\Delta x)}{2} + \frac{\log x}{2}$$
$$+ \frac{\Delta x}{2.6} . \frac{\partial \log(x+n\Delta x)}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2.6} . \frac{\partial \log x}{\partial x}$$
$$- \frac{(\Delta x)^3}{4.30} . \frac{\partial^3 \log(x+n\Delta x)}{1.2.3(\partial x)^3} + \frac{(\Delta x)^3}{4.30} . \frac{\partial^3 \log x}{1.2.3(\partial x)^4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Darstellung des vorliegenden Summenausdrucks beruht auf der Darstellung der angezeigten Integrale und Differenziale. Nun ist bekanntlich

$$\int \log(x+n\Delta x)\,\partial x = (x+n\Delta x)\log(x+n\Delta x)-(x+n\Delta x),$$
$$\int \log x\,\partial x = x\log x - x,$$

und ferner

$$\frac{\partial^r \log(x+n\Delta x)}{(\partial x)^r} = (-)^{r-1}\frac{1.2.3\ldots.(r-1)}{(x+n\Delta x)^r},$$
$$\frac{\partial^r \log x}{(\partial x)^r} = (-)^{r-1}\frac{1.2.3\ldots.(r-1)}{x^r}.$$

Werden nun die erforderlichen Werthe eingeführt, so erhält man folgende Reihe für Logarithmen, nebst ihrem Summenausdrucke:

559. $\log x + \log(x+\Delta x) + \log(x+2\Delta x) \cdots + \log(x+n\Delta x)$

$$= \frac{(x+n\Delta x)}{\Delta x}\log(x+n\Delta x) - \frac{x+n\Delta x}{\Delta x} - \frac{x\log x}{\Delta x} + \frac{x}{\Delta x}$$
$$+\frac{\log(x+n\Delta x)}{2} \qquad\qquad +\frac{\log x}{2}$$
$$+\frac{\Delta x}{2.6}\cdot\frac{1}{(x+n\Delta x)} \qquad\qquad -\frac{\Delta x}{2.6x}$$
$$-\frac{(\Delta x)^3}{4.30.3(x+n\Delta x)^3} \qquad\qquad +\frac{(\Delta x)^3}{4.30.3x^3}$$
$$+\frac{(\Delta x)^5}{6.42.5(x+n\Delta x)^5} \qquad\qquad -\frac{(\Delta x)^5}{6.42.5x^5}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Bedeuten $x$ und $n$ sehr grofse Zahlen, und ist $\Delta x$ im Verhältnisse zu ihnen klein: so convergiren die beiden Reihen im Summenausdrucke sehr schnell; und dann reichen einige der ersten Glieder schon hin, um den gesuchten Summenausdruck sehr genau darzustellen.

Will man aber die Reihe der Logarithmen von der Einheit an gerechnet summiren, so wird $x=1$ und $\Delta x=1$ zu setzen sein. Setzt man dann ferner $n-1$ statt $n$, so geht die vorstehende Reihe in folgende über:

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n$$
$$= n.\log n - n + \tfrac{1}{2}\log n + \frac{1}{12.n} - \frac{1}{4.30.3n^3} + \cdots$$
$$-\log 1 + 1 + \frac{\log 1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{4.30.3} - \cdots$$

Man erkennt leicht, dafs die Möglichkeit, den gesuchten Summenausdruck darzustellen, auf der Möglichkeit, den Werth der zweiten begleitenden Reihe darzustellen, beruht. Auch hier wird das im vorigen §. gewählte Verfahren, für irgend einen Werth von $n$ die Summe zu berechnen und daraus den Werth für die fragliche Reihe abzuleiten, zum Ziele führen. Setzen

wir $n = 10$, so wird

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n - 10.\log 10 + 10 - \tfrac{1}{2}\log 10$$
$$- \frac{1}{12.10} + \frac{1}{4.30.310^3} - \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{4.30.3} - \frac{6}{6.42.5} + \cdots = 0{,}9189386\ldots;$$

und dieser Werth ist gleich dem halben Logarithmus von $2\pi$, wenn $\pi$ das bekannte Verhältnifs des Durchmessers zur Kreislinie bezeichnet. Dieser Werth bleibt für alle Fälle, die den so eben angegebenen Bedingungen entsprechen, unverändert, und es ist daher

$$560.\quad \log 1 + \log 2 + \log 3 \cdots + \log n$$
$$= (n + \tfrac{1}{2})\log n + \log 2\pi - n + \frac{1}{12.n} - \frac{1}{4.30.3n^3} + \frac{1}{6.42.5n^5} - \cdots$$

Da bekanntlich

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \log 4 + \cdots + \log n = 1.2.3.4\ldots n,$$

so dient die vorliegende Gleichung (560.) dazu, die Factorenfolgen in kurzen Ausdrücken darzustellen, wenn nur $n$ eine hinlängliche grofse Zahl bedeutet. Über die weitere Anwendung der Gleichung (560.) auf Darstellung der Facultätenproducte vergleiche man §. 199. meines Differenzialcalculs; ferner Eulers Differenzialrechnung §. 157. u. ff. Auch verweisen wir hierüber auf §. 46., wo noch andere Methoden für die Darstellung der Factorenproducte gegeben sind.

Auch diesen Darstellungen liegen hyperbolische Logarithmen zum Grunde.

§. 25.

Wir wenden uns jetzt zu der Darstellung der Summenausdrücke für Logarithmen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind. Um sie zu gewinnen, setzen wir in der Gleichung (543.) $X = \log x$, und erhalten für eine Reihe von ungerader Gliederanzahl:

$$\log x - \log(x + \Delta x) + \log(x + 2\Delta x) - \cdots + \log(x + n\Delta x)$$
$$= \frac{\log(x + (n+1)\Delta x)}{2} \qquad - \frac{\log x}{2}$$
$$- \frac{\Delta x.\partial \log(x + (n+1)\Delta x)}{4.\Delta x} \qquad - \frac{\Delta x.\partial \log x}{4.\partial x}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 \log(x + (n+1)\Delta x)}{8.1.2.3(\partial x)^3} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 \log x}{8.1.2.3(\partial x)^3}$$
$$- \frac{(\Delta x)^5 \partial^5 \log(x + (n+1)\Delta x)}{4.1.2\ldots 5(\partial x)^5} - \frac{(\Delta x)^5 \partial^5 \log x}{4.1.2\ldots 5(\partial x)^5}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Für eine Reihe von gerader Gliederanzahl erhalten wir aus (546.) folgende Gleichung:

$$\log x - \log(n + \Delta x) + \log(x + 2\Delta x) - \cdots - \log(x + n\Delta x)$$
$$= -\frac{\log(x+(n+1)\Delta x)}{2} + \frac{\log x}{2}$$
$$+ \frac{\Delta x . \partial \log(x+(n+1)\Delta x)}{4\partial x} - \frac{\Delta x . \partial \log x}{4\partial x}$$
$$- \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 \log(x+(n+1)\Delta x)}{8.1.2.3(\partial x)^3} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 \log x}{8.1.2.3(\partial x)^3}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^5 \partial^5 \log(x+(n+1)\Delta x)}{4.1.2\ldots.5(\partial x)^5} - \frac{(\Delta x)^5 . \partial^5 \log x}{4.1.2.3.4.5(\partial x)^5}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

In beiden vorliegenden Gleichungen stimmt das letzte Glied der Reihe nicht mit den Ausdrücken in der ersten Scheitelreihe des Summenausdruckes überein. Um eine Übereinstimmung herbeizuführen, haben wir in der ersten Gleichung $\log(x+(n+1)\Delta x)$ ab-, in der zweiten zuzuzählen. Geschieht dies, und wird dann, der kürzeren Darstellung wegen, $n-1$ statt $n$ gesetzt, so entsteht für eine Reihe von ungerader Gliederanzahl nach der zweiten Darstellung:

561. $$\log x - \log(x + \Delta x) + \log(x + 2\Delta x) - \cdots + \log(x + n\Delta x)$$
$$= \frac{\log(x+n\Delta x)}{2} + \frac{\log x}{2}$$
$$+ \frac{\Delta x . \partial \log(x+n\Delta x)}{4.\partial x} - \frac{\Delta x . \partial \log x}{4.\partial x}$$
$$- \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 \log(x+n\Delta x)}{8.1.2.3(\partial x)^3} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 \log x}{8.1.2.3(\partial x)^3}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^5 \partial^5 \log(x+n\Delta x)}{4.1.2\ldots.5(\partial x)^5} - \frac{(\Delta x)^5 \partial^5 \log x}{4.1.2\ldots.5(\partial x)^5}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

für eine Reihe von gerader Gliederanzahl aber

562. $$\log x - \log(x + \Delta x) + \log(x + 2\Delta x) \cdots - \log(x + n\Delta x)$$
$$= -\frac{\log(x+n\Delta x)}{2} + \frac{\log x}{2}$$
$$- \frac{\Delta x . \partial \log(x+n\Delta x)}{4.\partial x} - \frac{(\Delta x) \partial \log x}{4.\partial x}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 \log(x+n\Delta x)}{8.1.2.3(\partial x)^3} - \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 \log x}{8.1.2.3(\partial x)^3}$$
$$- \frac{(\Delta x)^5 \partial^5 \log(x+n\Delta x)}{4.1.2.3.4.5(\partial x)^5} - \frac{(\Delta x)^5 \partial^5 \log x}{4.1.2\ldots.5(\partial x)^5}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Die Differenziale der Logarithmen, die in den hier angegebenen Summenausdrücken angezeigt werden, bestimmen sich nach den Formeln, welche im §. 128. angegeben wurden. Ihre Einführung giebt folgende Darstellung aus (561.):

$$563.\quad \log x - \log(x+\Delta x) + \log(x+2\Delta x) - \cdots + \log(x+n\Delta x)$$
$$= \frac{\log(x+n\Delta x)}{2} + \frac{\log x}{2}$$
$$+ \frac{\Delta x}{4(x+n\Delta x)} - \frac{\Delta x}{4x}$$
$$- \frac{(\Delta x)^3}{8.3(x+n\Delta x)^3} + \frac{(\Delta x)^3}{8.3x^3}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^5}{4.5(x+n\Delta x)^5} - \frac{(\Delta x)^5}{4.5x^5}$$
$$- \frac{17(\Delta x)^7}{16.7(x+n\Delta x)^7} + \frac{17(\Delta x)^7}{16.7x^7}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Aus (562.) erhalten wir aber

$$564.\quad \log x - \log(x+\Delta x) + \log(x+2\Delta x) - \cdots - \log(x+n\Delta x)$$
$$= -\frac{\log(x+n\Delta x)}{2} - \frac{\Delta x}{4(x+n\Delta x)} + \frac{(\Delta x)^3}{8.3(x+n\Delta x)^3} - \frac{(\Delta x)^5}{4.5(x+n\Delta x)^5} + \cdots$$
$$+ \frac{\log x}{2} \qquad - \frac{\Delta x}{4x} \qquad + \frac{(\Delta x)^3}{8.3x^3} \qquad - \frac{(\Delta x)^5}{4.5x^5} + \cdots$$

Man erkennt, dafs die Brauchbarkeit der gefundenen Summenausdrücke für Logarithmenreihen auf der schnellen Convergenz der Reihen des Summenausdruckes beruht. Sind $n$ und $x$ grofse Zahlen, so convergiren diese Reihen schnell, und dann sind oft nur wenige Anfangsglieder nöthig, um den Summenausdruck erschöpfend genau darzustellen. Nehmen wir z. B. $x = 100$, $\Delta x = 1$, $n = 900$ an, so erhalten wir aus (563.)

$$\log 100 - \log 101 + \log 102 - \cdots + \log 1000$$
$$= \frac{\log 1000}{2} + \frac{1}{4.1000} - \frac{1}{24.1000^3} + \frac{1}{20.1000^5} - \cdots$$
$$+ \frac{\log 100}{2} - \frac{1}{4.100} + \frac{1}{24.100^3} - \frac{1}{20.100^5} + \cdots$$

Berücksichtigen wir, dafs diese Zahlen hyperbolische Logarithmen andeuten, so erhalten wir für den Summenausdruck, wenn wir statt der Logarithmen die Zahlen schreiben:

$$\frac{100.102.104\ldots 1000}{101.103.105\ldots 999} = N\log.\text{nat}.5{,}7542127741\ldots$$

Betrachtet man die Geschäfte und den Zeitaufwand, welche die entwickelte Darstellung des Werthes von

$$\frac{100.102.104\ldots.1000}{101.103.105\ldots.\ 999}$$

erfordert, mit der, welche die Berechnung von 4 bis 5 Gliedern im Summenausdrucke nöthig macht, so ist leicht der grofse Vortheil einzusehen, welchen die eben aufgefundenen Summenausdrücke gewähren.

Soll aber die Summe für Logarithmen, von der Einheit an gerechnet, gefunden werden, so ist $x=1$ und $\Delta x=1$, und ferner $n-1$ statt $n$ zu setzen. Hiernach finden wir aus (563.) für eine Reihe von ungerader Gliederanzahl:

$$565.\quad \log 1-\log 2+\log 3-\cdots+\log n$$
$$=\frac{\log n}{2}+\frac{1}{4n}-\frac{1}{24n^3}+\frac{1}{20n^5}-\frac{17}{16.7n^7}+\cdots$$
$$+\frac{\log 1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}-\frac{1}{20}+\frac{17}{16.7}-\cdots,$$

und für eine Reihe von gerader Gliederanzahl:

$$556.\quad \log 1-\log 2+\log 3-\cdots-\log n$$
$$=-\frac{\log n}{2}-\frac{1}{4n}+\frac{1}{24n^3}-\frac{1}{20n^5}+\frac{17}{16.7n^7}-\cdots$$
$$+\frac{\log 1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}-\frac{1}{20}+\frac{17}{16.7}-\cdots$$

Die Darstellung des Summenausdruckes der vorliegenden Reihe beruht auf der Darstellung des Werthes der zweiten Horizontalreihe. Er wird dadurch gefunden, dafs man irgend einen bestimmten Werth für $n$ annimmt und daraus den fraglichen Werth wie in den beiden früheren Fällen berechnet.

Andere merkwürdige Reihen mit ihren Summenausdrücken bekommt man, wenn man die Gleichungen (550.) und (552.) zum Grunde legt, darin $x=\log x$ setzt, und dann die angezeigten Geschäfte ausführt. Geschieht dies, so gewinnt man folgende Darstellung:

567. $\log x - 2\log(x+\Delta x) + 3\log(x+2\Delta x) - \cdots + (n+1)\log(x+n\Delta x)$

$$= \frac{(n+1)\log(x+(n+1)\Delta x)}{2} + \frac{\log(x+(n+1)\Delta x)}{4} + \frac{\log x}{4}$$
$$-\frac{(n+1)\Delta x}{4(x+(n+1)\Delta x)} \quad -\frac{\Delta x}{4(x+(n+1)\Delta x)} \quad -\frac{\Delta x}{4x}$$
$$-\frac{(\Delta x)^2}{8.2(x+(n+1)\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{8.2x^2}$$
$$+\frac{(n+1)(\Delta x)^3}{8.3(x+(n+1)\Delta x)^3} \quad +\frac{(\Delta x)^3}{8.3(x+(n+1)\Delta x)^3} + \frac{(\Delta x)^3}{8.3x^3}$$
$$+\frac{(\Delta x)^4}{4.4(x+(n+1)\Delta x)^4} + \frac{(\Delta x)^4}{4.4x^4}$$
$$-\frac{(n+1)(\Delta x)^5}{4.5(x+(n+1)\Delta x)^5} \quad -\frac{(\Delta x)^5}{4.5(x+(n+1)\Delta x)^5} - \frac{(\Delta x)^5}{4.5x^5}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

568. $\log x - 2\log(x+\Delta x) + 3\log(x+2\Delta x) - \cdots - (n+1)\log(x+n\Delta x)$

$$= -\frac{(n+1)\log(x+(n+1)\Delta x)}{2} - \frac{\log(x+(n+1)\Delta x)}{4} + \frac{\log x}{4}$$
$$+\frac{(n+1)\Delta x}{4(x+(n+1)\Delta x)} \quad +\frac{\Delta x}{4(x+(n+1)\Delta x)} \quad -\frac{\Delta x}{4.x}$$
$$+\frac{(\Delta x)^2}{8.2(x+(n+1)\Delta x)} - \frac{(\Delta x)^2}{8.2x^2}$$
$$-\frac{(n+1)(\Delta x)^3}{8.3(x+(n+1)\Delta x)^3} \quad -\frac{(\Delta x)^3}{8.3(x+(n+1)\Delta x)^3} + \frac{(\Delta x)^3}{8.3x^3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Auch die hier gefundenen Summenausdrücke convergiren sehr stark, wenn $x$, $n$ sehr grofse Zahlen bedeuten. Setzen wir z. B. $x = 10$, $n = 900$ und $\Delta x = 1$, so erhalten wir aus (567.):

$$\log 100 - 2\log 101 + 3\log 102 - \cdots + 901\log 1000$$
$$= \frac{901\log 1000}{2} + \frac{\log 100}{4} + \frac{\log 100}{4}$$
$$-\frac{901}{4.1000} \quad -\frac{1}{4.1000} \quad -\frac{1}{4.100}$$
$$-\frac{1}{16.1000^2} - \frac{1}{16.100^2}$$
$$+\frac{901}{24.1000^4} \quad +\frac{1}{24.1000^3} + \frac{1}{24.100^3}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Werden die angezeigten Werthe berechnet, und wird berücksichtigt, dafs $a \log p = p^a$ ist, so gewinnen wir folgendes merkwürdige Resultat:

569. $$\frac{100.102^3.104^5.106^7\ldots.1000^{901}}{101^2.103^4.105^6.107^8\ldots.\ 999^{900}} = \text{log. nat. } 3112{,}973277040\ldots.$$

Man erkennt hieraus den Vortheil, welchen der Calcul gewährt, um so mehr, da die Arbeit, welche die Werthbestimmung des vorstehenden Quotienten bei Ausführung der wirklichen Multiplication und Division erforderte, sich auf Monate und vielleicht Jahre belaufen dürfte. Diese Behauptung wird um so weniger übertrieben erscheinen, wenn man berücksichtigt, dafs die wirkliche Potenzirung der Zahl $999^{900}$ eine Zahl von 2700 Stellen erzeugen würde.

Die Auflösung der vorgelegten Aufgabe wäre schon darum interessant genug, wenn sie auch nichts anderes als die Überzeugung, wie schnell man durch Hülfe der Analysis scheinbar ungeheure Arbeiten auszuführen im Stande ist, klar vor Augen stellte.

Wir glauben die Methode, wie durch Differenziale und Integrale die Summe der durch einfache Functionen erzeugten Reihen gefunden werden können, hinlänglich gezeigt zu haben. Daher überlassen wir die weitere Anwendung dieser Methode den Zwecken des Lesers und wenden uns zu der Summirung solcher Reihen, die durch zusammengesetzte Functionen erzeugt werden, und verweisen über manches hieher gehörige auf die 7te Abhandlung in unserem Differenzial-Calcul.

---

## *B.* Summenrechnung für zusammengesetzte Reihen mittelst der Differenziale und Integrale ihrer einfachen Functionen.

### §. 130.

Um Summenausdrücke für Reihen, die durch zusammengesetzte Functionen erzeugt werden, aufzufinden, legen wir die in §. 104. u. ff. dargestellten Gleichungen zum Grunde, und führen statt der Unterschiede und Aufstufungen ihre Darstellung durch Differenziale und Integrale ein. Die Ausdrücke, die wir hierdurch gewinnen, werden in den meisten Fällen sehr weitläufig erscheinen: doch darf dies nicht abschrecken, weil die hieraus sich ergebenden Resultate demungeachtet in der Anwendung häufig bedeutende Abkürzungen zulassen.

Legen wir nun die Gleichung (273.) zum Grunde:

$$\begin{aligned} &X_0 Y_0 + X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \dots + X_n Y_n \\ = &X_{n+1} \Delta^{-1} Y_{n+1} - \Delta X_{n+1} \Delta^{-2} Y_{n+2} + \Delta^2 X_{n+1} \Delta^{-3} Y_{n+2} - \dots \\ &- X \Delta^{-1} Y \quad + \Delta X \quad \Delta^{-2} Y_1 \quad + \Delta^2 X \quad \Delta^{-3} Y_2 \quad + \dots, \end{aligned}$$

so ist es unserer Willkühr überlassen, ob wir die positiven oder negativen Unterschiede, oder beide zugleich, durch Differenziale dargestellt, in den Summenausdruck einführen. Beide zugleich einzuführen würde zu weitläufige Darstellungen erzeugen; die Einführung der negativen Unterschiede würde zudem bei der Anwendung manche Schwierigkeit mit sich bringen. Daher möchte es am zweckmäſsigsten sein, die positiven Unterschiede allein durch Differenziale darzustellen. Wir benutzen zu dem Ende die Gleichungen (214.) und behalten die negativen Unterschiede in der vorliegenden Darstellung bei. Hiernach erhalten wir

$$570. \quad X_0 Y_0 + X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \dots + X_n Y_n$$

$$\begin{aligned} = &X_{n+1} . \Delta^{-1} Y_{n+1} \\ &- \Delta^{-2} Y_{n+2} \left( \frac{\Delta x . \partial X_{n+1}}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_{n+1}}{1.2 (\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_{n+1}}{1.2.3 (\partial x)^3} + \dots \right) \\ &+ \Delta^{-3} Y_{n+3} \left( \frac{1.2 (\Delta x)^2 \partial^2 X_{n+1}}{1.2 (\partial x)^2} + \frac{6 (\Delta x)^3 \partial^3 X_{n+1}}{1.2.3 (\partial x)^3} + \frac{14 (\Delta x)^4 \partial^4 X_{n+1}}{1.2.3.4 (\partial x)^4} + \dots \right) \\ &- \Delta^{-4} Y_{n+4} \left( \frac{1.2.3 (\Delta x)^3 \partial^3 X_{n+1}}{1.2.3 (\partial x)^3} + \frac{36 (\Delta x)^4 \partial^4 X_{n+1}}{1.2.3.4 (\partial x)^4} + \frac{150 (\Delta x)^5 \partial^5 X_{n+1}}{1.2 \dots 5 (\partial x)^5} + \dots \right) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &X . \Delta^{-1} Y \\ &+ \Delta^{-2} Y_1 \left( \frac{\Delta x . \partial X}{1 . \partial x} + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X}{1.2 (\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3 (\Delta x)^3} + \dots \right) \\ &- \Delta^{-3} Y_2 \left( \frac{1.2 (\Delta x)^2 \partial^2 X}{1.2 (\partial x)^2} + \frac{6 (\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3 (\partial x)^3} + \frac{14 (\Delta x)^4 \partial^4 X}{1.2.3.4 (\partial x)^4} + \dots \right) \\ &+ \Delta^{-4} Y_3 \left( \frac{1.2.3 (\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3 (\Delta x)^3} + \frac{36 (\Delta x)^4 \partial^4 X}{1.2.3.4 (\partial x)^4} + \frac{150 (\Delta x)^5 \partial^5 X}{1.2 \dots 5 (\partial x)^5} + \dots \right) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Die so eben gefundene Gleichung ist nach den negativen Unterschieden der Function $Y$ geordnet. Man kann sie jedoch auch nach den steigenden Potenzen der Differenziale ordnen. Diese Anordnung führt zu folgender Darstellung:

$$571. \quad X_0 Y_0 + X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots + X_n Y_n$$

$$= X_{n+1} \Delta^{-1} Y_{n+1}$$

$$- \frac{\Delta x . \partial X_{n+1}}{1 . \partial x} \Delta^{-2} Y_{n+2}$$

$$+ \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_{n+1}}{1.2 (\partial x)^2} (-\Delta^{-2} Y_{n+2} + 1.2 \Delta^{-3} Y_{n+3})$$

$$+ \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_{n+1}}{1.2.3 (\partial x)^3} (-\Delta^{-2} Y_{n+2} + \ 6 \Delta^{-3} Y_{n+3} - \ 6 \Delta^{-4} Y_{n+4})$$

$$+ \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X_{n+1}}{1.2.3.4 (\partial x)^4} (-\Delta^{-2} Y_{n+2} + 14 \Delta^{-3} Y_{n+3} - 36 \Delta^{-4} Y_{n+4} + 24 \Delta^{-5} Y_{n-5})$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$- X \Delta^{-1} Y$$

$$+ \frac{\Delta x . \partial x}{1 \partial x} \Delta^{-2} Y_1$$

$$+ \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X}{1.2 (\partial x)^2} \ (\Delta^{-2} Y_1 - \ 2 \Delta^{-3} Y_2)$$

$$+ \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3 (\partial x)^3} \ (\Delta^{-2} Y_1 - \ 6 \Delta^{-3} Y_2 + \ 6 \Delta^{-4} Y_3)$$

$$+ \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X}{1.2.3.4 (\partial x)^4} (\Delta^{-2} Y_1 - 14 \Delta^{-3} Y_2 + 36 \Delta^{-4} Y_3 + \Delta^{-5} Y_4)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## §. 131.

Um Summenausdrücke für zusammengesetzte Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, mit Hülfe der Differenziale zu gewinnen, legen wir die Gleichung (476.) oder (477.) zum Grunde, und unterscheiden unter einer Reihe von ungerader und gerader Gliederanzahl. Wir können dann die Gleichungen (298.) und (299.) benutzen, oder auch die positiven Unterschiede nach (214.) einführen. Hiernach erhalten wir für eine Reihe von ungerader Gliederanzahl:

572. $X_0 Y_0 - X_1 Y_1 + X_2 Y_2 - \cdots + X_n Y_n$

$$= X_{n+1} \zeta^{-1} Y_{n+1}$$
$$-\zeta^{-2} Y_{n+2}\left(\frac{\Delta x.\partial X_{n+1}}{1\,\partial x} + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_{n+1}}{1.2(\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_{n+1}}{1.2.3(\partial x)^3} + \cdots\right)$$
$$+\zeta^{-3} Y_{n+3}\left(\frac{1.2(\Delta x)^2 \partial^2 X_{n+1}}{1.2(\partial x)^2} + \frac{6(\Delta x)^3 \partial^3 X_{n+1}}{1.2.3(\partial x)^3} + \frac{14(\Delta x)^4 \partial^4 X_{n+1}}{1.2.3.4(\partial x)^4} + \cdots\right)$$
$$-\zeta^{-4} Y_{n+4}\left(\frac{6(\Delta x)^3 \partial^3 X_{n+1}}{1.2.3(\partial x)^3} + \frac{36(\Delta x)^4 \partial^4 X_{n+1}}{1.2.3.4(\partial x)^4} + \frac{150(\Delta x)^5 \partial^5 X_{n+1}}{1.2.3.4.5(\partial x)^5} + \cdots\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ X \zeta^{-1} Y$$
$$-\zeta^{-2} Y_1\left(\frac{\Delta x.\partial X}{1\,\partial x} + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X}{1.2(\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3} + \cdots\right)$$
$$+\zeta^{-3} Y_2\left(\frac{2(\Delta x)^2 \partial^2 X}{1.2(\partial x)^2} + \frac{6(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3} + \frac{14(\Delta x)^4 \partial^4 X}{1.2.3.4(\partial x)^4} + \cdots\right)$$
$$-\zeta^{-4} Y_3\left(\frac{6(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3} + \frac{36(\Delta x)^4 \partial^4 X}{1.2.3.4(\partial x)^4} + \frac{150(\Delta x)^5 \partial^5 X}{1.2\ldots.5(\partial x)^5} + \cdots\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

**Für eine Reihe von gerader Gliederanzahl gewinnen wir:**

573. $X_0 Y_0 - X_1 Y_1 + X_2 Y_2 - \cdots - X_n Y_n$

$$= -X_{n+1} \zeta^{-1} Y_{n+1}$$
$$+\zeta^{-2} Y_{n+2}\left(\frac{\Delta x.\partial X_{n+1}}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_{n+1}}{1.2(\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_{n+1}}{1.2.3(\partial x)^3} + \cdots\right)$$
$$-\zeta^{-3} Y_{n+3}\left(\frac{1.2(\Delta x)^2 \partial^2 X_{n+1}}{1.2(\partial x)^2} + \frac{6(\Delta x)^3 \partial^3 X_{n+1}}{1.2.3(\partial x)^3} + \frac{14(\Delta x)^4 \partial^4 X_{n+1}}{1.2.3.4(\partial x)^4} + \cdots\right)$$
$$+\zeta^{-4} Y_{n+4}\left(\frac{1.2.3(\Delta x)^3 \partial^3 X_{n+1}}{1.2.3(\partial x)^3} + \frac{36(\Delta x)^4 \partial^4 X_{n+1}}{1.2.3.4(\partial x)^4} + \frac{150(\Delta x)^5 \partial^5 X_{n+1}}{1.2\ldots.5(\partial x)^5} + \cdots\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ X \zeta^{-1} Y$$
$$-\zeta^{-2} Y_1\left(\frac{\Delta x.\partial X}{1\,\partial x} + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X}{1.2(\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3} + \cdots\right)$$
$$+\zeta^{-3} Y_2\left(\frac{1.2(\Delta x)^2 \partial^2 X}{1.2(\partial x)^2} + \frac{6(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3} + \frac{14(\Delta x)^4 \partial^4 X}{1.2.3.4(\partial x)^4} + \cdots\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

**ordnet man die vorstehenden Gleichungen nach den steigenden Potenzen der Differenziale, so gewinnt man aus (572.):**

574. $X_0 Y_0 - X_1 Y_1 + X_2 Y_2 - \cdots + X_n Y_n$

$$= X_{n+1} \zeta^{-1} Y_{n+1}$$
$$- \frac{\Delta x . \partial X_{n+1}}{1.2(\partial x)^2} \zeta^{-2} Y_{n+2}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_{n+1}}{1.2(\partial x)^2} (-\zeta^{-2} Y_{n+2} + 1.2 \zeta^{-3} Y_{n+3})$$
$$+ \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_{n+1}}{1.2.3(\partial x)^3} (-\zeta^{-2} Y_{n+3} + \ \ 6 \zeta^{-3} Y_{n+3} - \ \ 6 \zeta^{-4} Y_{n+4})$$
$$+ \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X_{n+1}}{1.2.3.4(\partial x)^4} (-\zeta^{-2} Y_{n+3} + 14 \zeta^{-3} Y_{n+3} - 36 \zeta^{-4} Y_{n+4} + 36 \zeta^{-5} Y_{n+5})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ X_0 \zeta^{-1} Y$$
$$- \frac{\Delta x . \partial X}{1 \partial x} \zeta^{-2} Y$$
$$+ \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X}{1.2(\partial x)^2} (-\zeta^{-2} Y_1 + 1.2 \zeta^{-3} Y_2)$$
$$+ \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3} (-\zeta^{-2} Y_1 + \ \ 6 \zeta^{-3} Y_2 + 6 \zeta^{-4} Y_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

aus (573.) aber folgende

575. $X_0 Y_0 - X_1 Y_1 + X_2 Y_2 - \cdots - X_n Y_n$

$$= - X_{n+1} \zeta^{-1} Y_{n+1}$$
$$+ \frac{\Delta x . \partial X_{n+1}}{1 \partial x} \zeta^{-2} Y_{n+2}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_{n+1}}{1.2(\partial x)^2} (+\zeta^{-2} Y_{n+2} - 1.2 \zeta^{-3} Y_{n+3})$$
$$+ (\Delta x)^3 \partial^3 X_{n+1} ( \ \ \zeta^{-2} Y_{n+2} - \ \ 6 \zeta^{-1} Y_{n+3} + 6 \zeta^{-4} Y_{n+4})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ X_1 \zeta^{-1} Y$$
$$- \frac{\Delta x . \partial X}{1 \partial x} \zeta^{-2} Y_1$$
$$+ \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X}{1.2(\partial x)^2} (-\zeta^{-2} Y_1 + 1.2 \zeta^{-3} Y_2]$$
$$- \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3} (-\zeta^{-2} Y_1 + \ \ 6 \zeta^{-3} Y_2 + 6 \zeta^{-4} Y_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

## §. 132.

Eine andere Darstellung für Summenausdrücke zusammengesetzter Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, erhalten wir, wenn wir die Gleichungen (479.) §. 106. zum Grunde legen und

**die positiven Unterschiede durch Differenziale darstellen. Für eine Reihe von einer ungeraden Gliederanzahl entsteht**

$$576. \quad XY - X_1 Y_1 + X_2 Y_2 - \ldots + X_n Y_n$$

$$= X_n \zeta^{-1} Y_{n+1}$$
$$+ \zeta^{-2} Y_{n+1} \left( \frac{\Delta x . \partial X_{n-1}}{1 . \partial x} + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_{n-1}}{1.2 (\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_{n-1}}{1.2\,3 (\partial x)^3} + \ldots \right)$$
$$+ \zeta^{-3} Y_{n+1} \left( \frac{2 (\Delta x)^2 \partial^2 X_{n-2}}{1.2 (\partial x)^2} + \frac{6 (\Delta x)^3 \partial^3 X_{n-2}}{1.2.3 (\partial x)^3} + \frac{14 (\Delta x)^4 \partial^4 X_{n-2}}{1.2.3.4 (\partial x)^4} + \ldots \right)$$
$$+ \zeta^{-4} Y_{n+1} \left( \frac{6 (\Delta x)^3 \partial^3 X_{n-3}}{1.2.3 (\partial x)^3} + \frac{36 (\Delta x)^4 \partial^4 X_{n-3}}{1.2.3.4 (\partial x)^3} + \frac{150 (\Delta x)^5 \partial^5 X_{n-3}}{1.2 \ldots . 5 (\partial x)} + \ldots \right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ X_{-1} \zeta^{-1} Y$$
$$+ \zeta^{-2} Y \left( \frac{\Delta x . \partial X_{-2}}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_{-2}}{1.2 (\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_{-2}}{1.2.3 (\partial x)^3} + \ldots \right)$$
$$+ \zeta^{-3} Y \left( \frac{2 (\Delta x)^2 \partial^2 X_{-3}}{1.2 (\partial x)^2} + \frac{6 (\Delta x)^3 \partial^3 X_{-3}}{1.2.3 (\partial x)^3} + \frac{14 (\Delta x)^4 \partial^4 X_{-3}}{1.2.3.4 (\partial x)^4} + \ldots \right)$$
$$+ \zeta^{-4} Y \left( \frac{6 (\Delta x)^3 \partial^3 X_{-4}}{1.2.3 (\partial x)^3} + \frac{36 (\Delta x)^4 \partial^4 X_{-4}}{1.2 \ldots . 4 (\partial x)^4} + \frac{150 (\Delta x)^5 \partial^5 X_{-4}}{1.2 \ldots . 5 (\partial x)^5} + \ldots \right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

**Für eine Reihe von einer geraden Gliederanzahl:**

$$577. \quad X_0 Y_0 - X_1 Y_1 + X_2 Y_2 - \ldots - X_n Y_n$$

$$= - X_n \zeta^{-1} Y_{n+1}$$
$$- \zeta^{-2} Y_{n+1} \left( \frac{\Delta x . \partial X_{n-1}}{1 \, \partial x} + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_{n-1}}{1.2 (\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_{n-1}}{1.2.3 (\partial x)^3} + \ldots \right)$$
$$- \zeta^{-3} Y_{n+1} \left( \frac{2 (\Delta x)^2 \partial^2 X_{n-2}}{1\,2 (\partial x)^2} + \frac{6 (\Delta x)^3 \partial^3 X_{n-2}}{1.2.3 (\partial x)^3} + \frac{14 (\Delta x)^4 \partial^4 X_{n-2}}{1.2\,3.4 (\partial x)^4} + \ldots \right)$$
$$- \zeta^{-4} Y_{n+1} \left( \frac{6 (\Delta x)^3 \partial^3 X_{n-3}}{1.2\,3 (\partial x)^3} + \frac{36 (\Delta x)^4 \partial^4 X_{n-3}}{1.2.3.4 (\partial x)^4} + \frac{150 (\Delta x)^5 \partial^5 X_{n-3}}{1.2.3.4.5 (\partial x)^5} + \ldots \right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ X_{-1} \zeta^{-1} Y$$
$$+ \zeta^{-2} Y \left( \frac{\Delta x . \partial X_{-2}}{1 \, \partial x} + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_{-2}}{1.2 (\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_{-2}}{1.2\,3 (\partial x)^3} + \ldots \right)$$
$$+ \zeta^{-3} Y \left( \frac{2 (\Delta x)^2 \partial^2 X_{-3}}{1.2 (\partial x)^2} + \frac{6 (\Delta x)^3 \partial^3 X_{-3}}{1.2.3 (\partial x)^3} + \frac{14 (\Delta x)^4 \partial^4 X_{-3}}{1.2.3.4 (\partial x)^4} + \ldots \right)$$
$$+ \zeta^{-4} Y \left( \frac{6 (\Delta x)^3 \partial^3 X_{-4}}{1.2.3 (\partial x)^3} + \frac{36 (\Delta x)^4 \partial^4 X_{-4}}{1\,2.3.4 (\partial x)^4} + \frac{150 (\Delta x)^5 \partial^5 X_{-4}}{1.2 \ldots . 5 (\partial x)^5} + \ldots \right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

**Aus der Beschaffenheit der in den §§. 130. — 132. gegebenen Summenausdrücke geht hervor, dafs sich diejenigen zusammengesetzten Rei-**

hen leicht nach ihnen summiren lassen, welche durch fortgesetzte Differenziation der Functionen $X_{n+1}$ und $X$ auf 0 führen. Ist dies nicht der Fall, und führt die fortgesetzte Differenziation auf fortlaufende Reihen, so sind die vorliegenden Gleichungen nicht tauglich zu der Summirung der Reihen, ausgenommen für den Fall, wenn die hohen Differenziale der genannten Functionen auf sehr convergirende Reihen führen.

Ferner ist klar, daſs diejenigen Functionen sich sehr bequem durch die vorliegenden Gleichungen summiren lassen, die von der Beschaffenheit sind, daſs $X_0$ verschwindet, oder $= 0$ wird. Denn in diesem Falle werden in der Regel auch alle Glieder der zweiten Reihe des Summenausdruckes verschwinden.

Wir haben in den genannten §§. nur die Summenausdrücke für die einfachsten Fälle der zusammengesetzten Reihen gegeben, aus dem leicht begreiflichen Grunde, daſs die zusammengesetzteren zu weitläufigen Formeln geführt hätten, und die Summenausdrücke für verwickeltere Reihen leicht nach der angegebenen Methode für vorkommende Fälle aufgesucht werden können.

Nach diesen Bemerkungen wenden wir uns nun zu Anwendungen, um die Brauchbarkeit der angegebenen Gleichungen zu zeigen.

## Anwendungen.

### §. 133.

Wir machen zuerst eine Anwendung der gefundenen Gleichungen auf Reihen, deren Glieder aus den Gliedern einer geometrischen Reihe und aus Potenzialgröſsen zusammengesetzt sind, und wählen, da wir schon §. 115. derartige Reihen summirt haben, eine Reihe von folgender Gestalt:

$$\frac{x^p}{a^x} + \frac{(x+\Delta x)^p}{a^{x+\Delta x}} + \frac{(x+2\Delta x)^p}{a^{x+2\Delta x}} + \ldots + \frac{(x+n\Delta x)^p}{a^{x+n\Delta x}}.$$

Um sie summiren zu können, haben wir in der Gleichung (571.) $X = x^p$ und $Y = a^x$ zu setzen. Geschieht dies, so erhalten wir:

$$\frac{x^p}{a^x}+\frac{(x+\Delta x)^p}{a^{x+\Delta x}}+\frac{(x+2\Delta x)^p}{a^{x+2\Delta x}}+\ldots+\frac{(x+n\Delta x)^p}{a^{x+n\Delta x}}$$

$$=(x+(n+1)\Delta x)^p.\Delta^{-1}\frac{1}{x+(n+1)\Delta x}$$

$$-\frac{\Delta x.\partial(x+(n+1)\Delta x)^p}{\partial x}.\Delta^{-2}\frac{1}{a^{x+(n+2)\Delta x}}$$

$$+\frac{(\Delta x)^2\partial^2(x+(n+1)\Delta x)^p}{1.2(\partial x)^2}\left(-\Delta^{-2}\frac{1}{a^{x+(n+2)\Delta x}}+1.2\Delta^{-3}\frac{1}{a^{x+(n+3)\Delta x}}\right)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$-x^p.\Delta^{-1}\frac{1}{x}$$

$$+\frac{\Delta x.\partial x^p}{\partial x}.\Delta^{-2}\frac{1}{a^{x+\Delta x}}$$

$$-\frac{(\Delta x)^2\partial^2 x^p}{1.2(\partial x)^2}\left(\Delta^{-2}\frac{1}{a^{x+\Delta x}}-2\Delta^{-2}\frac{1}{a^{x+2\Delta x}}\right).$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

Um den vorstehenden Summenausdruck darstellen zu können, sind uns die Differenziale der Potenzialgröſsen und die negativen Unterschiede der Exponentialgröſsen nach der Gleichung (203.) nöthig. Die erstern ergeben sich aus folgenden Gleichungen:

$$\partial^r(x+(n+1)\Delta x)^p=p(p-1)\ldots(p-r+1)(x+(n+1)\Delta x)^{p-r}(\partial x)$$

und

$$\partial^r x^p=p(p-1)\ldots(p-r+1)x^{p-r}(\partial x)^r.$$

Die letztern sind nach (203.) folgende:

$$\Delta^{-1}\frac{1}{a^{x+(n+1)\Delta x}}=\frac{a^{\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})\,a^{x+(n+1)\Delta x}},$$

$$\Delta^{-2}\frac{1}{a^{x+(n+2)\Delta x}}=\frac{a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^2}\cdot\frac{1}{a^{x+(n+2)\Delta x}},$$

$$\Delta^{-3}\frac{1}{a^{x+(n+3)\Delta x}}=\frac{a^{3\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^3}\cdot\frac{1}{a^{x+(n+3)\Delta x}},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

und

$$\Delta^{-1}\frac{1}{a^x}=\frac{a^{\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})\,a^x},$$

$$\Delta^{-2}\frac{1}{a^{x+\Delta x}}=\frac{a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^2}\cdot\frac{1}{a^{x+2\Delta x}},$$

$$\Delta^{-3}\frac{1}{a^{x+2\Delta x}}=\frac{a^{3\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^3}\cdot\frac{1}{a^{x+3\Delta x}},$$

. . . . . . . . . . . . . . .

Berücksichtigen wir, daſs das letzte Glied der Reihe mit den Gliedern der ersten Reihe im Summenausdrucke der Form nach nicht übereinstimmt,

so läſst sich diese Übereinstimmung herbeiführen, wenn auf beiden Seiten $\frac{(x+(n+1)\Delta x)^p}{a^{x+(n+1)\Delta x}}$ zugezählt wird. Wird ferner dann der Kürze wegen $n-1$ statt $n$ gesetzt, und werden die angezeigten Differenziale eingeführt, so entsteht folgende Darstellung:

$$578.\quad \frac{x^p}{a^x}+\frac{(x+\Delta x)^p}{a^{x+\Delta x}}+\ldots+\frac{(x+n\Delta x)^p}{a^{x+n\Delta x}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x+n\Delta x)^p}{(1-a^{\Delta x})\,a^{x+n\Delta x}}\\
&- \frac{p(x+n\Delta x)^{p-1}\Delta x\,.\,a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})\,a^{x+(n+1)\Delta x}}\\
&+ \frac{p(p-1)(x+n\Delta x)^{p-2}(\Delta x)^2}{1.2\,a^{x+(n+1)\Delta x}}\left(-\frac{a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^2}+\frac{2a^{3\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^3\,a^{\Delta x}}\right)\\
&+ \frac{p(p-1)(p-2)(x+n\Delta x)^{p-3}(\Delta x)^3}{1.2.3\,a^{x+(n+1)\Delta x}}\left(-\frac{a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^2}+\frac{6a^{3\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^3\,a^{\Delta x}}-\frac{6a^{4\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^4\,a^{2\Delta x}}\right)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&- \frac{x^p\,.\,a^{\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})\,a^x}+\frac{p\,.\,x^{p-1}\Delta x}{(1-a^{\Delta x})^2}\cdot\frac{a^{2\Delta x}}{a^{x+\Delta x}}\\
&+ \frac{p(p-1)x^{p-2}(\Delta x)^2}{1.2}\left(\frac{a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^2\,a^{x+\Delta x}}-\frac{2a^{3\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^3\,a^{x+2\Delta x}}\right)\\
&+ \frac{p(p-1)(p-2)x^{p-3}(\Delta x)^3}{1.2.3}\left(\frac{a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})\,a^{x+\Delta x}}+\frac{6a^{3\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^3\,a^{x+2\Delta x}}+\frac{6a^{4\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^4\,a^{x+3\Delta x}}\right)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Der so eben gefundene Summenausdruck läſst bedeutende Reductionen zu, wenn die in Klammern eingeschlossenen Ausdrücke vereinigt werden. Ihre Vereinigung erzeugt folgende Darstellung:

$$579.\quad \frac{x^p}{a^x}+\frac{(x+\Delta x)^p}{x^{x+\Delta x}}+\frac{(x+2\Delta x)^p}{a^{x+2\Delta x}}+\ldots+\frac{(x+n\Delta x)^p}{a^{x+n\Delta x}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x+n\Delta x)^p}{(1-a^{\Delta x})\,a^{x+n\Delta x}} && -\frac{x^p-a^{\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})\,a^x}\\
&- \frac{p(x+n\Delta x)^{p-1}(\Delta x)\,a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^2\,a^{x+(n+1)\Delta x}} && +\frac{p\,x^{p-1}.\,\Delta x\,.\,a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^2\,a^{x+2\Delta x}}\\
&+ \frac{p(p-1)(x+n\Delta x)^{p-2}(\Delta x)^2}{1.2\,a^{x+(n+1)\Delta x}}\cdot\frac{a^{3\Delta x}+a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^3} && -\frac{p(p-1)x^{p-2}(\Delta x)^2}{1.2\,a^{x+\Delta x}}\cdot\frac{a^{3\Delta x}-a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^3}\\
&- \frac{p(p-1)(p-2)(x+n\Delta x)^{p-3}(\Delta x)^3}{1.2.3\,a^{x+(n+1)\Delta x}}\cdot\frac{a^{2\Delta x}+4a^{3\Delta x}+a^{4\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^4} && +\frac{p(p-1)(p-2)x^{p-3}(\Delta x)^3}{1.2.3\,a^{x+\Delta x}}\cdot\frac{a^{2\Delta x}+4a^{3\Delta x}+a^{4\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^4}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

In dieser Gleichung bezeichnen $x$, $n$, $\Delta x$ Gröſsen, die gänzlich unabhängig von einander sind. Man kann sie daher nach Willkühr annehmen. Durch zweckmäſsige Annahme der genannten Gröſsen kürzen wir die der

**Gestalt nach weitläufige Formel sehr ab. Setzen wir $x=0$, $\Delta x=1$, so verschwinden alle Glieder der zweiten Scheitelreihe, ausgenommen für den Fall, wenn der Exponent von $x$ in 0 übergeht. Dann alsdann ist $0^0 = \frac{0}{0} = 1$. Nach diesen Bemerkungen erhalten wir folgende Reihen, nebst ihren Summenausdrücken:**

580.
$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\frac{4}{a^4}+\ldots+\frac{n}{a^n}=\frac{1}{a^n}\left(\frac{n}{1-a}-\frac{a}{(1-a)^2}\right)+\frac{a}{(1-a)^2},\\
&\frac{1}{a}+\frac{2^2}{a^2}+\frac{3^2}{a^3}+\frac{4^2}{a^4}+\ldots+\frac{n^2}{a^n}\\
&=\frac{1}{a^n}\left(\frac{n^2}{1-a}-\frac{2na}{(1-a)^2}+\frac{a(a+1)}{(1-a)^3}\right)-\frac{a(a+1)}{(1-a)^3},\\
&\frac{1}{a}+\frac{2^3}{a^2}+\frac{3^3}{a^3}+\frac{4^3}{a^4}+\ldots+\frac{n^3}{a^n}\\
&=\frac{1}{a^n}\left(\frac{n^3}{1-a}-\frac{3n^2a}{(1-a)^2}+\frac{3na(a+1)}{(1-a)^3}-\frac{a(1+4a+a^2)}{(1-a)^4}\right)+\frac{(1+4a+a)a}{(1-a)^4},\\
&\frac{1}{a}+\frac{2^4}{a^2}+\frac{3^4}{a^3}+\frac{4^4}{a^4}+\ldots+\frac{n^4}{a^n}\\
&=\frac{1}{a^n}\left(\frac{n^4}{1-a}-\frac{4n^3a}{(1-a)^2}+\frac{6n^2a(a+1)}{(1-a)^3}-\frac{4na(1+4a+a^2)}{(1-a)^4}+\frac{a(1+11a+11a^2+a^3)}{(1-a)^5}\right)\\
&\qquad-\frac{a(1+11a+11a^2+a^3)}{(1-a)^5}\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}\right.$$

## §. 134.

**Setzen wir in der Gleichung (571.) $X=\frac{1}{x^p}$ und $Y=\frac{1}{a^x}$, so erhalten wir folgende Reihe, mit ihrem Summenausdrucke:**

$$\frac{1}{x^p.a^x}+\frac{1}{(x+\Delta x)^p a^{x+\Delta x}}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^p a^{x+2\Delta x}}+\ldots+\frac{1}{(x+n\Delta x)^p a^{x+n\Delta x}}$$
$$=\frac{1}{(x+(n+1)\Delta x)^p}.\Delta^{-1}\frac{1}{a^{x+(n+1)\Delta x}}$$
$$-\Delta x.\partial\frac{1}{(x+(n+1)\Delta x)^p}.\frac{1}{\partial x}\Delta^{-2}\frac{1}{a^{x+(n+2)\Delta x}}$$
$$+\frac{(\Delta x)^2}{1.2(\partial x)^2}\partial^2\frac{1}{(x+(n+1)\Delta x)^p}\left(-\Delta^{-2}\frac{1}{a^{x+(n+2)\Delta x}}+1.2\Delta^{-3}\frac{1}{a^{x+(n+3)\Delta x}}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\frac{1}{x^p}\Delta^{-1}\frac{1}{a^x}$$
$$+\frac{\Delta x}{\partial x}\partial\frac{1}{x^p}\Delta^{-2}\frac{1}{a^{x+\Delta x}}$$
$$+\frac{(\Delta x)^2}{1.2(\partial x)^2}\partial^2\frac{1}{x^p}\left(\Delta^{-2}\frac{1}{a^{x+\Delta x}}-1.2\Delta^{-3}\frac{1}{a^{x+2\Delta x}}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

**Die negativen Unterschiede der Exponentialgröfsen sind aus dem vorhergehenden §. bekannt. Die Differenziale der negativen Potenzialgröfsen ergeben sich aus den nachstehenden bekannten Gleichungen:**

$$\partial^r \frac{1}{(x+(n+1)\Delta x)^p} = (-)^r \frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+r-1)}{(x+(n+1)\Delta x)^{p+r}}$$

**und**

$$\partial^r \frac{1}{x^p} = (-)^r \frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+r-1)}{x^{p+r}}$$

**Werden nun diese Werthe eingeführt, und wird Harmonie in die Glieder der ersten Verticalreihe und in das letzte Glied der Reihe gebracht, so gewinnen wir folgende Darstellung:**

$$581.\quad \frac{1}{x^p.a^x} + \frac{1}{(x+\Delta x)^2 a^{x+\Delta x}} + \dots + \frac{1}{(x+n\Delta x)^p a^{x+n\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{(x+n\Delta x)^p (1-a^{\Delta x})\, a^{x+n\Delta x}} - \frac{a^{\Delta x}}{x^p.a^x(1-a^{\Delta x})}$$

$$+ \frac{p\Delta x.a^{2\Delta x}}{(x+n\Delta x)^{p+1}(1-a^{\Delta x})^2 a^{x+(n+1)\Delta x}} + \frac{p\Delta x.a^{2\Delta x}}{x^{p+1}(1-a^{\Delta x})^2 a^{x+\Delta x}}$$

$$+ \frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{1.2(x+n\Delta x)^{p+2}}\left(-\frac{a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^2 a^{x+(n+1)\Delta x}} + \frac{2a^{3\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})\, a^{x+(n+2)\Delta x}}\right)$$

$$- \frac{p(p+1)(\Delta x)\, a^{3\Delta x}}{1.2\, x^{p+2}}\left(\frac{a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})\, a^{x+2\Delta x}} - \frac{2a^{3\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})\, a^{x+2\Delta x}}\right)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Die in den Klammern eingeschlossenen Ausdrücke sind die nämlichen wie in der Gleichung (578.): daher führen sie auch zur nämlichen Induction. Es geht also die vorstehende Gleichung in folgende über:**

$$582.\quad \frac{1}{x^p.a^x} + \frac{1}{(x+\Delta x)^p a^{x+\Delta x}} + \dots + \frac{1}{(x+n\Delta x)^p a^{x+n\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{(x+n\Delta x)^p a^{x+n\Delta x}(1-a^{\Delta x})} - \frac{a^{\Delta x}}{x^p(1-a^{\Delta x}).a^x}$$

$$+ \frac{p.\Delta x.a^{\Delta x}}{(x+n\Delta x)^{p+1}.a^{x+n\Delta x}(1-a^{\Delta x})^2} - \frac{p.\Delta x.a^{\Delta x}}{x^{p+1}(1-a^{\Delta x})^2 a^x}$$

$$+ \frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{1.2(x+n\Delta x)^{p+2} a^{x+n\Delta x}}.\frac{a^{\Delta x}+a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^3} - \frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{1.2\, x^{p+2}.a^x}.\frac{a^{\Delta x}+a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^4}$$

$$+ \frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{1.2.3(x+n\Delta x)^{p+3} a^{x+n\Delta x}}.\frac{a^{\Delta x}+4a^{2\Delta x}+a^{3\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^4} - \frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{1.2.3\, x^{p+3}.a^x}.\frac{a^{\Delta x}+4a^{2\Delta x}+a^{3\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^4}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Die beiden Reihen des Summenausdruckes laufen ins Unendliche fort, und brechen also nicht ab. Es zeigt sich aber deutlich, dafs sie sehr convergiren, wenn $x$, $n$ und $p$ grofse Zahlen sind; und dann werden wenige Glieder hinreichen, um den Summenausdruck hinlänglich genau darzustellen. Nehmen wir specielle Fälle an, und setzen $\Delta x = 1$, so erhalten wir:

583. $$\frac{1}{x^p . a^x} + \frac{1}{(x+1)^p a^{x+1}} + \frac{1}{(x+2)^p a^{x+2}} + \ldots + \frac{1}{(x+n)^p a^{x+n}}$$

$$= \frac{1}{(x+n)^p a^{x+n}(1-a)} \qquad - \frac{a}{x^p(1-a)\,a^x}$$

$$+ \frac{p.a}{(x+n)^{p+1} a^{x+n}(1-a)^2} \qquad - \frac{p.a}{x^{p+1}(1-a)^2 a^x}$$

$$+ \frac{p(p+1)}{1.2(x+n)^{p+2} a^{x+n}} \cdot \frac{a+a^2}{(1-a)^3} \qquad - \frac{p(p+1)}{1.2\,x^{p+2} a^x} \cdot \frac{a(a+1)}{(1-a)^3}$$

$$+ \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3(x+n)^{p+3} a^{x+n}} \cdot \frac{a+4a^2+a^3}{(1-a)^4} - \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3\,x^{p+3} a^x} \cdot \frac{a+4a^2+a^3}{(1-a)^4}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Bedeutet hierin $n$ eine sehr grofse, oder gar eine unendlich grofse Zahl, so werden die sämmtlichen Glieder der ersten Scheitelreihe unendlich klein, oder sie verschwinden; und dann erhalten wir, was auch $x$ bedeuten mag, folgende Darstellung:

584. $$\frac{1}{x^p . a^x} + \frac{1}{(x+1)^p a^{x+1}} + \frac{1}{(x+2)^p a^{x+2}} + \ldots$$

$$= - \frac{a}{x^p(1-a)\,a^x} - \frac{p-a}{x^{p+1}(1-a)^2 a^x} - \frac{p(p+1)}{1.2\,x^{p+1}} \cdot \frac{a(a+1)}{(1-a)^3 . a^x} - \ldots,$$

wobei, was sich von selbst versteht, der Fall ausgenommen ist, wenn $x = 0$ ist. In der Summenreihe haben zwar alle Glieder das negative Zeichen: berücksichtigt man aber, dafs die ungeraden Potenzen von $1-a$ einen negativen und die geraden einen positiven Werth erhalten, so ist leicht zu erkennen, dafs unter den Zeichen ein Wechsel entstehen müsse, und das erste Glied einen positiven Werth haben werde.

Für $a = 1$ geht die vorstehende Reihe in die reciproke Reihe des ersten Grades über. Für diesen Fall ist der Summenausdruck unbrauchbar. Oben §. 127. ist die Summe dieser Reihe gegeben.

Summenausdrücke für Reihen, die aus Kreisfunctionen und Potenzial-Gröfsen oder Facultäten zusammengesetzt und mit lauter positiven Zeichen versehen sind, lassen sich leicht nach der bisher gegebenen Me-

thode bilden. Daher übergehen wir sie und wenden uns zur Darstellung der Summenausdrücke einiger zusammengesetzten Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind.

§. 135.

Ehe wir uns zu der Anwendung der in §. 131. gefundenen Gleichungen selbst wenden, geben wir ihnen in ihrer formellen Darstellung eine Umformung, die sich zur Anwendung bequem eignet, und die darin besteht, dafs wir das letzte Glied der Summenreihe mit den Gliedern der ersten Scheitelreihe im Summenausdrucke, den Stellenzahlen nach, in Übereinstimmung bringen. Dies geschieht dadurch, dafs wir, wie in der Gleichung (575.), das Glied $X_{n+1}\,Y_{n+1}$ zu-, in (574.) abzählen, und dann $n-1$ statt $n$ setzen. Hiedurch entsteht aus (575.) für eine Reihe von ungerader Glieder-Anzahl:

$$585.\quad X_0\,Y_0 - X_1\,Y_1 + X_2\,Y_2 - ,\ldots + X_n\,Y_n$$
$$- X_n\,\zeta^{-1}\,Y_n + X_n\,Y_n$$
$$+ \frac{\Delta x\,.\,\partial X_n}{1\,.\,\partial x}\,\zeta^{-2}\,Y_{n+1}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^2\,\partial^2 X_n}{1\,2\,(\partial x)^2}\,(\zeta^{-2}\,Y_{n+1} - 2\,\zeta^{-3}\,Y_{n+2})$$
$$+ \frac{(\Delta x)^3\,\partial^3 X_n}{1.2.3\,(\partial x)^3}\,(\zeta^{-2}\,Y_{n+1} - 6\,\zeta^{-3}\,Y_{n+2} + 6\,\zeta^{-4}\,Y_{n+3})$$
$$+ \frac{(\Delta x)^4\,\partial^4 X_n}{1.2.3.4\,(\partial x)^4}\,(\zeta^{-2}\,Y_{n+1} - 14\,\zeta^{-3}\,Y_{n+2} + 36\,\zeta^{-4}\,Y_{n+3} - 24\,\zeta^{-5}\,Y_{n+4})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X\,\zeta^{-1}\,Y$$
$$- \frac{\Delta x\,.\,\partial X}{1\,\partial x}\,\zeta^{-2}\,Y_1$$
$$+ \frac{(\Delta x)^2\,\partial^2 X}{1.2\,(\partial x)^2}\,(-\zeta^{-2}\,Y_1 + 2\,\zeta^{-3}\,Y_2)$$
$$+ \frac{(\Delta x)^3\,\partial^3 X}{1\,2.3\,(\partial x)^3}\,(-\zeta^{-2}\,Y_1 + 6\,\zeta^{-3}\,Y_2 - 6\,\zeta^{-4}\,Y_3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

für eine Reihe von gerader Glieder-Anzahl, aus (576.):

**586.** $X_0 Y_0 - X_1 Y_1 + X_2 Y_2 - \dots - X_n Y_n$

$$= X_n \zeta^{-1} Y_n - X_n Y_n$$
$$- \frac{\Delta x . \partial X_n}{1 \partial x} \zeta^{-2} Y_{n+1}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_n}{1.2 (\partial x)^2} (-\zeta^{-2} Y_{n+1} + 2 \zeta^{-3} Y_{n+2})$$
$$+ \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_n}{1.2.3 (\partial x)^3} (-\zeta^{-2} Y_{n+1} + 6 \zeta^{-3} Y_{n+2} - 6 \zeta^{-4} Y_{n+3})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ X \zeta^{-1} Y$$
$$- \frac{\Delta x . \partial X}{1 \partial x} \zeta^{-2} Y_1$$
$$+ \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X}{1.2 (\partial x)^2} (-\zeta^{-2} Y_1 + 2 \zeta^{-3} Y_2)$$
$$+ \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3 (\partial x)^3} (-\zeta^{-2} Y_1 + 6 \zeta^{-3} Y_2 - 6 \zeta^{-4} Y_3)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Setzen wir nun in der Gleichung (585.) $X = x^p$, $Y = a^x$, so erhalten wir:

**587.** $x^p . a^x - (x + \Delta x)^p a^{x+\Delta x} + \dots + (x + n \Delta x)^p a^{x+n\Delta x}$

$$= -(x + n \Delta x)^p \zeta^{-1} a^{x+n\Delta x} + (x + n \Delta x)^p a^{x+n\Delta x}$$
$$+ \frac{(\Delta x) \partial (x + n \Delta x)^p}{\partial x} \zeta^{-2} a^{x+(n+1)\Delta x}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 (x + n \Delta x)^p}{1.2 (\partial x)^2} (\zeta^{-2} a^{x+(n+1)\Delta x} - 2 \zeta^{-3} a^{x+(n+2)\Delta x})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ x^p . \zeta^{-1} a^x$$
$$- \frac{\Delta x . \partial x^p}{\partial x} \zeta^{-2} a^{x+\Delta x}$$
$$+ \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 x^p}{1.2 (\partial x)^2} (-\zeta^{-2} a^{x+\Delta x} + 2 \zeta^{-3} a^{x+2\Delta x})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Die negativen Aufstufungen, die zur Darstellung des gesuchten Summenausdruckes nöthig werden, sind schon §. 112. und die Differenziale §. 133. gegeben. Führen wir sie ein, so erhalten wir:

$$588.\quad x^p.a^x-(x+\Delta x)^p a^{x+\Delta x}+\ldots+(x+n\Delta x)^p a^{x+n\Delta x}$$

$$=-\frac{(x+n\Delta x)^p a^{x+n\Delta x}}{1+a^{\Delta x}}+(x+n\Delta x)\,a^{x+n\Delta x}$$

$$+\frac{p(x+n\Delta x)^{p-1}\Delta x.a^{x+(n+1)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2}$$

$$+\frac{p(p-1)(x+n\Delta x)^{p-2}(\Delta x)^2}{1.2}\left(+\frac{a^{x+(n+1)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2}-\frac{2a^{x+(n+2)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}\right)$$

$$+\frac{p(p-1)(p-2)(x+n\Delta x)^{p-3}(\Delta x)^3}{1.2.3}\left(+\frac{a^{x+(n+1)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2}+\frac{6a^{x+(n+2)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}+\frac{6a^{x+(n+3)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^4}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{x^p.a^x}{1+a^{\Delta x}}$$

$$-\frac{p.x^{p-1}.a^{x+\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2}$$

$$+\frac{p(p-1)x^{p-2}(\Delta x)^2}{1.2}\left(-\frac{a^{x+\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2}+\frac{2a^{x+2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

**Werden nun die im Summenausdrucke möglichen Reductionen vorgenommen, so erhalten wir:**

$$589.\quad x^p.a^x-(x+\Delta x)^p a^{x+\Delta x}+(x+2\Delta x)^p a^{x+2\Delta x}-\ldots+(x+n\Delta x)^p a^{x+n\Delta x}$$

$$=\frac{(x+n\Delta x)^p a^{x+(n+1)\Delta x}}{1+a^{\Delta x}}$$

$$+\frac{p(x+n\Delta x)^{p-1}\Delta x.a^{x+(n+1)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2}$$

$$-\frac{p(p-1)(x+n\Delta x)^{p-2}(\Delta x)^2 a^{x+(n+1)\Delta x}}{1.2}\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{(1+a^{\Delta x})^3}$$

$$+\frac{p(p-1)(p-2)(x+n\Delta x)^{p-3}(\Delta x)^3 a^{x+(n+1)\Delta x}}{1.2.3}\cdot\frac{a^{2\Delta x}-4a^{\Delta x}+1}{(1+a^{\Delta x})^4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{x^p.a^x}{1+a^{\Delta x}}-\frac{px^{p-1}.\Delta x.a^{x+\Delta x}}{1+a^{\Delta x}}$$

$$+\frac{p(p-1)x^{p-2}(\Delta x)^2 a^{x+\Delta x}}{1.2}\cdot\frac{a-1}{(1+a^{\Delta x})^3}$$

$$-\frac{p(p-1)(p-2)x^{p-3}(\Delta x)^3 a^{x+\Delta x}}{1.2.3}\cdot\frac{a^{2\Delta x}-4a^{\Delta x}+1}{(1+a^{\Delta x})^4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

**Wird auf eine Reihe von gerader Glieder-Anzahl die Gleichung (586.) angewendet, und werden dieselben Reductionen gemacht, so erhalten wir folgende Darstellung:**

**590.** $$x^p . a^x - (x+\Delta x)^p . a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x)^p . a^{x+2\Delta x} - \ldots - (x+n\Delta x)^p . a^{x+n\Delta x}$$
$$= -\frac{(x+n\Delta x)^p\, a^{x+(n+1)\Delta x}}{1+a^{\Delta x}} + \frac{x^p . a^x}{1+a^{\Delta x}}$$
$$-\frac{p(x+n\Delta x)^{p-1}\Delta x . a^{x+(n+1)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2} - \frac{p . x^{p-1}\Delta x . a^{x+\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2}$$
$$+\frac{p(p-1)(x+n\Delta x)^{p-2}(\Delta x)^2\, a^{x+(n+1)\Delta x}}{1.2} . \frac{a^{\Delta x}-1}{(1+a^{\Delta x})^3}$$
$$+\frac{p(p-1)\, a^{p-2}(\Delta x)^2\, a^{x+\Delta x}}{1.2} . \frac{a^{\Delta x}-1}{(1+a^{\Delta x})^3}$$
$$-\frac{p(p-1)(p-2)(x+n\Delta x)^{p-3}(\Delta x)^3\, a^{x+(n+1)\Delta x}}{1.2.3} . \frac{a^{2\Delta x}-4a^{\Delta x}+1}{(1+a^{\Delta x})^4}$$
$$-\frac{p(p-1)(p-2)\, x^{p-3}(\Delta x)^3\, a^{x+2\Delta x}}{1.2.3} . \frac{a^{2\Delta x}-4a^{\Delta x}+1}{(1+a^{\Delta x})^4}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Die Summenausdrücke der Gleichungen (589.) und (590.) sind nur in den Zeichen der ersten Scheitelreihe verschieden.

Machen wir nun von den gefundenen Gleichungen Anwendung auf specielle Fälle und setzen zu dem Ende $x=0$, $\Delta x = 1$ und statt $p$ allmählig die Zahlen 1, 2, 3, ...., so erhalten wir für Reihen von ungerader Glieder-Anzahl folgende Zusammenstellung:

**591.**
$$1a - 2a^2 + 3a^3 - 4a^4 + \ldots + na^n$$
$$= a^{n+1}\left(\frac{n}{1+a}+\frac{1}{(1+a)^2}\right)+\frac{a}{(1+a)^2},$$
$$1^2a - 2^2a^2 + 3^2a^3 - 4^2a^4 + \ldots + n^2a^n$$
$$= a^{n+1}\left(\frac{n^2}{1+a}+\frac{2n}{(1+a)^2}-\frac{a-1}{(1+a)^3}\right)-\frac{a(a-1)}{(1+a)^3},$$
$$1^3a - 2^3a^2 + 3^3a^3 - 4^3a^4 + \ldots + n^3a^n$$
$$= a^{n+1}\left(\frac{n^3}{1+a}+\frac{3n^2}{(1+a)^2}-3n\frac{a-1}{(1+a)^3}+\frac{a^2-4a+1}{(1+a)^4}\right)+\frac{(a^2-4a+1)a}{(1+a)^4},$$
$$1^4a - 2^4a^2 + 3^4a^3 - 4^4a^4 + \ldots + n^4a^n$$
$$= a^{n+1}\left(\frac{n^4}{1+a}+\frac{4n^3}{(1+a)^2}-6n\frac{a-1}{(1+a)^3}+4n\frac{a^2-4a+1}{(1+a)^4}+\frac{a^3-11a^2+11a-1}{(1+a)^5}\right)$$
$$-\frac{a^4-11a^3+11a^2-a}{(1+a)^5},$$
$$1^5a - 2^5a^2 + 3^5a^3 - 4^5a^4 + \ldots + n^5a^n$$
$$= a^{n+1}\,\frac{n^5}{1+a}+\frac{5n}{(1+a)^2}-10n^3\frac{a-1}{(1+a)^3}+10n^2\frac{a^2-4a+1}{(1+a)^4}-5n\frac{a^3-11a^2+11a-1}{(1+a)^5}$$
$$+\frac{a^4-26a^3+66a^2-26a+1}{(1+a)^6})+\frac{a^5-26a^4+66a^3-26a^2+a}{(1+a)^6}$$

u. s. w.

Für Reihen von gerader Glieder-Anzahl erhalten wir folgende Zusammenstellung:

592.
$$\begin{cases} 1a - 2a^2 + 3a^3 - \ldots - na^n \\ = -a^{n+1}\left(\frac{n}{1+a} + \frac{1}{(1+a)^2}\right) + \frac{a}{(1+a)^2} \\ 1^2 a + 2^2 a^2 + 3^2 a^3 - \ldots - n^2 a^n \\ = a^{n+1}\left(-\frac{n^2}{1+a} - \frac{2n}{(1+a)^2} + \frac{a-1}{(1+a)^3}\right) - \frac{a^2-a}{(1+a)^3}, \\ 1^3 a - 2^3 a^2 + 3^3 a^3 - \ldots - n^3 a^n \\ = a^{n+1}\left(-\frac{n^3}{1+a} - \frac{3n^2}{(1+a)^2} + 3n\frac{a-1}{(1+a)^3} - \frac{a^2-4a+1}{(1+a)^4}\right) + \frac{a^2-4a+1}{(1+a)^4} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

§. 136.

Setzen wir in der Gleichung (585.) $X_0 = x^p$ und $Y_0 = \frac{1}{a^x}$, so erhalten wir folgende Darstellung für eine Reihe von ungerader Glieder-Anzahl:

593. $$\frac{x^p}{a^x} - \frac{(x+\Delta x)^p}{a^{x+\Delta x}} + \frac{(x+2\Delta x)^p}{a^{x+2\Delta x}} - \ldots + \frac{(x+n\Delta x)^p}{a^{x+n\Delta x}}$$

$$= -(x+n\Delta x)^p \zeta^{-1}\frac{1}{a^{x+n\Delta x}} + \frac{(x+n\Delta x)^p}{a^{x+n\Delta x}}$$

$$+ \frac{\Delta x.\partial(x+n\Delta x)^p}{1.\partial x}\zeta^{-2}\frac{1}{a^{x+(n+1)\Delta x}}$$

$$+ \frac{(\Delta x)^2\partial^2(x+n\Delta x)^p}{1.2(\partial x)^2}\left(\zeta^{-2}\frac{1}{a^{x+(n+1)\Delta x}} - 2\zeta^{-3}\frac{1}{a^{x+(n+2)\Delta x}}\right)$$

$$+ \frac{(\Delta x)^3\partial^3(x+n\Delta x)^p}{1.2.3(\partial x)^3}\left(\zeta^{-2}\frac{1}{a^{x+(n+1)\Delta x}} - 6\zeta^{-3}\frac{1}{a^{x+(n+2)\Delta x}} + 6\zeta^{-4}\frac{1}{a^{x+(n+3)\Delta x}}\right)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$x^p.\zeta^{-1}\frac{1}{a^x}$$

$$- \frac{\Delta x.\partial x^p}{1.\partial x}.\zeta^{-2}\frac{1}{a^{x+\Delta x}}$$

$$+ \frac{(\Delta x)^2\partial^2 x^p}{1.2(\partial x)^2}\left(-\zeta^{-2}\frac{1}{a^{x+\Delta x}} + 2\zeta^{-3}\frac{1}{a^{x+2\Delta x}}\right)$$

$$+ \frac{(\Delta x)^3\partial^3 x^p}{1.2.3(\partial x)^3}\left(-\zeta^{-2}\frac{1}{a^{x+\Delta x}} + 6\zeta^{-3}\frac{1}{a^{x+2\Delta x}} - 6\zeta^{-4}\frac{1}{a^{x+3\Delta x}}\right)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Die Differenziale der Functionen $(x+n\Delta x)^p$ und $x^p$ sind bekannt; die negativen Aufstufungen der Exponentialfunctionen, die uns nöthig werden, sind nach (89.):

$$\zeta^{-1}\frac{1}{a^{x+n\Delta x}} = \frac{a^{\Delta x}}{1+a^{\Delta x}}\cdot\frac{1}{a^{x+n\Delta x}},$$
$$\zeta^{-2}\frac{1}{a^{x+(n+1)\Delta x}} = \frac{a^{2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2}\cdot\frac{1}{a^{x+(n+1)\Delta x}},$$
$$\zeta^{-3}\frac{1}{a^{x+(n+2)\Delta x}} = \frac{a^{3\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}\cdot\frac{1}{a^{x+(n+2)\Delta x}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und

$$\zeta^{-1}\frac{1}{a^{x}} = \frac{a^{\Delta x}}{1+a^{\Delta x}}\cdot\frac{1}{a^{x}},$$
$$\zeta^{-2}\frac{1}{a^{x+\Delta x}} = \frac{a^{2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2}\cdot\frac{1}{a^{x+\Delta x}},$$
$$\zeta^{-3}\frac{1}{a^{x+2\Delta x}} = \frac{a^{3\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}\cdot\frac{1}{a^{x+2\Delta x}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

**Werden die angezeigten Werthe eingeführt, so entsteht:**

594. $$\frac{x^p}{a^x}-\frac{(x+\Delta x)^p}{a^{x+\Delta x}}+\frac{(x+2\Delta x)^p}{a^{x+2\Delta x}}-\ldots+\frac{(x+n\Delta x)^p}{a^{x+n\Delta x}}$$

$$= -\frac{(x+n\Delta x)^p}{a^{x+n\Delta x}(1+a^{\Delta x})}+\frac{(x+n\Delta x)^p}{a^{x+n\Delta x}}$$
$$+\frac{p(x+n\Delta x)^{p-1}\Delta x\,.\,a^{2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2\,a^{x+(n+1)\Delta x}}$$
$$+\frac{p(p-1)(x+n\Delta x)^{p-2}(\Delta x)^2}{1.2}\left(+\frac{a^{2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2\,a^{x+(n+1)\Delta x}}-\frac{2a^{3\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3\,a^{x+(n+2)\Delta x}}\right)$$
$$+\frac{p(p-1)(p-2)(x+n\Delta x)^{p-3}(\Delta x)^3}{1.2.3}\left(+\frac{a^{2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2\,a^{x+(n+1)\Delta x}}-\frac{6a^{3\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3\,a^{x+(n+2)\Delta x}}\right.$$
$$\left.+\frac{6a^{4\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^4\,a^{x+(n+3)\Delta x}}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{x^p\,.\,a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})\,a^x}-\frac{p\,.\,x^{p-1}\Delta x\,.\,a^{2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2\,a^{x+\Delta x}}$$
$$+\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}(\Delta x)^2\left(-\frac{a^{2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2\,a^{x+\Delta x}}+\frac{2a^{3\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3\,a^{x+2\Delta x}}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

**Werden in dem vorstehenden Summenausdrucke die möglichen Reductionen vorgenommen, so erhalten wir folgende Darstellung:**

$$595.\quad \frac{x^p}{a^x}-\frac{(x+\Delta x)^p}{a^{x+\Delta x}}+\frac{(x+2\Delta x)^p}{a^{x+2\Delta x}}-\ldots+\frac{(x+n\Delta x)^p}{a^{x+n\Delta x}}$$

$$=\frac{(x+n\Delta x)^p}{(1+a^{\Delta x})\,a^{x+n\Delta x}}$$

$$+\frac{p(x+n\Delta x)^p(\Delta x)\,a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2\,a^{x+n\Delta x}}$$

$$+\frac{p(p-1)}{1.2}\cdot\frac{(x+n\Delta x)^{p+2}(\Delta x)^2}{a^{x+n\Delta x}}\cdot\frac{a^{2\Delta x}-a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}$$

$$+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\cdot\frac{(x+n\Delta x)^{p-3}(\Delta x)^3}{a^{x+n\Delta x}}\cdot\frac{a^{3\Delta x}-4a^{2\Delta x}+a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^4}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$+\frac{a^p.a^x}{(1+a^{\Delta x})\,a^x}$$

$$-\frac{p\,x^{p+1}.\Delta x.a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2\,a^x}$$

$$+\frac{p(p-1)}{1.2}\cdot\frac{a^{p-2}(\Delta x)^2}{a^x}\cdot\frac{a^{2\Delta x}-a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}$$

$$-\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\cdot\frac{x^{p+3}(\Delta x)^3}{a^x}\cdot\frac{a^{3\Delta x}-4a^{2\Delta x}+a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^4}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Wird die Gleichung (586.) zum Grunde gelegt, und werden die nämlichen Veränderungen an ihr vorgenommen, so erhalten wir für eine Reihe von gerader Glieder-Anzahl folgende Darstellung:**

$$596.\quad \frac{x^p}{a^x}-\frac{(x+\Delta x)^p}{a^{x+\Delta x}}+\frac{(x+2\Delta x)^p}{a^{x+2\Delta x}}-\ldots-\frac{(x+n\Delta x)^p}{a^{x+n\Delta x}}$$

$$=-\frac{(x+n\Delta x)^p}{(1+a^{\Delta x})\,a^{x+n\Delta x}}$$

$$-\frac{p(x+n\Delta x)^{p-1}\Delta x.a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2\,a^{x+n\Delta x}}$$

$$-\frac{p(p-1)(x+n\Delta x)^{p-2}(\Delta x)^2}{1.2\,a^{x+n\Delta x}}\cdot\frac{a^{2\Delta x}-a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}$$

$$-\frac{p(p-1)(p-2)(x+n\Delta x)^{p-3}(\Delta x)^3}{1.2.3\,a^{x+n\Delta x}}\cdot\frac{a^{3\Delta x}-4a^{2\Delta x}+a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^4}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$+\frac{x^p\,a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2\,a^x}-\frac{p\,x^{p-1}\Delta x.a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3\,a^x}$$

$$-\frac{p(p-1)}{1.2}\cdot\frac{x^{p-2}(\Delta x)^2}{a^x}\cdot\frac{a^{2\Delta x}-a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}$$

$$-\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\cdot\frac{x^{p-3}(\Delta x)^3}{a^x}\cdot\frac{a^{3\Delta x}-4a^{2\Delta x}+a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^4}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Setzen wir hierin $\Delta x = 1$, $x = 0$, so verschwindet das erste Glied in der Reihe und alle Glieder der zweiten Reihe im Summenausdrucke, bis auf dasjenige, worin der Exponent von $x$ in 0 übergeht. Demnach gewinnen wir für Summenreihen von einer ungeraden Glieder-Anzahl, aus (596.), wenn alle Zeichen gewechselt werden, folgende Zusammenstellung:

597.
$$\begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} - \dots + \frac{n}{a^n} = \frac{1}{a^n}\left(\frac{n}{1+a} + \frac{a}{(1+a)^2}\right) + \frac{a}{(1+a)^2}, \\ \frac{1}{a} - \frac{2^2}{a^2} + \frac{3^2}{a^3} - \dots + \frac{n^2}{a^n} \\ = \frac{1}{a^n}\left(\frac{n^2}{1+a} + \frac{2na}{(1+a)^2} + \frac{a^2-a}{(1+a)^3}\right) + \frac{a^2-a}{(1+a)^3}, \\ \frac{1}{a} - \frac{2^3}{a^2} + \frac{3^3}{a^3} - \dots + \frac{n^3}{a^n} \\ = \frac{1}{a^n}\left(\frac{n^3}{1+a} + \frac{4n^2a}{(1+a)^2} + 6n^2\frac{a^2-a}{(1+a)^3} + \frac{a^3-4a^2+a}{(1+a)^4}\right) + \frac{a^3-4a^2+a}{(1+a)^4}, \\ \frac{1}{a} - \frac{2^4}{a^2} + \frac{3^4}{a^3} - \dots + \frac{n^4}{a^n} \\ = \frac{1}{a^n}\left(\frac{n^4}{1+a} + \frac{4n^3a}{(1+a)^2} + 6n^2\frac{a^2-a}{(1+a)^3} + 4n\frac{a^3-4a+a}{(1+a)^4} + \frac{a^4-11a^3+11a^2-a}{(1-a)^5}\right) \\ \qquad + \frac{a^4-11a^3+11a^2-a}{(1+a)^5} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Für eine Reihe von ungerader Glieder-Anzahl erhalten wir folgende Zusammenstellung:

598.
$$\begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} - \dots - \frac{n}{a^n} = -\frac{1}{a^n}\left(\frac{n}{1+a} + \frac{a}{(1+a)^2}\right) + \frac{a}{(1+a)^2}, \\ \frac{1^2}{a} - \frac{2^2}{a^2} + \frac{3^2}{a^3} - \dots - \frac{n^2}{a^n} \\ = -\frac{1}{a^n}\left(\frac{n^2}{1+a} + \frac{2na}{(1+a)^2} + \frac{a^2-a}{(1+a)^3}\right) + \frac{a^2-a}{(1+a)^3} \\ \frac{1^3}{a} - \frac{2^3}{a^2} + \frac{3^3}{a^3} - \dots - \frac{n^3}{a^n} \\ = -\frac{1}{a^n}\left(\frac{n^3}{1+a} + \frac{3n^2a}{(1+a)^2} + 3n\frac{a^2-a}{(1+a)^3} + \frac{a^3-4a+a}{(1+a)^4}\right) + \frac{a^3-4a^2+a}{(1+a)^4} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Merkwürdig ist das Resultat, auf welches die vorstehenden Reihen führen, wenn die Zahl der Glieder $n = \infty$ gesetzt oder die Reihe bis ins Unendliche ausgedehnt und dann $a = 1$ angenommen wird. Alsdann geht der Ausdruck, der in Klammern eingeschlossen ist, in 0 über, da der Ausdruck

$$\frac{\infty^p}{a^\infty} = 0$$

ist, wie wir §. 106. No. 324. in unserm Differenzial-Calcul gezeigt haben, und dann gewinnt man folgende Reihen für

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots\ldots = \frac{1^2 - 1}{2^3} = 0,$$

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \ldots\ldots = \frac{1^4 - 11.1^3 + 11.1^2 - 1}{2^5} = 0$$

u. s. w., wonach alle geraden Potenzen der natürlichen Zahlenreihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden waren, auf 0 führen müfsten, und zwar nicht nur die vorstehenden Reihen, sondern auch die nachfolgenden

$$-1^2 + 2^2 - 3^2 + \ldots\ldots = -\frac{1^2 - 1}{2} = 0,$$

$$-1^4 + 2^4 - 3^4 - \ldots\ldots = 0$$

u. s. w.

Die ungeraden Potenzenreihen geben aber folgende Werthe:

$$1 - 2 + 3 - \ldots\ldots = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4},$$

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - \ldots\ldots = -\frac{2}{2^4} = \frac{1}{8},$$

$$1^5 - 2^5 + 3^5 - \ldots\ldots = \frac{16}{2^6} = \frac{1}{4}$$

u. s. w.

Die hier gefundenen Werthe stimmen vollkommen mit denen überein, die Euler in seiner Differenzial-Rechnung (Thl. II. Cap. 7. §. 185. u. ff.) gefunden hat. Wir glauben aber, dafs bei der Darstellung solcher Resultate, wie wir sie eben gefunden haben, genau auf die Art und Weise, wie sie aufgefunden werden, geachtet werden müsse, und glauben nicht, dafs sie im Allgemeinen als richtig befunden werden können, obgleich sie oft geradezu für wahr angenommen wurden. Wenigstens harmoniren die hier gefundenen Resultate nicht mit denen, die sich aus (366.) und (367.) ergeben, wenn $n = \infty$ gesetzt wird, sondern stehen geradezu im Widerspruche mit jenen. Diese Disharmonie ist aber ein deutlicher Beweis, dafs der eine oder der andere Fall unrichtig sein müssé. Wir verweisen hierüber noch auf das, was wir in unserm Differenzial-Calcul §. 115. u. ff. pag. 191 über widersprechende Resultate gesagt haben.

§. 137.

Setzen wir endlich in den Gleichungen (585.) und (586.) $X=\frac{1}{x}$ und $Y=\frac{1}{a^x}$ und führen die hiedurch nöthig werdende Geschäfte aus, so erhalten wir folgende Reihe, nebst ihrem Summenausdrucke:

599. $$\frac{1}{x^p.a^x}-\frac{1}{(x+\Delta x)^p a^{x+\Delta x}}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^p a^{x+2\Delta x}}-\ldots\ldots\frac{1}{(x+n\Delta x)^p a^{x+n\Delta x}}$$
$$=\frac{1}{a^x(1+a^{\Delta x})}\left(\frac{1}{(x+n\Delta x)^p a^{n\Delta x}}+\frac{a^{\Delta x}}{x^p}\right)$$
$$-\frac{p.\Delta x.a^{\Delta x}}{a^x(1+a^{\Delta x})^2}\left(\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p+1}a^{n\Delta x}}-\frac{1}{x^{p+1}}\right)$$
$$+\frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{1.2\,a^x}\left(\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p+2}a^{n\Delta x}}-\frac{1}{x^{p+2}}\right)\frac{a^{2\Delta x}-a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}$$
$$-\frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{1.2.3\,a^x}\left(\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p+3}a^{n\Delta x}}-\frac{1}{x^{p+3}}\right)\frac{a^{3\Delta x}-4a^{2\Delta x}+a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^4}$$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Für eine Reihe von gerader Gliederanzahl erhalten wir folgenden Summenausdruck:

600. $$\frac{1}{x^p.a^x}-\frac{1}{(x+\Delta x)^p a^{x+\Delta x}}+\ldots.-\frac{1}{(x+n\Delta x)^p a^{x+n\Delta x}}$$
$$=-\frac{1}{a^x(1+a^{\Delta x})}\left(\frac{1}{(x+n\Delta x)^p a^{n\Delta x}}-\frac{a^{\Delta x}}{x^p}\right)$$
$$+\frac{p.\Delta x.a^{\Delta x}}{a^x(1+a^{\Delta x})^2}\left(\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p+1}a^{n\Delta x}}+\frac{1}{x^{p+1}}\right)$$
$$-\frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{1.2\,a^x}\left(\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p+2}a^{n\Delta x}}+\frac{1}{x^{p+2}}\right)\frac{a^{2\Delta x}-a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}$$
$$+\frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{1.2.3\,a^x}\left(\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p+3}a^{n\Delta x}}+\frac{1}{x^{p+3}}\right)\frac{a^{3\Delta x}-4a^{2\Delta x}+a^{\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^4}$$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Nachdem wir nun gezeigt haben, wie die Summenausdrücke einfacher und zusammengesetzter Reihen auf dem in diesen Abhandlungen befolgten Wege gefunden werden können, überlassen wir die weiteren Anwendungen den Zwecken des geneigten Lesers.

---

# Anhang.

## Summirung der Reihe

$$\frac{1}{x^{p|\Delta x}} + \frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}} + \frac{1}{(x+4\Delta x)^{p|\Delta x}} \dots + \frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}}.$$

§. 138.

Die königliche Akademie der Wissenschaften zu Kopenhagen hat die Summirung der Reihe

$$\frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+4d)(b+5d)} + \dots$$

zum Gegenstande einer mathematischen Preisfrage gewählt.

Eduard Schrader, Professor in Tübingen, hat sie in einer Schrift von 74 Quartseiten, betitelt: „*Commentatio de summatione seriei*

$$\frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+4d)(b+5d)} + \dots$$

*ab illustri societate regia Hafniensi in certamine literario praemio regio ornata, auctore Eduardo Schradero, professore Tubingensi. Vimariae, sumtibus novi Bibliopolii, vulgo Landes-Industrie-Comtoir dicti,* 1818," mit dem Motto „*ultra!*" bearbeitet, und seine Schrift wurde, wie der Titel besagt, mit dem Preise gekrönt.

Ob es gleich eine überflüssige Arbeit zu sein scheint, eine schon bearbeitete Materie noch einmal bearbeiten zu wollen, so glauben wir dennoch, dies thun zu dürfen, da sich die Art und Weise, die wir bei Summirung der Reihen in diesen Abhandlungen befolgten, sehr leicht auch auf die Summirung der vorliegenden Reihe anwenden läſst, und auf einen ganz allgemeinen Summenausdruck für Reihen von folgender Form:

$$\frac{a}{b(b+d)\dots(b+(p-1)d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)\dots(b+(p+1)d)} + \frac{a}{(b+4d)(b+5d)\dots(b+(p+3)d)} \dots$$

führt, wovon die von der königlichen Akademie zu Kopenhagen vorgelegte nur ein besonderer Fall ist.

Schrader hat sich bei der Summirung der genannten obigen Reihe im Allgemeinen der Methode bedient, die Euler in seinem 2ten Theil der Differenzial-Rechnung angegeben hat, und keine Auflösung für eine allgemeine Gestalt dieser Reihe gegeben.

Die Methode, deren wir uns bei der Summirung der vorgelegten allgemeinen Reihe bedienen werden, hat den Vortheil, daſs sie sehr schnell und kurz zu einem allgemeinen Resultate führt; was wir in der angeführten Schrift Schraders vermissen. Zugleich wird die Summirung der fraglichen Reihe einen Beweis für die Brauchbarkeit der von uns in den vorliegenden Abhandlungen angegebenen Summenrechnung liefern, da sie eben so schnell als leicht Antwort auf eine vorgelegte wichtige Frage ertheilt, und sich eben so leicht auf Reihen von endlicher Glieder-Anzahl anwenden läſst.

## §. 139.

Zuerst stellen wir die vorgelegte Reihe nach der von uns bisher angenommenen Bezeichnung auf folgende Art dar:

$$a\left(\frac{1}{x^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+4\Delta x)^{p|\Delta x}}+\ldots+\frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}}\right).$$

Die Gröſse $a$, welche als Factor bei allen Gliedern der Reihe erscheint, ist auſserwesentlich. Ist der Summenausdruck gefunden, so ist nichts weiter nöthig als die vernachlässigte Gröſse durch Vervielfachen wieder einzuführen; daher betrachten wir im Folgenden nur die in Klammern eingeschlossene Reihe.

Die Reihe selbst läſst sich, als von zwei Reihen erzeugt, darstellen, wovon die eine lauter positive Zeichen und folgende Gestalt:

$$\frac{1}{x^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}}+\ldots+\frac{1}{(x+(2n-1)\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}},$$

die andere einen Zeichenwechsel und folgende Gestalt hat:

$$\frac{1}{x^{p|\Delta x}}-\frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}}+\ldots-\frac{1}{(x+(2n-1)\Delta x)^{p|\Delta x}}.$$

Werden beide Reihen zusammengezählt, so zerstören sich die ungeraden Glieder, die geraden aber erscheinen zweimal, und daher sind wir zu folgender Darstellung geführt:

$$2\left(\frac{1}{x^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}}+\ldots+\frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}}\right)$$
$$=\frac{1}{x^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}}+\ldots+\frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}}$$
$$+\frac{1}{x^{p|\Delta x}}-\frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}}-\ldots-\frac{1}{(x+(2n-1)\Delta x)^{p|\Delta x}}.$$

Beide Reihen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sind summir-

bar: also auch die ihnen gleiche auf der linken Seite des Gleichheitszeichens. Die erste Reihe führt nach (350.) auf folgende Gleichung:

$$\frac{1}{x^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}}+\ldots+\frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}}$$
$$=\Delta^{-1}\frac{1}{(x+(2n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}}-\Delta^{-1}\frac{1}{x^{p|\Delta x}};$$

die zweite nach (351.) auf folgende:

$$\frac{1}{x^{p|\Delta x}}-\frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}}+\ldots-\frac{1}{(x+(2n-1)\Delta x)^{p|\Delta x}}$$
$$=-\zeta^{-1}\frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}}+\zeta^{-1}\frac{1}{x^{p|\Delta x}};$$

die Vereinigung beider erzeugt folgende Darstellung:

**601.**
$$\frac{1}{x^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+4\Delta x)^{p|\Delta x}}+\ldots+\frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}}$$
$$=\tfrac{1}{2}\Delta^{-1}\frac{1}{(x+(2n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}}-\tfrac{1}{2}\Delta^{-1}\frac{1}{x^{p|\Delta x}}$$
$$-\tfrac{1}{2}\zeta^{-1}\frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}}+\tfrac{1}{2}\zeta^{-1}\frac{1}{x^{p|\Delta x}}.$$

Es sind uns demnach zur Darstellung des gesuchten Summenausdruckes die negativen Unterschiede der angezeigten Nenner-Facultäten nöthig. Sie sind nach der Gleichung (199.) §. 36.

$$\Delta^{-1}\frac{1}{(x+(2n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}}=-\frac{1}{(p-1)\Delta x}\cdot\frac{1}{(x+(2n+1)\Delta x)^{p-1|\Delta x}}$$

und

$$\Delta^{-1}\frac{1}{x^{p|\Delta x}}=-\frac{1}{(p-1)\Delta x}\cdot\frac{1}{x^{p-1|\Delta x}}.$$

Nicht so einfach wird die Darstellung der negativen Aufstufungen der angezeigten Facultäten sein. Da wir sie direct nicht darstellen können, so nehmen wir die Gleichung (342.) §. 71. zu Hülfe, und führen sie auf die positiven Unterschiede der Nenner-Facultäten zurück. Wird dort $m=1$ gesetzt, so erhalten wir

$$-\zeta^{-1}\frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}}=-\frac{1}{2(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{1}{2^2}\Delta\frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}}-\frac{1}{2^3}\Delta^2\frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}}+\ldots$$

und

$$\zeta^{-1}\frac{1}{x^{p|\Delta x}}=\frac{1}{2x^{p|\Delta x}}-\frac{1}{2^2}\Delta\frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{1}{2^3}\Delta^2\frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}}-\ldots$$

Die positiven Unterschiede der angegebenen Facultäten, welche weiter nöthig werden, entnehmen wir aus §. 30. Sie sind:

$$\Delta \frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}} = -\frac{p.\Delta x}{(x+2n\Delta x)^{p+1|\Delta x}},$$
$$\Delta^2 \frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}} = \frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{(x+2n\Delta x)^{p+2|\Delta x}},$$
$$\Delta^3 \frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}} = -\frac{p(p+1)(p+2)\Delta x)^3}{(x+2n\Delta x)^{p+3|\Delta x}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und

$$\Delta \frac{1}{x^{p|\Delta x}} = -\frac{p.\Delta x}{x^{p+1|\Delta x}},$$
$$\Delta^2 \frac{1}{x^{p|\Delta x}} = \frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{x^{p+2|\Delta x}},$$
$$\Delta^3 \frac{1}{x^{p|\Delta x}} = -\frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{x^{p+3|\Delta x}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Werden die gefundenen Werthe, so wie sie angezeigt sind, eingeführt, so erhalten wir für die vorgelegte allgemeine Reihe folgenden allgemeinen Summenausdruck:

602. $$\frac{1}{x^{p|\Delta x}} - \frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}} + \ldots + \frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}}$$
$$= \frac{1}{2(p-1)\Delta x}\left[\frac{1}{x^{p-1|\Delta x}} - \frac{1}{(x+(2n+1)\Delta x)^{p-1|\Delta x}}\right]$$
$$-\frac{1}{2^2(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}} - \frac{p.\Delta x}{2^3(x+2n\Delta x)^{p+1|\Delta x}} - \frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{2^4(x+2n\Delta x)^{p+2|\Delta x}} - \ldots$$
$$+\frac{1}{2^2\,x^{p|\Delta x}} \qquad + \frac{p.\Delta x}{2^3\,x^{p+1|\Delta x}} \qquad + \frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{2^4\,x^{p+2|\Delta x}} \qquad + \ldots$$

Diese Reihe führt zwar auf einen Summenausdruck, worin zwei Reihen von unendlicher Gestalt erscheinen. Nichts desto weniger ist er aber bei einer grofsen Glieder-Anzahl sehr brauchbar. Denn alsdann verschwinden entweder die Glieder der ersten horizontalen Reihe, oder es genügen einige wenige zur genauen Darstellung des gesuchten Werthes. Dieselbe Bemerkung gilt auch von der zweiten Horizontalreihe, wenn anders $x$ eine nicht ganz kleine Zahl, oder die Einheit selbst bedeutet.

In allen Fällen sind aber die beiden vorliegenden Horizontalreihen von der Beschaffenheit, dafs sie convergiren, und gewähren noch den Vortheil, dafs sich der Werth jedes spätern Gliedes leicht aus dem des vorhergehenden berechnen läfst. Ist z. B. der des ersten Gliedes $\frac{1}{2^2(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}}$ bekannt, so ist der des folgenden:

$$\frac{p.\Delta x}{2^3(x+2n\Delta x)^{p+1|\Delta x}} = \frac{1}{2^2(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}} \cdot \frac{p\,\Delta x}{2(x+(2n+p)\Delta x)}$$

Der des dritten ergiebt sich aus dem des zweiten durch folgende Gleichung:

$$\frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{2^4(x+2n\Delta x)^{p+2|\Delta x}} = \frac{p.\Delta x}{2^3(x+2n\Delta x)^{p+1|\Delta x}} \cdot \frac{(p+1)\Delta x}{2(x+(2n+p+1)\Delta x)}$$

u. s. w. Eben so leiten sich auch die spätern Glieder der zweiten Horizontalreihe aus den unmittelbar vorhergehenden her.

## §. 140.

Versuchen wir es nun, den Summenausdruck für den besondern Fall, welchen die königliche Akademie zu Kopenhagen zur Beantwortung vorgelegt hat, darzustellen, so wird dies leicht geschehen, wenn wir in (602.) $p=2$ setzen. Dann erhalten wir für eine Reihe von endlicher Glieder-Anzahl:

603. $$\frac{1}{x(x+\Delta x)} + \frac{1}{(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)} + \ldots + \frac{1}{(x+2n\Delta x)(x+(2n+1)\Delta x)}$$

$$= \frac{1}{2\Delta x}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+(2n+1)\Delta x)}\right] - \frac{1}{4(x+2n\Delta x)(x+(2n+1)\Delta x)}$$

$$- \frac{2\Delta x}{8(x+2n\Delta x)\ldots(x+(2n+2)\Delta x)} - \ldots$$

$$+ \frac{1}{4x(x+\Delta x)} + \frac{2\Delta x}{8x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)} + \frac{2.3(\Delta x)^2}{16x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)} + \ldots$$

Für eine Reihe von unendlicher Glieder-Anzahl, da die Glieder der ersten Horizontalreihe verschwinden, erhalten wir:

604. $$\frac{1}{x(x+\Delta x)} + \frac{1}{(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2\Delta x.x} + \frac{1}{2^2 x(x+\Delta x)} + \frac{2\Delta x}{2^3 x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)} + \ldots$$

Auch der Werth dieser Reihe läfst sich, wenn $x$ eine nicht zu kleine Zahl ist, sehr schnell bestimmen. Wird aber $x=1$, oder beginnt die Reihe mit der Einheit, und wird auch $\Delta x=1$ gesetzt: dann convergirt die Reihe sehr langsam. Für diesen Fall wäre viele Mühe nöthig, um den Werth dieser Reihe zu bestimmen. Doch wollen wir auch hier ein Mittel zeigen, wie der Werth dieser Reihe für den genannten Fall ganz genau bestimmt werden kann. Die Reihe

$$\frac{1}{x(x+\Delta x)} + \frac{1}{(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)} + \ldots$$

ist mit folgender Reihe:

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\Delta x}+\frac{1}{x+2\Delta x}-\frac{1}{x+3\Delta x}\cdots\cdots\right),$$

gleich bedeutend; was leicht dadurch erhellt, dafs man je zwei Nachbarglieder in eines zusammenzieht. Diese Reihe ist aber ein specieller Fall von der in §. 79. No. 378. gegebenen. Wenn daher $x=1$ und $\Delta x=1$ gesetzt wird, so erhalten wir:

$$605.\quad \frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\cdots\cdot$$
$$=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\cdots\cdot$$
$$=\log.\,\text{nat.}\,2=0{,}69314718059945\ldots\cdot$$

Diese Bemerkung setzt uns in den Stand, den Werth der Reihe für den Fall, wenn $x=1$ und $\Delta x=1$ ist, bei jeder beliebigen endlichen oder unendlichen Glieder-Anzahl zu bestimmen. Denn mittelst der Gleichung (605.) läfst sich der Werth der zweiten Horizontalreihe

$$\frac{1}{4.1.2}+\frac{2}{8.1.2.3}+\frac{2.3}{16.1.2.3.4}+\cdots\cdot$$

ganz genau geben. Ist nämlich die Zahl der Glieder unendlich, so wird der Werth der Reihe durch den hyperbolischen Logarithmen der Zahl 2 bestimmt, und wir können dann letztere für erstere setzen. Zugleich verschwinden alle Glieder, die im Nenner eine unendliche Gröfse haben, und wir erhalten aus (603.)

$$\log 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4.1.2}+\frac{2}{8.1.2.3}+\frac{2.3}{16.1.2.3.4}+\cdots\cdot$$

Bezeichnen wir diesen Werth durch $C$, so wird also:

$$606.\quad C=0{,}6931471805\ldots\cdot-0{,}5000\ldots\cdot$$
$$=0{,}19314718059945\ldots\cdot,$$

und diesen Werth findet man auch durch die wirkliche Rechnung. Demnach erhalten wir also folgende Resultate für eine Reihe von endlicher Glieder-Anzahl, die von 1 beginnt:

$$607.\quad \frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdot+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$
$$=\log.\,\text{nat.}\,2-\frac{1}{2(2n+2)}-\frac{1}{4(2n+1)(2n+2)}-\frac{2}{8(2n+1)(2n+2)(2n+3)}-\cdots\cdot$$

Für eine Reihe von unendlicher Glieder-Anzahl aber wird:

$$608.\quad \frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\cdots\cdot=\log.\,\text{nat.}\,2.$$

Die Gleichung (602.) gilt für alle Fälle: ausgenommen dann, wenn $p=1$ ist. Für den genannten Fall hat man den in §. 127. No. 555. ge-

fundenen Summenausdruck mit dem §. 79. No. 377. gegebenen unter den nöthigen Modificationen zu vereinigen, um die vorgelegte Frage zu lösen.

Eine zweite Methode, den Summenausdruck der Reihe (602.) darzustellen, wird unten §. 147. folgen.

## §. 141.

Wir theilen noch einige Darstellungen von Summenausdrücken für zusammengesetzte Reihen mit, die wir am füglichsten hier in einem Nachtrage zusammenstellen, da wir den Zusammenhang unserer Untersuchungen nicht unterbrechen wollten.

Die Darstellung der Summenausdrücke für zusammengesetzte Reihen, die wir in der 6ten Abhandlung §. 111. u. ff. gegeben haben, beruhet mit auf den positiven Unterschieden der einfachen Functionen. Für diejenigen Fälle, wo die Unterschiede der Potenzialgröfsen nöthig werden, lassen die dort gegebenen Darstellungen eine Umformung zu, die in manchen Fällen auf sehr einfache Ausdrücke führt. Diese Umformung wird dadurch möglich, dafs wir die Unterschiede der Potenzen auf die Summen der Verbindungen mit Wiederholungen, wie wir in unsern „Forschungen im Gebiete der Analysis §. 35. pag. 84 No. 74." gezeigt haben, zurück führen können. Dort haben wir nachstehende allgemeine Gleichung gefunden:

609. $\Delta^r y^p = 1.2.3\ldots r\,SC'(p-r;\, y,\, y+\Delta x,\, y+2\Delta x,\, \ldots\, y+r\Delta x)(\Delta x)^r$.

Das Zeichen $SC'$ zeigt die Summe der Producte an, welche entstehen, wenn aus den Elementen $y,\, y+\Delta x,\, y+2\Delta x, \ldots\, y+r\Delta x$ zu $p-r$ Elementen die Verbindungen mit Wiederholungen gebildet werden.

Nach diesen Bemerkungen haben wir folgende, zur Einführung nöthige specielle Fälle, wenn statt $r$ allmählig die Werthe $1.2.3\ldots$ gesetzt werden:

$$\Delta y^p = SC'(p-1;\, y,\, y+\Delta x)\,\Delta x,$$
$$\Delta^2 y^p = 1.2\,SC'(p-2;\, y,\, y+\Delta x,\, y+2\Delta x)\,(\Delta x)^2,$$
$$\Delta^3 y^p = 1.2.3\,SC'(p-3;\, y,\, y+\Delta x,\, \ldots\, y+3\Delta x)\,(\Delta x)^3,$$
$$\Delta^4 y^p = 1.2.3.4\,SC'(p-4;\, y,\, y+\Delta x,\, \ldots\, y+4\Delta x)\,(\Delta x)^4,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Wird nun in den vorstehenden Gleichungen $y=(x+n\Delta x)$ und dann $y=x$ gesetzt, und in die §. 111. u. ff. gegebenen Summenformeln eingeführt, so erhalten wir aus (492.) folgende Gleichung:

611. $$x^p . a^x + (x+\Delta x)^p a^{x+\Delta x} + \cdots + (x+n\Delta x)^p a^{x+n\Delta x}$$

$$= \frac{a^x}{a^{\Delta x}-1}[(x+n\Delta x)^p a^{(n+1)\Delta x} - x^p]$$

$$- \frac{a^{x+\Delta x}.\Delta x}{(a^{\Delta x}-1)^2}[SC'(p-1; x+n\Delta x, x+(n+1)\Delta x)a^{n\Delta x}$$
$$-SC'(p-1; x, x+\Delta x)]$$

$$+ \frac{1.2\, a^{x+2\Delta x}(\Delta x)^2}{(a^{\Delta x}-1)^3}[SC'(p-2; x+n\Delta x, \ldots. x+(n+2)\Delta x)a^{n\Delta x}$$
$$-SC'(p-2; x, \ldots. x+2\Delta x)]$$

$$+ \frac{1.2.3\, a^{x+3\Delta x}(\Delta x)^3}{(a^{\Delta x}-1)^4}[SC'(p-3; x+n\Delta x, \ldots. (x+(n+3)\Delta x)a^{n\Delta x}$$
$$-SC'(p-3; x, \ldots. x+3\Delta x)]$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Aus (494.) erhalten wir:

612. $$x^p . a^x - (x+\Delta x)^p a^{x+\Delta x} + \cdots + (x+n\Delta x)^p a^{x+n\Delta x}$$

$$= \frac{a^x}{a^{\Delta x}+1}[(x+n\Delta x)^p a^{(n+1)\Delta x} + x^p]$$

$$+ \frac{a^{x+\Delta x}\Delta x}{(a^{\Delta x}+1)^2}[SC'(p-1; x+n\Delta x, x+(n+1)\Delta x)a^{n\Delta x}$$
$$-SC'(p-1; x, x+\Delta x)]$$

$$- \frac{1.2\, a^{x+2\Delta x}(\Delta x)^2}{(a^{\Delta x}+1)^3}[SC'(p-2; x+n\Delta x, \ldots. x+(n+2)\Delta x)a^{n\Delta x}$$
$$-SC'(p-2; x, \ldots. x+2\Delta x)]$$

$$+ \frac{1.2.3\, a^{x+3\Delta x}(\Delta x)^3}{(a^{\Delta x}+1)^4}[SC'(p-3; x+n\Delta x, \ldots. x+(n+3)\Delta x)a^{n\Delta x}$$
$$-SC'(p-3; x, \ldots. x+3\Delta x)]$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Aus der Gleichung (495.) erhalten wir:

613. $$x^p a^x - (x+\Delta x)^p . a^{x+\Delta x} + \cdots - (x+n\Delta x)^p a^{x+n\Delta x}$$

$$= -\frac{a^x}{1+a^{\Delta x}}[(x+n\Delta x)^p . a^{(n+1)\Delta x} - x^p]$$

$$- \frac{a^{x+\Delta x}.\Delta x}{(1+a^{\Delta x})^2}[SC'(p-1; x+n\Delta x, x+(n+1)\Delta x)a^{n\Delta x}$$
$$-SC'(p-1; x, x+\Delta x)]$$

$$+ \frac{1.2\, a^{x+2\Delta x}(\Delta x)^2}{(1+a^{\Delta x})^3}[SC'(p-2; x+n\Delta x, \ldots. x+(n+2)\Delta x)a^{n\Delta x}$$
$$-SC'(p-2; x, \ldots. x+2\Delta x)]$$

$$- \frac{1.2.3\, a^{x+3\Delta x}(\Delta x)^3}{(1+a^{\Delta x})^4}[SC'(p-3; x+n\Delta x, \ldots. x+(n+3)\Delta x)a^{n\Delta x}$$
$$-SC'(p-3; x, \ldots. x+3\Delta x)]$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Aus (496.) erhalten wir:

614. $x^p . a^x - (x+\Delta x)^p . a^{x+\Delta x} + \cdots (x+n\Delta x)^p . a^{x+n\Delta x}$

$$= \frac{a^x}{1+a^{\Delta x}} [(x+n\Delta x)^p . a^{(n+1)\Delta x} + (x-\Delta x)^p]$$

$$+ \frac{a^x(\Delta x)}{(1+a^{\Delta x})^2} [SC'(p-1;\ x+(n-1)\Delta x, x+n\Delta x) a^{(n+1)\Delta x}$$
$$+ SC'(p-1;\ x-2\Delta x, x-\Delta x)]$$

$$+ \frac{1.2 a^x(\Delta x)^2}{(1+a^{\Delta x})^3} [SC'(p-2;\ x+(n-2)\Delta x, \ldots . x+n\Delta x) a^{(n+1)\Delta x}$$
$$+ SC'(p-2;\ x-3\Delta x, \ldots . x-\Delta x)]$$

$$+ \frac{1.2.3 a^x(\Delta x)^3}{(1+a^{\Delta x})^4} [SC'(p-3;\ x+(n-3)\Delta x, \ldots . x+n\Delta x) a^{(n+1)\Delta x}$$
$$+ SC'(p-3;\ x-4\Delta x, \ldots . x-\Delta x)]$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Aus (497.) erhalten wir:

615. $x^p . a^x - (x+\Delta x)^p a^{x+\Delta x} + \cdots - (x+n\Delta x)^p a^{x+n\Delta x}$

$$= -\frac{a^x}{1+a^{\Delta x}} [(x+n\Delta x)^p a^{(n+1)\Delta x} - (x-\Delta x)^p]$$

$$- \frac{a^x \Delta x}{(1+a^{\Delta x})^2} [SC'(p-1;\ x+(n-1)\Delta x, x+n\Delta x) a^{(n+1)\Delta x}$$
$$- SC'(p-1;\ x-2\Delta x, x-\Delta x)]$$

$$- \frac{a^x(\Delta x)^2}{(1+a^{\Delta x})^2} [SC'(p-2;\ x+(n-2)\Delta x, \ldots . x+n\Delta x) a^{(n+1)\Delta x}$$
$$- SC'(p-2;\ x-3\Delta x, \ldots . x-\Delta x)]$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Macht man von den hier gefundenen Formeln auf specielle Fälle Anwendung, so wird man auf einfachem und leichtem Wege zu denselben Darstellungen geführt, wie sie §. 114. mitgetheilt sind.

## §. 142.

Auf dieselbe Art, wie im vorhergehenden §. geschehen, lassen sich die Summenausdrücke für Reihen, die aus Kreisfunctionen und Potenzialgröfsen zusammengesetzt sind, in andere umformen. Aus (526.) erhalten wir:

616. $x^p \sin x + (x+\Delta x)^p \sin(x+\Delta x) + \cdots + (x+n\Delta x)^p \sin(x+n\Delta x)$

$$= -\frac{(x+(n+1)\Delta x)^p \cos(x+(n+\frac{1}{2})\Delta x) - x^p \cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}$$

$$+\frac{\Delta x}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}[SC'(p-1;\ x+(n+1)\Delta x, x+(n+2)\Delta x)\sin(x+(n+1)\Delta x)$$
$$-SC'(p-1;\ x, x+\Delta x)\sin x]$$

$$+\frac{1.2(\Delta x)^2}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3}[SC'(p-2;\ x+(n+1)\Delta x, \ldots. x+(n+3)\Delta x)\cos(x+(n+\tfrac{3}{2})\Delta x)$$
$$-SC'(p-2;\ x, \ldots. x+2\Delta x)\cos(x+\tfrac{1}{2}\Delta x)]$$

$$-\frac{1.2.3(\Delta x)^3}{2^4(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^4}[SC'(p-3;\ x+(n+1)\Delta x, \ldots. x+(n+4)\Delta x)\sin(x+(n+2)\Delta x)$$
$$-SC'(p-3;\ x, \ldots. x+3\Delta x)\sin(x+\Delta x)]$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Aus (528.) erhalten wir:

617. $x^p \sin x - (x+\Delta x)^p \sin(x+\Delta x) + \cdots \pm (x+n\Delta x)^p \sin(x+n\Delta x)$

$$= \pm\frac{(x+(n+1)\Delta x)^p \sin(x+(n+\frac{1}{2})\Delta x) \pm x^p \sin\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}$$

$$\pm\frac{\Delta x}{2^2\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2}[SC'(p-1;\ x+(n+1)\Delta x, x+(n+2)\Delta x)\sin(x+(n+1)\Delta x)$$
$$\pm SC'(p-1;\ x, x+\Delta x)\sin x]$$

$$\pm\frac{1.2(\Delta x)^2}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3}[SC'(p-2;\ x+(n+1)\Delta x, \ldots. x+(n+3)\Delta x)\sin(x+(n+\tfrac{3}{2})\Delta x)$$
$$\pm SC'(p-2;\ x, \ldots. x+2\Delta x)\sin(x+\tfrac{1}{2}\Delta x)]$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Aus (530.) erhalten wir:

618. $x^p \sin x - (x+\Delta x)^p \sin(x+\Delta x) + \cdots \pm (x+n\Delta x)^p \sin(x+n\Delta x)$

$$= \pm\frac{(x+n\Delta x)^p \sin(x+(n+\frac{1}{2})\Delta x) \pm (x-\Delta x)^p \sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}$$

$$\pm\frac{\Delta x}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2}[SC'(p-1;\ x+(n-1)\Delta x, x+n\Delta x)\sin(x+n\Delta x)$$
$$\pm SC'(p-1;\ x-2\Delta x, x-\Delta x)\sin(x-\Delta x)]$$

$$\pm\frac{1.2(\Delta x)^2}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3}[SC'(p-2;\ x+(n-2)\Delta x, \ldots. x+n\Delta x)\sin(x+(n-\tfrac{1}{2})\Delta x)]$$
$$\pm SC'(p-2;\ x-3\Delta x, \ldots. x-\Delta x)\sin(x-\tfrac{3}{2}\Delta x)]$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Auf die in diesem und dem vorhergehenden §. mitgetheilten Summengleichungen wurde schon in den §. 111., 112., 113. und 120. hingewiesen.

Ganz auf dieselbe Art lassen sich die Summenausdrücke der Reihen, welche aus den Functionen des Cosinus und Potenzialgröfsen zusammengesetzt,

und die in §. 122. mitgetheilt sind, umformen. Da sie nichts Neues bieten, so übergehen wir ihre Darstellung.

§. 143.

Wir theilen noch eine Gleichung mit, um Summenausdrücke für einfache Reihen, deren Glieder mit positiven Zeichen verbunden sind, mittelst der positiven Unterschiede der Functionen aufzufinden. Wir gewinnen sie dadurch, dafs wir in der Gleichung 130. §. 26. $n$ statt $m$ setzen, wodurch entsteht:

$$X_0 = X + \frac{n}{1} \Delta X_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 X_0 + \dots + \Delta^n X_0.$$

Vervielfachen wir diese Gleichung mit $\Delta^{-1}$, und berücksichtigen, dafs

$$\Delta^{-1} \Delta^r X_0 = \Delta^{r-1} X_0$$

ist, so gewinnen wir durch Umstellung des ersten Gliedes der rechten Seite auf die linke:

$$\Delta^{-1} X_n - \Delta^{-1} X_0 = n X_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta X_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^2 X_0 + \dots + \Delta^{n-1} X_0,$$

da ferner nach (350.)

$$\Delta^{-1} X_n - \Delta^{-1} X_0 = X_0 + X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}$$

ist, so führt die Vereinigung der beiden letzten Gleichungen zu folgender Summen-Gleichung:

$$619. \quad X_0 + X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}$$
$$= n X_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta X_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^2 X_0 + \dots + \Delta^{n-1} X_0.$$

Diese Gleichung läfst sich sehr gut zur Summirung solcher Reihen gebrauchen, worin die negativen Unterschiede der erzeugenden Functionen nicht auf kurze oder brauchbare Darstellungen führen, wohl aber die positiven Unterschiede.

Eine Anwendung dieser Gleichung machen wir auf die Summirung der Potenzenreihen. Zu dem Ende setzen wir $X_0 = x^p$. Dann entsteht

$$620. \quad x^p + (x + \Delta x)^p + (x + 2\Delta x)^p + \dots + (x + (n-1)\Delta x)^p$$
$$= n x^p + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta x^p + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^2 x^p + \dots + \Delta^{n-1} x^p.$$

Die Unterschiede der Potenzialgröfsen führen bei grossem $p$ auf weitläufige Entwicklungen. Führen wir, um dies zu verhüten, statt der Unterschiede die Darstellung der Summen der Verbindungen mit Wiederholungen nach (609.) §. 141. ein, so erhalten wir:

621. $$x^p+(x+\Delta x)^p+(x+2\Delta x)^p+\dots+(x+(n-1)\Delta x)^p$$
$$= n.x^p+\frac{n(n-1)}{1.2}SC^p(p-1;x,x+\Delta x)\Delta x$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3}SC^p(p-2;x,x+\Delta x,x+2\Delta x)(\Delta x)^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}SC^p(p-3;x,x+\Delta x,\dots x+3\Delta x)(\Delta x)^3$$
$$+\frac{n(n-1)\dots(n-4)}{5}SC^p(p-4;x,x+\Delta x,\dots x+4\Delta x)(\Delta x)^4$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Diese Gleichung hat den Vortheil, dafs $x$ und $\Delta x$ unabhängig von einander sind. Wird $\Delta x=1$, so erhalten wir:

622. $$x^p+(x+1)^p+(x+2)^p+\dots+(x+n-1)^p$$
$$= n.x^p+\frac{n(n-1)}{1.2}SC^p(p-1;x,x+1)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3}SC^p(p-2;x,x+1,x+2)$$
$$+\frac{n(n-1)\dots(n-3)}{4}SC^p(p-3;x,\dots x+3)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

und hieraus, wenn $x=1$, $\Delta x=1$ und $p=1$ gesetzt wird,

623. $$\begin{cases} 1+2+3+\dots+n = n+\frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{n(n+1)}{1.2}, \\ 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = n+3.\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3}, \\ 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = n+7.\frac{n(n-1)}{1.2}+2.\frac{n(n-1)(n-2)}{1} \\ \qquad +\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}, \\ 1^4+2^4+3^4+\dots+n^4 = n+15.\frac{n(n-1)}{1.2}+25.\frac{n(n-1)(n-2)}{3} \\ \qquad +10.\frac{n\dots(n-3)}{4}+\frac{n(n-1)\dots(n-4)}{5}, \\ 1^5+2^5+3^5+\dots+n^5 = n+31.\frac{n(n-1)}{1.2}+90.\frac{n(n-1)(n-2)}{3} \\ \qquad +65.\frac{n\dots(n-3)}{4}+15.\frac{n(n-1)\dots(n-4)}{5}+\frac{n(n-1)\dots(n-5)}{6}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Gleichung (619.) läfst auch Anwendungen auf die Summirung der Logarithmenreihen, die im Wesentlichen schon §. 46. mitgetheilt sind,

so wie auf Reihen, die durch Kreisfunctionen entstehen, zu, deren specielle Darstellung wir aber nicht weiter mittheilen.

Wie wir die Gleichung (130.) behandelt haben: so können wir auch die Gleichung (30.) §. 5.

$$X_n = \zeta^n X_0 - \frac{n}{1}\zeta^{n-1}X_0 + \cdots\cdot(-)^n X_0$$

behandeln. Wird diese Gleichung mit $\zeta^{-1}$ vervielfacht, so entsteht:

$$\zeta^{-1}X_n = \zeta^{n-1}X_0 - \frac{n}{1}\zeta^{n-2}X_0 + \cdots\cdot(-)^{n-1}\frac{n}{1}X_0(-)^n\zeta^{-1}X_0.$$

Wird der Ausdruck $(-)^n\zeta^{-1}X_0$ von der rechten Seite auf die linke gebracht, so entsteht:

$$624.\quad \zeta^{-1}X_n(-)^{n-1}X_0 = \zeta^{n-1}X_0 - \frac{n}{1}\zeta^{n-2}X_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\zeta^{n-3}X_0 \ldots (-)^{n-1}nX_0.$$

Ist $n$ ungerade, so wird $n-1$ gerade, und dann geht die vorstehende Gleichung in folgende über:

$$\zeta^{-1}X_n + \zeta^{-1}X_0 = nX_0 - \frac{n(n-1)}{1.2}\zeta X_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\zeta^2 X_0 - \cdots\cdot + \zeta^{n-1}X_0.$$

Da nun aber nach (351.)

$$\zeta^{-1}X_n + \zeta^{-1}X_0 = X_0 - X_1 + X_2 - \cdots\cdot + X_{n-1}$$

ist, so ziehen wir hieraus folgende Summengleichung für Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind:

$$625.\quad X_0 - X_1 + X_2 - \cdots\cdot + X_{n-1}$$
$$= nX_0 - \frac{n(n-1)}{1.2}\zeta X_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\zeta^2 X_0 - \cdots\cdot + \zeta^{n-1}X_0.$$

Ist aber $n$ eine gerade Zahl, so wird $n-1$ ungerade, und dann erhalten wir durch Veränderung der Zeichen:

$$-\zeta^{-1}X_n + \zeta^{-1}X_0 = nX_0 - \frac{n(n-1)}{1.2}\zeta X_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\zeta^2 X_0 - \cdots\cdot - \zeta^{n-1}X_0,$$

und hieraus, da nach (352.)

$$X_0 - X_1 + X_2 - \cdots\cdot - X_{n-1} = -\zeta^{-1}X_n + \zeta^{-1}X_0$$

ist,

$$626.\quad X_0 - X_1 + X_2 - \cdots\cdot - X_{n-1}$$
$$= nX_0 - \frac{n(n-1)}{1.2}\zeta X_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\zeta^2 X_0 - \cdots\cdot - \zeta^{n-1}X_0.$$

Die Gleichungen (625.) und (626.) zeigen, wie der Summenausdruck für Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, aus den positiven Aufstufungen der erzeugenden Functionen gefunden werden.

Die Gleichungen (619.), (625.) und (629.) lassen sich endlich auch zur Auffindung der Summenausdrücke zusammengesetzter Reihen gebrauchen,

wenn man statt $X$ eine zusammengesetzte Function setzt, und mit ihr die angezeigten Geschäfte vornimmt.

§. 144.

Die Ausführung der so eben gemachten Bemerkung wird uns einige weitere Darstellungen von Summengleichungen bieten.

Die Gleichung (619.) erzeugt, wenn $XY$ statt $X$ gesetzt wird:

$$X_0 Y_0 + X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots + X_{n-1} Y_{n-1}$$
$$= nXY + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta(XY) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^2(XY) + \cdots + \Delta^{n-1}(XY),$$

woraus dann, wenn die entwickelte Darstellung aus (307.) statt der angezeigten positiven Unterschiede eingeführt wird, folgt:

$$627. \quad X_0 Y_0 + X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots + X_{n-1} Y_{n-1}$$
$$= nXY + \frac{n(n-1)}{1.2}(X\Delta Y + \Delta X . Y_1)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(X\Delta^2 Y + 2\Delta X . \Delta Y_1 + \Delta^2 X . Y_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Setzen wir in (625.) und (626.) $XY$ statt $X$ und führen dann die entwickelten Darstellungen statt der angezeigten positiven Aufstufungen nach (280.) §. 58. ein, so erhalten wir für eine Reihe von ungerader Gliederanzahl:

$$628. \quad X_0 Y_0 - X_1 Y_1 + X_2 Y_2 - \cdots + X_{n-1} Y_{n-1}$$
$$= nXY - \frac{n(n-1)}{1.2}(X_1 \zeta Y - \Delta X . Y_0)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(X_2 \zeta^2 Y - 2\Delta X_1 \zeta Y + \Delta^2 X . Y)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

für eine Reihe von gerader Gliederanzahl aber:

$$629. \quad X_0 Y_0 - X_1 Y_1 + X_2 Y_2 - \cdots - X_{n-1} Y_{n-1}$$
$$= nXY - \frac{n(n-1)}{1.2}(X_1 \zeta Y - \Delta X_0 . Y_0)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(X_2 \zeta^2 Y - 2\Delta X_1 \zeta Y + \Delta^2 X . Y)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Gleichungen (628.) und (629.) unterscheiden sich nur durch das letzte Glied im Summenausdrucke von einander, das in der einen positiv in der andern negativ wird.

### §. 145.

Wir theilen nun noch Summengleichungen für Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, mit, die sich auf die positiven Unterschiede der erzeugenden Functionen gründen, und benutzen hiezu die Idee, die wir schon oben §. 83. angegeben haben.

Nach No. 351. §. 73. gilt für eine Reihe, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, und die eine ungerade Gliederanzahl haben, folgende Gleichung:

$$X_0 - X_1 + X_2 - X_3 \cdots + X_n = \zeta^{-1} X_{n+1} + \zeta^{-1} X_0.$$

Nach (352.) desselben §. ist für eine von gerader Gliederanzahl:

$$X_0 - X_1 + X_2 - X_3 + \cdots - X_n = -\zeta^{-1} X_{n+1} + \zeta^{-1} X_0.$$

Werden nun die negativen Aufstufungen der Functionen, die den Summenausdruck erzeugen, nach (342.) §. 71. entwickelt, so gewinnt man, wenn $m = 1$ und $X_{n+1}$ statt $X$ gesetzt wird, folgende Gleichung:

$$\zeta^{-n} X_{n+1} = \frac{X_{n+1}}{2} - \frac{\Delta X_{n-1}}{2^2} + \frac{\Delta^2 X_{n+1}}{2^3} - \cdots;$$

wenn aber unter denselben Bedingungen für $m$ die Function $X$ unverändert bleibt:

$$\zeta^{-1} X_0 = \frac{X}{2} - \frac{\Delta X}{2^2} + \frac{\Delta^2 X}{2^3} - \cdots.$$

Werden diese Werthe statt der Aufstufungen in obige Summengleichungen eingeführt, so gewinnen wir für eine Reihe von ungerader Gliederanzahl folgende Summengleichung:

$$630. \quad X_0 - X_1 + X_2 - X_3 \cdots + X_n$$
$$= \frac{X_{n+1}}{2} - \frac{\Delta X_{n+1}}{2^2} + \frac{\Delta^2 X_{n+1}}{2^3} - \cdots + \frac{X}{2} - \frac{\Delta X}{2^2} + \frac{\Delta^2 X}{2^3} - \cdots;$$

für eine Reihe von gerader Gliederanzahl aber:

$$631. \quad X_0 - X_1 + X_2 - X_3 \cdots - X_n$$
$$= \frac{X_{n+1}}{2} - \frac{\Delta X_{n+1}}{2^2} + \frac{\Delta^2 X_{n+1}}{2^3} - \cdots + \frac{X}{2} - \frac{\Delta X}{2^2} + \frac{\Delta^2 X}{2^3} - \cdots.$$

Das letzte Glied der Summenreihe stimmt hinsichtlich des Zeigers mit den Gliedern der ersten Reihe im Summenausdrucke nicht überein. Zählen wir, um diese Übereinstimmung herbeizuführen, in der ersten Gleichung $X_{n+1}$ ab, in der zweiten zu, und setzen zugleich $n-1$ statt $n$: so erhalten wir aus der zweiten für eine Reihe von ungerader Gliederanzahl folgende veränderte Summengleichung:

$$632. \quad X_0 - X_1 + X_2 - \ldots - X_n$$
$$= \frac{X_n}{2} + \frac{\Delta X_n}{2^2} - \frac{\Delta^2 X_n}{2^3} + \ldots \ldots \frac{X}{2} - \frac{\Delta X}{2^2} + \frac{\Delta^2 X}{2^3} - \ldots;$$

aus (630.) aber, für eine Reihe von gerader Gliederanzahl:

$$633. \quad X_0 - X_1 + X_2 - \ldots - X_n$$
$$= -\frac{X_n}{2} - \frac{\Delta X_n}{2^2} + \frac{\Delta^2 X_n}{2^3} - \ldots + \frac{X}{2} - \frac{\Delta X}{2^2} + \frac{\Delta^2 X}{2^3} - \ldots$$

## §. 146.

Obschon in der fünften und siebenten Abhandlung im Wesentlichen die Summenausdrücke aller summirbaren Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, aufgefunden und dargestellt wurden, oder doch der Weg zu ihrer Auffindung und Darstellung angegeben ist, so glauben wir doch von den beiden hier gefundenen Summengleichungen einige Anwendungen machen zu dürfen, da sie uns auf neue Summenausdrücke führen, die wir am füglichsten hier zusammenstellen werden.

Wir wenden vorerst die beiden Gleichungen auf Summirung der Potenzenreihen an, und setzen zu dem Ende $X = x^p$. Hiernach entsteht aus (632.) für eine Potenzenreihe von ungerader Gliederanzahl:

$$634. \quad x^p - (x+\Delta x)^p + (x+2\Delta x)^p - \ldots + (x+n\Delta x)^p$$
$$= \frac{(x+n\Delta x)^p}{2} + \frac{\Delta(x+n\Delta x)^p}{2^2} - \frac{\Delta^2(x+n\Delta x)^p}{2^3} + \ldots$$
$$+ \frac{x^p}{2} \quad - \frac{\Delta x^p}{2^2} \quad - \frac{\Delta^2 x^p}{2^3} \quad - \ldots,$$

und für eine Reihe von gerader Gliederanzahl, aus (633.):

$$635. \quad x^p - (x+\Delta x)^p + (x+2\Delta x)^p - \ldots - (x+n\Delta x)^p$$
$$= -\frac{(x+n\Delta x)^p}{2} - \frac{\Delta(x+n\Delta x)^p}{2^2} + \frac{\Delta^2(x+n\Delta x)^p}{2^3} - \ldots$$
$$+ \frac{x^p}{2} \quad - \frac{\Delta x^p}{2^2} \quad + \frac{\Delta^2 x^p}{2^3} \quad + \ldots$$

Stellen wir nun die angezeigten Unterschiede durch die Summenausdrücke der Verbindungen mit Wiederholungen nach (610.) §. 141. dar, so wird aus (634.):

636. $$x^p-(x+\Delta x)^p+(x+2\Delta x)^p-\ldots\ldots+(x+n\Delta x)^p$$
$$=\frac{(x+n\Delta x)^p}{2}+\frac{SC'(p-1;\,x+n\Delta x,\,x+(n+1)\Delta x)}{2^2}\Delta x$$
$$-1.2\frac{SC'(p-2;\,x+n\Delta x,\,x+(n+1)\Delta x,\,x+(n+2)\Delta x}{2^3}(\Delta x)^2$$
$$+1.2.3\frac{SC'(p-3;\,x+n\Delta x,\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,x+(n+3)\Delta x)}{2^4}(\Delta x)^3$$
$$-1.2.3.4\frac{SC'(p-4;\,x+n\Delta x,\,\ldots\ldots\ldots\,x+(n+4)\Delta x)}{2^5}(\Delta x)^4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{x^p}{2}-\frac{SC'(p-1;\,x,\,x+\Delta x)}{2^2}\Delta x$$
$$+1.2\frac{SC'(p-2;\,x,\,x+\Delta x,\,x+2\Delta x)}{2^3}(\Delta x)^3-\ldots\ldots$$

Aus (635.) gewinnen wir für eine Reihe von gerader Gliederanzahl:

637. $$x^p-(x+\Delta x)^p+(x+2\Delta x)^p-\ldots\ldots-(x+n\Delta x)^p$$
$$=-\frac{(x+n\Delta x)^p}{2}-\frac{SC'(p-1;\,x+n\Delta x,\,x+(n+1)\Delta x)}{2^2}\Delta x$$
$$+1.2\frac{SC'(p-2;\,x+n\Delta x,\,\ldots\ldots\,x+(n+2)\Delta x)}{2^3}(\Delta x)^2$$
$$-1.2.3\frac{SC'(p-3;\,x+n\Delta x,\,\ldots\ldots\,x+(n+3)\Delta x)}{2^4}(\Delta x)^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{x^p}{2}-\frac{SC'(p-1;\,x,\,x+\Delta x)}{2^2}\Delta x$$
$$+1.2\frac{SC'(p-2;\,x,\,\ldots\ldots\,x+2\Delta x)}{2^3}(\Delta x)^2-\ldots\ldots$$

Die hier stehenden Gleichungen gelten für jeden Werth von $x$ und $\Delta x$; denn beide sind in ihrer Beziehung zu einander ganz unabhängig. Nehmen wir nun den einfachsten Fall an, und setzen $x=0$ und $\Delta x=1$, so verkürzen sich die beiden Reihen um das erste Glied; die Reihe von einer ungeraden Gliederanzahl geht in die von einer geraden, und umgekehrt, über; die Summenausdrücke reduciren sich bedeutend, und die Reihen sind die Potenzenreihen der natürlichen Zahlen, mit abwechselnden Zeichen.

Der Zeichenwechsel ist bei dieser Veränderung wohl beibehalten, aber das erste Glied hat nun das negative Zeichen. Um die ursprüngliche Ordnung wieder herbeizuführen, verwandeln wir alle Zeichen der Gleichungen in die entgegengesetzten, und es entsteht aus (637.) für eine Reihe von ungerader Gliederanzahl folgende Darstellung:

$$638.\quad 1^p - 2^p + 3^p - \dots + n^p$$

$$= + \frac{n^p}{2} + \frac{SC'(p-1; n, n+1)}{2^2} - 1.2\frac{SC'(p-2; n, n+1, n+2)}{2^3} + 1.2.3\frac{SC'(p-3; n, \dots n+3)}{2^4} - \dots$$

$$+ \frac{SC'(p-1; 1)}{2^2} - 1.2\frac{SC'(p-2; 1, 2)}{2^3} + 1.2.3\frac{SC'(p-3; 1, 2, 3)}{2^4} - \dots;$$

für eine Reihe von gerader Gliederanzahl:

$$639.\quad 1^p - 2^p + 3^p - 4^p + \dots - n^p$$

$$= -\frac{n^p}{2} - \frac{SC'(p-1; n, n+1)}{2^2} + 1.2\frac{SC'(p-2; n, n+1, n+2)}{2^3} - 1.2.3\frac{SC'(p-3: n, \dots, n+3)}{2^4} + \dots$$

$$+ \frac{SC'(p-1; 1)}{2} - 1.2\frac{SC'(p-2; 1, 2)}{2^3} + 1.2.3\frac{SC'(p-3; 1, 2, 3)}{2^4} - \dots$$

Für einige specielle Fälle entnehmen wir folgende Zusammenstellung, und zwar für Reihen von ungerader Gliederanzahl:

640.

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots + n = \frac{n+1}{2}$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n^2}{2} + \frac{1}{4}\left|\begin{matrix} n \\ n+1 \end{matrix}\right| - \frac{1}{4}$$

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^3}{2} + \frac{1}{4}\left|\begin{matrix} n\ .\ n \\ n\ (n+1) \\ (n+1)(n+1) \end{matrix}\right| - \frac{1}{4}\left|\begin{matrix} n \\ n+1 \\ n+2 \end{matrix}\right| + \frac{1}{4}$$

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \dots + n^4$$

$$= \frac{n^4}{2} + \frac{1}{4}\left|\begin{matrix} n\ .\ n\ .\ n \\ n\ .\ n\ (n+1) \\ n\ (n+1)(n+1) \\ (n+1)(n+1)(n+1) \end{matrix}\right| - \frac{1}{4}\left|\begin{matrix} n\ .\ n \\ n\ (n+1) \\ \vdots \quad \vdots \\ (n+2)(n+2) \end{matrix}\right| + \frac{3}{8}\left|\begin{matrix} n \\ \vdots \\ n+3 \end{matrix}\right| - \frac{3}{4}$$

u. s. w.

Eben so erhalten wir für Reihen von gerader Gliederanzahl folgende Zusammenstellung:

641.

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots - n = -\frac{n}{2},$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - n^2 = -\frac{n^2}{2} - \frac{1}{4}\left|\begin{matrix} n \\ n+1 \end{matrix}\right| + \frac{1}{4}$$

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots - n^3 = -\frac{n^3}{2} - \frac{1}{4}\left|\begin{matrix} n\ .\ n \\ n\ (n+1) \\ (n+1)(n+1) \end{matrix}\right| + \frac{1}{4}\left|\begin{matrix} n \\ n+1 \\ n+1 \end{matrix}\right| - \frac{1}{2}$$

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \dots - n^4$$

$$= -\frac{n^4}{2} - \frac{1}{4}\left|\begin{matrix} n\ .\ n\ .\ n \\ n\ .\ n\ (n+1) \\ n\ (n+1)(n+1) \\ (n+1)(n+1)(n+1) \end{matrix}\right| + \frac{1}{4}\left|\begin{matrix} n\ .\ n \\ n\ (n+1) \\ \vdots \quad \vdots \\ (n+2)(n+2) \end{matrix}\right| - \frac{3}{8}\left|\begin{matrix} n \\ \vdots \\ n+3 \end{matrix}\right| + \frac{3}{4}$$

u. s. w.

## §. 147.

Eben so läfst sich mittelst der Gleichungen (632.) und (633.) eine Anwendung auf Summirung der Reihen, die durch Nennerfacultäten erzeugt werden, und deren Glieder durch abwechselnde Zeichen verbunden sind, machen, und die hier um so eher ihre Stelle finden mögen, da ihre Summirung im Frühern noch nicht ausführlich mitgetheilt, und im §. 139. nur berührt wurde.

Zu dem Ende setzen wir $X = \frac{1}{x^{p|\Delta x}}$. Hiernach erhalten wir aus (632.) für eine Reihe von ungerader Gliederanzahl folgende formelle Darstellung:

$$\frac{1}{x^{p|\Delta x}} - \frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}} + \frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}} - \ldots\ldots \frac{1}{(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}}$$
$$= \frac{1}{2(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}} + \tfrac{1}{4}\Delta\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}} - \tfrac{1}{8}\Delta^2\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}} + \ldots.$$
$$\frac{1}{2x^{p|\Delta x}} - \tfrac{1}{4}\Delta\frac{1}{x^{p|\Delta x}} + \tfrac{1}{8}\Delta^2\frac{1}{x^{p|\Delta x}} + \ldots.,$$

und für eine Reihe von gerader Gliederanzahl folgende:

$$\frac{1}{x^{p|\Delta x}} - \frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}} + \frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}} - \ldots. - \frac{1}{(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}}$$
$$= -\frac{1}{2(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}} - \tfrac{1}{4}\Delta\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}} + \tfrac{1}{8}\Delta^2\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}} - \ldots.$$
$$+ \frac{1}{2x^{p|\Delta x}} - \tfrac{1}{4}\Delta\frac{1}{x^{p|\Delta x}} + \tfrac{1}{8}\Delta^2\frac{1}{x^{p|\Delta x}} - \ldots.$$

Die positiven Unterschiede der Nennerfacultäten, deren Darstellung die Summenausdrücke der vorliegenden Reihe verlangt, entnehmen sich aus der Gleichung des §. 30., wenn dort $y = x + n\Delta x$ und dann $y = x$ gesetzt wird. Hiernach entsteht:

$$\Delta\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}} = -\frac{p.\Delta x}{(x+n\Delta x)^{p+1|\Delta x}},$$
$$\Delta^2\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}} = \frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{(x+n\Delta x)^{p+2|\Delta x}},$$
$$\Delta^3\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}} = -\frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{(x+n\Delta x)^{p+1|\Delta x}},$$
$$\Delta^4\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}} = \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)(\Delta x)^4}{(x+n\Delta x)^{p+3|\Delta x}},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

und

$$\Delta \frac{1}{x^{p|\Delta x}} = -\frac{p\Delta x}{x^{p+1|\Delta x}},$$
$$\Delta^2 \frac{1}{x^{p|\Delta x}} = \frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{x^{p+2|\Delta x}},$$
$$\Delta^3 \frac{1}{x^{p|\Delta x}} = -\frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{x^{p+3|\Delta x}},$$
$$\Delta^4 \frac{1}{x^{p|\Delta x}} = \frac{p\ldots\ldots(p+3)(\Delta x)^4}{x^{p+4|\Delta x}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Einführung der vorstehenden Werthe erzeugt folgende Summengleichungen, und zwar für eine Reihe von ungerader Gliederanzahl:

642. $$\frac{1}{x^{p|\Delta x}} - \frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}} + \frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}} - \ldots + \frac{1}{(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}}$$
$$= \frac{1}{2(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}} - \frac{p\Delta x}{4(x+n\Delta x)^{p+1|\Delta x}} - \frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{8(x+n\Delta x)^{p+2|\Delta x}} - \ldots$$
$$+ \frac{1}{2x^{p|\Delta x}} + \frac{p\Delta x}{4x^{p+1|\Delta x}} + \frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{8x^{p+2|\Delta x}} + \ldots;$$

für eine Reihe von gerader Gliederanzahl folgende:

643. $$\frac{1}{x^{p|\Delta x}} - \frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}} + \frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}} - \ldots - \frac{1}{(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}}$$
$$= -\frac{1}{2(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}} + \frac{p\Delta x}{2^2(x+n\Delta x)^{p+1|\Delta x}} + \frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{2^3(x+n\Delta x)^{p+2|\Delta x}} + \ldots$$
$$\frac{1}{2x^{p|\Delta x}} + \frac{p\Delta x}{2^2 x^{p+1|\Delta x}} + \frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{2^3 x^{p+2|\Delta x}} + \ldots$$

Obgleich die Reihen des Summenausdrucks unendlich sind, so lassen sie sich dennoch zur Auffindung desselben sehr gut gebrauchen, wenn $p$ und $x$ grofse Zahlen bedeuten, weil dann die Reihen selbst sehr stark convergiren, und einige Anfangsglieder hinreichen, um den Werth des Summenausdruckes erschöpfend darzustellen. Ist die Summenreihe selbst unendlich grofs, so giebt die zweite Reihe den Summenausdruck an.

Berücksichtigen wir nun, dafs je zwei Nachbarglieder in der Summenreihe (643.) in der vorstehenden Ordnung unter folgender allgemeinen Form enthalten sind:

$$\frac{1}{(x+r\Delta x)^{p|\Delta x}} - \frac{1}{(x+(r+1)\Delta x)^{p|\Delta x}} = \frac{\Delta x}{(x+r\Delta x)^{p+1|\Delta x}},$$

wenn $r$ eine gerade Zahl bedeutet, und führen diese Darstellung statt je zweier Nachbarglieder in die vorstehende Reihe (643.) ein, während wir

bemerken, dafs dann die Gliederanzahl der Reihe auf die Hälfte $\frac{n}{2}$ herabsinkt, und setzen dann $\frac{n}{2}=k$: so wird $n=2k$, und es entsteht folgende Darstellung:

$$\frac{\Delta x}{x^{p+1|\Delta x}}+\frac{\Delta x}{(x+\Delta x)^{p+1|\Delta x}}+\frac{\Delta x}{(x+2\Delta x)^{p+2|\Delta x}}+\ldots\ldots+\frac{\Delta x}{(x+2k\Delta x)^{p+1|\Delta x}}$$
$$=-\frac{1}{2(x+2k\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{p\Delta x}{2^2(x+2k\Delta x)^{p+1|\Delta x}}+\frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{2^3(x+2k\Delta x)^{p+2|\Delta x}}+\ldots.$$
$$+\frac{1}{2x^{p|\Delta x}}\qquad+\frac{p\Delta x}{2^2x^{p+1|\Delta x}}\qquad+\frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{2^3x^{p+2|\Delta x}}\qquad+\ldots.$$

Setzen wir hierin $p-1$, statt $p$ und messen mit $\Delta x$, so erhalten wir folgende merkwürdige Reihe, mit ihrem Summenausdrucke:

644. $$\frac{1}{x^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+4\Delta x)^{p|\Delta x}}+\ldots.\frac{1}{(x+2k\Delta x)^{p|\Delta x}}$$
$$=-\frac{1}{2\Delta x(x+2k\Delta x)^{p-1|\Delta x}}+\frac{p-1}{2^2(x+2k\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{(p-1)p(\Delta x)^2}{2^3(x+2k\Delta x)^{p+1|\Delta x}}+\ldots.$$
$$+\frac{1}{2\Delta x.x^{p-1|\Delta x}}+\frac{p-1}{2^2x^{p|\Delta x}}+\frac{(p-1)p(\Delta x)^2}{2^3x^{p+1|\Delta x}}+\frac{(p-1)p(p+1)(\Delta x)^3}{2^4x^{p+2|\Delta x}}+\ldots.$$

Diese Gleichung giebt eine zweite allgemeine Summirungsweise für die Reihe, welche die königliche Akademie zu Kopenhagen zum Gegenstande einer Preisaufgabe gemacht hat, und auf die wir oben §. 140. verwiesen haben. Man erkennt, dafs die vorliegende Reihe für alle Werthe von $x$, $\Delta x$ und $p$ gilt, ausgenommen für den Fall, wenn $p=1$ und $x=0$ ist. Ist $p=1$, so mufs die Summe der vorgelegten Reihe auf die oben §. 140. angeführte Weise gefunden werden.

Die Verschiedenheit des No. 602. aufgefundenen Summenausdruckes von dem hier mitgetheilten fällt zu deutlich in die Augen, als dafs es sie besonders hervor zu heben nöthig wäre.

§. 148.

Endlich theilen wir noch eine Summengleichung für Logarithmen-Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, mit. Wir gewinnen sie, wenn in (632.) $X=\log x$ gesetzt wird. Dann entsteht für eine Reihe von ungerader Gliederanzahl:

645. $$\log x-\log(x+\Delta x)+\log(x+2\Delta x)-\ldots.+\log(x+n\Delta x)$$
$$=\frac{\log(x+n\Delta x)}{2}+\frac{\Delta\log(x+n\Delta x)}{2^2}-\frac{\Delta^3\log(x+n\Delta x)}{2^4}+\ldots.$$
$$+\frac{\log x}{2}\quad-\frac{\Delta\log x}{2^2}\qquad+\frac{\Delta^3\log x}{2^4}\qquad-\ldots.;$$

für eine Reihe von gerader Glieder-Anzahl aber aus (633.):

646. $$\log x - \log(x+\Delta x) + \log(x+2\Delta x) - \dots - \log(x+n\Delta x)$$
$$= -\frac{\log(x+n\Delta x)}{2} - \frac{\Delta\log(x+n\Delta x)}{2^2} + \frac{\Delta^2\log(x+n\Delta x)}{2^3} - \dots$$
$$+\frac{\log x}{2} \qquad - \frac{\Delta\log x}{2^2} \qquad + \frac{\Delta^2\log x}{2^3} \qquad - \dots$$

Ist $n$ und $x$ eine nicht sehr kleine Zahl, so convergiren die Unterschiede der Logarithmen, wie wir §. 36. gesehen haben, sehr schnell, und dann reichen oft einige Anfangsglieder des Summenausdruckes hin, um den Werth der Summe erschöpfend darzustellen.

Die (632.) und (633.) aufgestellten Summengleichungen lassen sich auch auf Kreisfunctionen anwenden. Eben so lassen sie sich auch benutzen, um zusammengesetzte Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, mittelst der positiven Unterschiede der einfachen Functionen zu summiren.

---

# 15.

# Über die Gaufsischen Formeln zur näherungsweisen Berechnung eines bestimmten Integrals.

(Vom Herrn Professor Dr. *Schellbach* zu Berlin.)

## §. 1.

Zur Berechnung des bestimmten Integrals

$$\int_{a-b}^{a+b} Fx.\partial x$$

mögen $n$ Werthe der Function $Fx$ beliebig gewählt werden können, z. B.

$$F(a+\alpha b),\quad F(a+\beta b),\quad F(a+\gamma b),\quad \ldots\ldots\quad F(a+\nu b)$$

Diese Werthe multipliciren wir entsprechend mit $A$, $B$, $C$, .... $N$, und bilden die Summe

$$AF(a+\alpha b)+BF(a+\beta b)+CF(a+\gamma b)+\ldots\ldots+NF(a+\nu b),$$

in welcher die $2n$ Gröfsen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... $\nu$ und $A$, $B$, $C$, .... $N$ so bestimmt werden sollen, dafs die Differenz

$$\Delta=\int_{a-b}^{a+b}Fx.\partial x-2b[AF(a+\alpha b)+BF(a+\beta b)+CF(a+\gamma b)+\ldots\ldots+NF(a+\nu b)]$$

so klein als möglich wird. Diese Differenz läfst sich immer in eine convergente Reihe nach steigenden Potenzen von $b$ entwickeln, da die Grenzen der Integration beliebig klein angenommen werden können; denn weitere Grenzen lassen sich durch stückweises Integriren auf engere zurückbringen.

Nach dem Maclaurinschen Satze ist

$$\int_{a-b}^{a+b}Fx.\partial x = 2b\left(Fa+\frac{b^2}{1.2.3}.\frac{\partial^2 Fa}{\partial a^2}+\frac{b^4}{1.2.3.4.5}.\frac{\partial^4 Fa}{\partial a^4}+\ldots\right),$$

folglich, wenn man auch die vorgelegte Summe nach diesem Satze entwickelt, sie von der Entwicklung des Integrals abzieht und den Rest durch 2 dividirt,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\Delta = &\quad b\,(1-A-B-C-\ldots\ldots-N)\,Fa,\\
&- b^2(+\alpha A+\beta B+\gamma C+\ldots\ldots+\nu N)\frac{\partial Fa}{\partial a}\\
&+ \frac{b^3}{1.2}(\tfrac{1}{3}-\alpha^2 A-\beta^2 B-\gamma^2 C-\ldots\ldots-\nu^2 N)\frac{\partial^2 Fa}{\partial a^2}\\
&- \frac{b^4}{1.2.3}(+\alpha^3 A+\beta^3 B+\gamma^3 C+\ldots\ldots+\nu^3 N)\frac{\partial^3 Fa}{\partial a^3}\\
&+ \frac{b^5}{1.2.3.4}(\tfrac{1}{5}-\alpha^4 A-\beta^4 B-\gamma^4 C-\ldots\ldots-\nu^4 N)\frac{\partial^4 Fa}{\partial a^4}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Da diese Reihe convergent ist, so wird der Fehler $\Delta$ um so geringer sein, je mehre von den ersten Gliedern der Entwicklung verschwinden. Man kann nun die $2n$ ersten Potenzen von $b$ dadurch vernichten, dafs man ihre Coefficienten gleich Null setzt; auf diese Weise erhält man zwischen den $2n$ Unbekannten $A, B, C, \ldots . N$ und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \nu$ folgende $2n$ Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
1 &= A + B + C + \ldots . + N, \\
0 &= \alpha A + \beta B + \gamma C + \ldots . + \nu N, \\
\tfrac{1}{3} &= \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C + \ldots . + \nu^2 N, \\
0 &= \alpha^3 A + \beta^3 B + \gamma^3 C + \ldots . + \nu^3 N, \\
\tfrac{1}{5} &= \alpha^4 A + \beta^4 B + \gamma^4 C + \ldots . + \nu^4 N, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= \alpha^{2n-1} A + \beta^{2n-1} B + \gamma^{2n-1} C + \ldots . + \nu^{2n-1} N.
\end{aligned}
$$

Der noch bleibende Fehler ist

$$\Delta = \frac{b^{2n+1}}{3.4.5\ldots .2n}\left(\frac{1}{2n+1} - \Sigma \alpha^{2n} A\right)\frac{\partial^{2n} Fa}{\partial a^{2n}} - \frac{b^{2n+2}}{3.4.5\ldots .2n+1}\Sigma \alpha^{2n+1} A . \frac{\partial^{2n+1} Fa}{\partial a^{2n+1}} + \ldots .,$$

wo wir uns, der Kürze wegen, des Summenzeichens bedient haben, dessen Kraft sich auf die Elemente $\alpha$ und $A$ erstreckt.

## §. 2.

Die Elimination der Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \nu$ aus den obigen Gleichungen kann auf verschiedene Weise geschehen; wir schlagen dazu folgenden Weg ein. Es sei

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n = px^n + qx^{n-2} + rx^{n-4} + \ldots .$$

Dann ist, wenn $m$ eine positive ganze Zahl, kleiner als $n$, bedeutet,

$$\int_0^1 x^m \frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n \partial x = \frac{\partial^{n-m-1}}{\partial x^{n-m-1}}(x^2-1)^n,$$

sobald nach der Differenziation für $x$ die Grenzwerthe gesetzt werden. Für $x=1$ ist aber ein solcher Differenzialquotient immer Null, da er noch den Factor $x^2-1$ enthält; und für $x=0$ ist er auch Null, wenn $n$ und $m$ entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Führt man die Integration wirklich aus, so ergiebt sich also, dafs in diesen Fällen:

$$\frac{p}{n+m+1} + \frac{q}{n+m-2} + \frac{r}{n+m-3} + \ldots . = 0.$$

Multiplicirt man nun die $n+1$ste der obigen $2n$ Gleichungen mit $p$, die $n-1$ste mit $q$, die $n-3$te mit $r$ u. s. w., und addirt dann alle so ver-

wandelten Gleichungen, so ergiebt sich links Null und rechts $\Sigma A \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}(\alpha^2-1)^n$. Verfährt man auf gleiche Weise mit den Gleichungen $(n+2)$, $(n)$, $(n-2)$, ...., ferner mit $(n+3)$, $(n+1)$, $(n-1)$, ...., und schreitet so fort, bis man endlich die Operation mit der letzten Gleichung beginnt, so bereitet man sich folgende $n$ Gleichungen:

$$0=\Sigma A \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}(\alpha^2-1)^n,\quad 0=\Sigma \alpha A \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}(\alpha^2-1)^n,\quad 0=\Sigma \alpha^2 A \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}(\alpha^2-1)^n,\ \ldots$$

$$\ldots\ldots\ 0=\Sigma \alpha^{n-1} A \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}(\alpha^2-1),$$

aus denen die Elimination jeden der $n$ Differenzialquotienten

$$\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}(\alpha^2-1)^n,\quad \frac{\partial^n}{\partial \beta^n}(\beta^2-1)^n,\quad \frac{\partial^n}{\partial \gamma^n}(\gamma^2-1)^n,\quad \ldots\ldots\quad \frac{\partial^n}{\partial \nu^n}(\nu^2-1)^n$$

gleich Null ergeben muſs; wie leicht in die Augen fällt. Dieses Resultat zeigt, daſs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... $\nu$ die $n$ Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n = 0$$

sind, welche, wenn $x^n$ von seinem Factor befreit wird, diese Gestalt animmt:

$$x^n-\frac{n(n-1)\,x^{n-2}}{1.(2n-1)2}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\,x^{n-4}}{1.2(2n-1)(2n-3)\,2^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\,x^{n-6}}{1.2.3(2n-1)(2n-3)(2n-5)\,2^3}-\ldots\ldots=0.$$

## §. 3.

Wie aus den $n$ ersten Gleichungen in §. 1. die Gröſsen $A$, $B$, $C$, ... ... $N$ bestimmt werden, ist bekannt; z. B. zeigt es auf eine einfache Weise Cauchy in seiner algebraischen Analysis. Bezeichnet man die linken Seiten dieser Gleichungen $1$, $0$, $\frac{1}{3}$, $0$, ..... entsprechend durch $k_0$, $k_1$, $k_2$, $k_3$, ...., so findet man z. B.

$$A=\frac{(k-\beta)(k-\gamma)(k-\delta)\ldots\ldots(k-\nu)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots\ldots(\alpha-\nu)},$$

wenn nämlich die Multiplicationen im Zähler wirklich ausgeführt und an die Stelle der Exponenten von $k$ die entsprechenden Zeiger gesetzt werden. Bezeichnet man $\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n$ durch $\varphi x$ und $\frac{\partial \varphi x}{\partial x}$ durch $\varphi' x$, und das Setzen von $x=\alpha$ in diesem Differenzialquotienten durch $\varphi'\alpha$, so übersieht man bald, daſs sich die Werthe von $A$, $B$, $C$, .... $N$ in dieser Form darstellen lassen:

$$A=\frac{1}{2\varphi'\alpha}\int_{-1}^{1}\varphi'\alpha\,\partial\alpha,\quad B=\frac{1}{2\varphi'\beta}\int_{-1}^{1}\varphi'\beta\,\partial\beta,\quad C=\frac{1}{2\varphi'\gamma}\int_{-1}^{1}\varphi'\gamma\,\partial\gamma,\ \ldots$$

$$\ldots\ldots\ N=\frac{1}{2\varphi'\nu}\int_{-1}^{1}\varphi'\nu\,\partial\nu,$$

wo unter den Integrationszeichen aber die Integrationsbuchstaben nicht verwechselt werden dürfen, was in andern Fällen erlaubt ist.

Die Berechnung dieser Gröfsen läfst sich nach Gaufs noch etwas vereinfachen. Es ist nämlich

$$\int_{-1}^{1}\varphi'\alpha\,\partial\alpha=\int_{-1}^{1}\frac{\varphi y-\varphi x}{y-x}\,\partial y$$

für $x=\alpha$; denn die Differenz $\varphi y-\varphi x$ enthält den Factor $y-x$, also nur positive Potenzen von $x$, und $\varphi x$ wird für $x=\alpha$ zu Null, wodurch dann bei der Division $\varphi y$ nur den Factor $y-\alpha$ verliert. Ferner ist

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi y-\varphi x}{y-x}\,\partial y$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{\varphi y}{y-x}\,\partial y-\varphi x\int_{-1}^{1}\frac{\partial y}{y-x}=\int_{-1}^{1}\frac{\varphi y}{y-x}\,\partial y+\varphi x\log\frac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}}.$$

Multiplicirt man also $\varphi x$ mit $\log\frac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}}$, oder mit $2(x^{-1}+\frac{1}{3}x^{-3}+\frac{1}{5}x^{-5}+\ldots.)$, so werden in diesem Producte alle Potenzen von $x$ mit negativen Exponenten durch dieselben Potenzen dieser Gröfse in dem Integral $\int_{-1}^{1}\frac{\varphi y}{y-x}\,\partial y$ aufgehoben, da auf der linken Seite der letzten Gleichung $x$ nur mit positiven Exponenten erscheinen kann; behält man daher von diesem Producte nur die Potenzen von $x$ mit positiven Exponenten bei, und setzt dann für $x$ nach einander $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... $\nu$, so findet man die Zähler der Coefficienten $A$, $B$, $C$, .... $N$. Dafs bei diesen Coefficienten der erste dem letzten, der zweite dem vorletzten u. s. w. gleich sein mufs, ergiebt sich einfach aus dem ersten Werthe für $\Delta$ in §. 1., wenn man $+b$ mit $-b$ vertauscht.

Berlin, im Juli 1836.

---

# 16.
# De tabularum functionum hyperbolicarum constructione.

Cll. *Gudermanni* disquisitionibus satis apparet, functionum hyperbolicarum usum ad theoriam functionum ellipticarum aliasque analyseos partes non solum esse utilem, sed etiam saepius necessariam, maxime quum functiones trigonometricae formulas analyticas imaginarias praebeant, atque evolutiones logarithmicae aut series minime convergentes evitari debeantur. At revera integralium ellipticarum et secundae et tertiae speciei sicuti ipsarum functionum evolutiones, progredientes secundum functiones hyperbolicas maxime convergunt (cf. dissertationem III. *Gudermanni* diar. Tom. 14.). Ut autem applicatio hujus functionum generis utilitatem in votis habitam proferre possit, computari debent tabulae, ex quibus valores functionum ipsarum aut earum logarithmorum eligi possint. Quarum maximam partem tabularum edidit iamiam ante aliquot annorum Cll. *Gudermannus*, quas invenis impressas fine ejus operis praestantissimi sub titulo: „*Theorie der Potenzial- oder cyklisch-hyperbolischen Functionen. Berlin, bei Reimer.*"

Haecce tabulae continent sinuum, cosinuum tangentiumque hyperbolicarum logarithmos omnium arcuum, qui limitem numeri 2 excedunt. Praeterea operis supra commemorati auctor computavit tabulam functionis, quae transgressum ab uno functionum potentialium genere ad alterum et vice versa forma reali possibilem facit, et quam configuratione $\mathfrak{L}\varphi$ designat, ita ut sit:

$$\mathfrak{L}\varphi = \log \text{tang}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Quamquam hoc modo valores functionum hyperbolicarum tabulis trigonometricis possunt inveniri, tamen mihi videtur utilius ob crebrietatem applicationis usum functionis $\mathfrak{L}\varphi$ semper evitare et primam quoque partem tabularum functionum hyperbolicarum computare, ut habeamus tabulas completas functionum, quae tantam utilitatem analysi et praecipue theoriae functionum ellipticarum adferunt. Quamobrem suscepi opus, quod minus oblectationem scientiae dat, sed eo magis utilitati erit.

Putavi vero utile secundum sententiam Cll. *Gudermanni* initio hujus partis tabularum mutationem facere, qua interpolatio facilior redeatur. Namque notum est, ordinum superiorum differentias in tabulis trigonometricis prima parte majores esse, quam ut necessariam interpolandi commoditatem permittant, quod primo adspectu satis apparet. Eandem incommoditatem obviam venit construendis tabulis logarithmo-hyperbolicis. Quamobrem non functionum logarithmos sed functiones ipsas computavi, arcu minore quam numerus 0,5, qua in tabula tum perfaciliter interpolari potest, quod incrementa functionum ipsarum proportionales fere sunt incrementis arcuum, sed non ita earum logarithmorum. Namque progressu 0,0001 est differentia tertiae ordinis minor quam 0,0000 0000 001, et hanc ob causam usque ad nonam decimalem satis accurate interpolari potest. Quae mutatio utilis quoque esset tabulis trigonometricis, et videtur mirum, auctores non esse usos hac proprietate, quo facto amplitudo tabularum valde esset minuta. Quod autem ad tabulam functionis $\mathfrak{L}\varphi$ pertinet, illa semper usui calculi integralis multum proderit, quamquam erit superflua ad inveniendas functionum hyperbolicarum valores, simulac finem perduxi operis, quod suscepi opinione, eo analysi, quae hodie ad summam culturae gradum pervenit, multum utilitatis afferri.

Datum Berolini d. 4. Maji 1836.

*Jordann* stud. math.

# 16.

# Sur le magnétisme terrestre.

(Par Mr. *Simonoff*, professeur à l'université impériale de Kasan.)

---

Les phénomenes que présente une aiguille aimantée successivement transportée en différens lieux du globe terrestre sont devenues un object principal d'occupation pour plusieurs Physiciens. Déjà on a recueilli un grand nombre d'observations importantes sur la direction et sur l'intensité des forces magnétiques de la terre, et on a déterminé avec une exactitude suffisante les trois élémens d'observations presque sur tous les points remarquables de la surface habitée de la terre. Ces trois élémens sont la déclinaison de l'aiguille aimantée, son inclinaison et l'intensité. On peut dire avec assurance que la partie pratique de cette branche de la Physique est complète. Les instrumens perfectionnés dans les derniers tems nous donnent les deux premiers élémens avec la précision d'une minute, et par les méthodes de *Borda* et de *Poisson* on détermine avec une grande exactitude les rapports des intensités des forces magnétiques de la terre en différens lieux. Avec de tels moyens pratiques Mrs. *Humboldt* et *Gay-Lussac, Parry* et *Sabine, Hansteen* et *Erman, Duperey* et *Blosseville* ont fait un grand nombre d'observations précieuses qui pourront servir pour toujours comme des données pour toutes les recherches futures sur les lois de l'action magnétique de notre globe. Les navigateurs ont déterminé la configuration bizarre de la ligne où l'inclinaison magnétique est nulle, et ils ont trouvé que cette ligne, qu'on nomme ordinairement l'équateur magnétique, a plusieurs inflexions dans la partie du globe où elle passe dans l'Océan Atlantique, sur la côte occidentale de l'Amérique, et surtout près des îles Carolines.

Quant à la théorie de cette partie de la Physique, elle est encore très loins de la perfection. On ne connait qu'une seule formule qui donne la loi de l'inclinaison magnétique $I$ de l'aiguille dans des endroits peu éloignés de l'équateur, quand on connaît la latitude magnétique $\lambda$. Cette formule découverte par Mr. *Bowditch* est

$$\operatorname{tang} I = 2 \operatorname{tang} \lambda.$$

Mr. *Biot* a donné dans son Traite de Physique une autre formule qu'il exprime ainsi:

$$\text{tang}(I+\lambda) = \frac{\sin 2\lambda}{\cos 2\lambda - \frac{1}{3}},$$

mais il est facile de voir que la formule de *Biot* est tout-à-fait identique avec celle de *Bowditch*.

La théorie de Mr. *Biot* est fondée sur l'hypothèse qu'au centre de la terre il y ait un aimant très-petit, ou ce qui revient au même, deux centres magnétiques infiniment voisins, l'un boréal et l'autre austral, dont les actions s'exercent sur tous les points de la surface du globe selons les lois ordinaires des forces magnétiques, c'est-à-dire en raison inverse du carré de la distance. La différence des inclinaisons, calculées d'après les formules précédentes avec les inclinaisons observées en Europe, montent quelques fois jusqu'à 6 degrès; mais dans l'Asie orientale ces formules donnent des résultats tout-à-fait différens des observations: c'est une preuve évidente de l'insuffisance de l'hypothèse de deux centres d'action. Mr. *Biot* a déjà remarqué la même chose, et il a reconnu qu'un seul aimant, placé au centre de la terre, ne peut pas satisfaire aux phénoménes. Ne pouvant donc adopter cette idée simple, il a cherché de s'en écarter le moins possible, et puisqu'il a trouvé qu'elle représente assez bien les observations faites en Europe (c'est-à-dire jusqu'à $5^0$ près) et dans l'Océan Atlantique, il a essayé d'y faire une modification telle qu'elle soit peu sensible dans cette partie du globe, et qu'elle le devienne beaucoup dans la partie opposée où l'équateur magnétique éprouve tout-à-coup son inflexion. C'est à quoi l'on parviendra, selon lui, en plaçant près de ce point un second aimant excentrique, dont on peut déterminer la position et l'énergie relative, de manière à satisfaire aux observations. Or, dit-il, en effectuant ce calcul on trouve qu'il suffit de donner à cet aimant une très petite force, pour faire disparaître les anomalies qui ont lieu de ce coté du globe et pour accorder les faibles inclinaisons observées dans la partie australe de la mer du sud avec les grandes inclinaisons qui ont lieu dans le nord de l'Amérique. En repartissant ainsi quelques autres centres secondaires dans les points du globe, où les irrégularités des déclinaisons semblent les plus bizarres, il est vraisemblable, dit-il, qu'on finirait par les représenter toutes avec exactitude, aussi bien que les inclinaisons et les intensités. C'est ainsi que, dans le système du monde le mouvement principal, produit par

l'action du soleil est modifié par les perturbations que les petites masses des planètes produisent.

D'un autre coté Mr. *Biot* fait une question: *l'action magnétique centrale est-elle réellement produite par un noyau magnétique renfermé dans l'intérieur du globe terrestre, ou n'est-elle que la résultante principale de toutes les particules magnétiques disséminées dans sa substance?* Dans ce cas les centres secondaires seraient déterminés par quelques attractions locales devenues prépondérantes. Cette idée paraît être la plus conforme à la nature, dont les forces agissent presque par-tout d'une manière tout-à-fait analogue.

Pour résoudre la question proposée par Mr. *Biot,* je suppose, pour plus de généralité, que dans l'intérieur de la terre se trouve un aimant de figure sphérique dont le rayon soit $r'$. Cet aimant peut être consideré comme un assemblage d'un infiniment grand nombre d'aiguilles ou de barres aimantées infiniment petites et séparées par des espaces insensibles et inaccessibles au magnétisme. Pour abréger, je nomme *élément magnétique* chacune de ces barres élémentaires dans lesquelles les deux fluides — boréal et austral — doivent être séparés, et je suppose que les axes magnétiques de ces élémens ont pris des directions parallèles entre eux.

Rapportons maintenant tous les points de la sphère terrestre et de l'aimant sphérique, qui se trouve dans l'intérieur de la terre, à trois plans des coordonnées rectangulaires dont le plan des $x$ et des $y$ est perpendiculaire aux directions des barres magnétiques élémentaires. Supposons enfin que l'origine des coordonnées est au centre de l'aimant sphérique et que $x'$, $y'$, $z'$ sont les coordonnées du pôle austral d'un élément magnétique quelconque et $x'$, $y'$, $z+p$ les coordonnées de son pôle boréal, où $p$ représente la distance de ces pôles: c'est une quantité infiniment petite et constante, de sorte qu'on peut faire $p = dz'$. Dans ce cas le petit parallelépipède $dx'.dy'.dz'$, qui représente un élément de la sphère aimantée peut être consideré en même tems comme un petit faisceau des aiguilles élémentaires, dont les deux pôles agissent repulsivement sur le pôle de la même nomination et attractivement sur le pôle de la nomination contraire de l'aiguille aimantée librement suspendue dans un lieu quelconque, dont la position sur la surface de la terre soit déterminée par les coordonnées $x$, $y$, $z$.

*Coulomb* et d'autres Physiciens prouvent par des expériences que l'action reciproque de deux aiguilles décroit comme le carré de la distance et que le pouvoir attractif et répulsif des deux fluides — boréal et austral — est rigoureusement égal. Donc l'ensemble des deux actions qu'exercent les deux pôles du faisceau élémentaire $dx'.dy'.dz'$ sur chacun des pôles de l'aiguille de la boussole peut être exprimé ainsi:

$$\frac{\mu\, dx'.dy'.dz'}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}-\frac{\mu\, dx'.dy'.dz'}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z'-p)^2},$$

et les trois composantes de ces actions dirigées vers l'origine des coordonnées, parallèlement aux axes des $x$, des $y$, des $z$ seront

$$\frac{\mu(x-x')dx'.dy'.dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{\mu(x-x')dx'.dy'.dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z'-p)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\mu(y-y')dx'.dy'.dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{\mu(y-y')dx'.dy'.dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z'-p)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\mu(z-z')dx'.dy'.dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{\mu(z-z'-p)dx'.dy'.dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z'-p)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

ou bien, puisque $p$ est une quantité infiniment petite et constante, ces expressions seront

$$\mu p\frac{d}{dz'}\left[\frac{(x-x')dx'.dy'.dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\mu p\frac{d}{dz'}\left[\frac{(y-y')dx'.dy'.dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\mu p\frac{d}{dz'}\left[\frac{(z-z')dx'.dy'.dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Si l'on désigne par $A$, $B$, $C$ les trois composantes suivant les axes des $x$, des $y$, des $z$ de l'action magnétique totale que toute la sphère terrestre exerce sur l'aiguille placée sur sa surface dans le lieu d'observation $x$, $y$, $z$ et si l'on fait

$$\varrho^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2,$$

on aura

$$A = \mu p\iiint\frac{d\left(\frac{x-x'}{\varrho^3}\right)}{dz'}.dx'.dy'.dz'$$

$$B = \mu p\iiint\frac{d\left(\frac{y-y'}{\varrho^3}\right)}{dz'}.dx'.dy'.dz'$$

$$C = \mu p\iiint\frac{d\left(\frac{z-z'}{\varrho^3}\right)}{dz'}.dx'.dy'.dz'.$$

Toutes les intégrales triples doivent être étendues à la masse entière de la sphère aimantée. En effectuant cette intégration par rapport, à $z'$ depuis $z = -Z$ jusqu'à $z = +Z$, nous aurons

$$A = p\mu\iint\frac{(x-x')dx'.dy'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-Z)^2]^{\frac{3}{2}}} - p\mu\iint\frac{(x-x')dx'.dy'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+Z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$B = p\mu\iint\frac{(y-y')dx'.dy'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-Z)^2]^{\frac{3}{2}}} + p\mu\iint\frac{(y-y')dx'.dy'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+Z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$C = p\mu\iint\frac{(z-Z)dx'.dy'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-Z)^2]^{\frac{3}{2}}} - p\mu\iint\frac{(z+Z)dx'.dy'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+Z)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Or l'intégration précédente étant étendue jusqu'à la surface de la sphère magnétique $x$, $y$, $Z$ seront les coordonnées du point d'intersection de cette surface avec la coordonnée $z$. On peut les remplacer par les coordonnées polaires, $r'$, $\theta$, $\psi$, où $\theta$ est l'angle que le rayon $r'$, mené au point $x$, $y$, $Z$, fait avec l'axe des $z$, et $\psi$ l'angle compris entre le plan de ces deux droites avec le plan des $x$ et des $z$. Le produit $dx'.dy'$ est la projection sur le plan des $x$ et des $y$ d'un élément de la surface de la sphère aimantée: l'aire de cet élément sera $r'^2 \sin\theta.d\theta.d\psi$, son inclinaison sur le plan des $x$ et des $y$ sera l'angle $\theta$: il en résulte

$$dx'.dy' = r'^2 \cos\theta.\sin\theta.d\theta.d\psi.$$

On aura en même tems

$$Z = r'\cos\theta, \qquad x' = r'\sin\theta.\cos\psi, \qquad y' = r'\sin\theta.\sin\psi.$$

Chacune des intégrales doubles dans les expressions de $A$, $B$, $C$ s'étendra à tous les élémens de la demi-surface sphérique de l'aimant intérieur dont le rayon est $r'$; donc après la substitution des coordonnées polaires, les limites de ces intégrales seront $\theta = 0$ et $\psi = 0$, $\theta = \frac{1}{2}\pi$ et $\psi = 2\pi$. Mais nous pourrons réunir les intégrales de deux expressions de $A$, $B$, $C$ en une seule dont les limites seront $\theta = 0$, et $\psi = 0$, $\theta = \pi$ et $\varphi = 2\pi$, et ayant fait

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

où $r$ est le rayon du globe terrestre, nous aurons

$$A = \mu p r'^2 \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{(x - r'\sin\theta\cos\psi)\cos\theta.\sin\theta.d\theta.d\psi}{[r^2+r'^2-2r'z\cos\theta-2r'x\sin\theta\cos\psi-2r'y\sin\theta\sin\psi]^{\frac{3}{2}}}$$

$$B = \mu p r'^2 \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{(y - r'\sin\theta\sin\psi)\cos\theta.\sin\theta.d\theta.d\psi}{[r^2+r'^2-2r'z\cos\theta-2r'x\sin\theta\cos\psi-2r'y\sin\theta\sin\psi]^{\frac{3}{2}}}$$

$$C = \mu p r'^2 \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{(z - r'\cos\theta)\cos\theta.\sin\theta.d\theta.\theta\psi}{[r^2+r'^2-2r'z\cos\theta-2r'x\sin\theta\cos\psi-2r'y\sin\theta\sin\psi]^{\frac{3}{2}}}$$

et si l'on fait

$$\nu = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta.\sin\theta.d\theta.d\psi}{[r^2+r'^2-2r'z\cos\theta-2r'x\sin\theta\cos\psi-2r'y\sin\theta\sin\psi]^{\frac{3}{2}}}$$

on aura

$$A = -\mu p r'^2\left(\frac{d\nu}{dx}\right), \quad B = -\mu p r'^2\left(\frac{d\nu}{dy}\right), \quad C = -\mu p r'^2\left(\frac{d\nu}{dz}\right).$$

Maintenant il ne nous reste qu'à intégrer l'expression de $\nu$; mais cette intégration sera beaucoup plus facile si l'on fait $y=0$, c'est-à-dire si l'on suppose que le plan des $x$ et des $z$ passe par le lieu d'observation. Dans ce cas on aura $B=0$ et

$$A = -\mu p r'^2\left(\frac{d\nu}{dx}\right), \quad C = -\mu p r'^2\left(\frac{d\nu}{dz}\right),$$

où

$$\nu = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta.\sin\theta.d\theta.d\psi}{[r^2+r'^2-2r'z\cos\theta-2r'x\sin\theta\cos\psi]^{\frac{3}{2}}},$$

ou si l'on fait $\left(\frac{r'}{r}\right)^2 = k$, $2k^{\frac{1}{2}}\frac{z}{r} = a$, $2k^{\frac{1}{2}}\frac{x}{r} = b$,

$$\nu = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta.\sin\theta.d\theta.d\psi}{[1+k-a\cos\theta-b\sin\theta\cos\psi]^{\frac{3}{2}}},$$

et ayant developpé la dernière expression de $\nu$ en série, nous aurons

$$\nu = \frac{1}{r}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos\theta\sin\theta.d\theta.d\psi \Big\{1-\tfrac{3}{2}(k-\cos\theta-b\sin\theta\cos\psi)$$
$$+\frac{1.3}{2.4}[k^2-2k(a\cos\theta+b\sin\theta\cos\psi)+(a\cos\theta+b\sin\theta\cos\psi)^2]$$
$$-\frac{1.3.5}{2.4.6}[k^3-3k^2(a\cos\theta+b\sin\theta\cos\psi)+3k(a\cos\theta+b\sin\theta\cos\psi)^2-(a\cos\theta+b\sin\theta\cos\psi)^3]$$
$$+\cdots \text{etc.}\Big\}.$$

L'intégrale de cette série se trouvera aisement si l'on sait intégrer l'expression

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} (a\cos\theta+b\sin\theta\cos\psi)^n \cos\theta.\sin\theta.d\theta.d\psi.$$

En désignant cette expression par $Q$ et ayant remarqué les équations

$$\int_0^\pi \cos^{2i+1}\theta.\sin^m\theta.d\theta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^{2i+1}\psi.d\psi = 0,$$

nous aurons d'abord

$$Q = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos\theta.\sin\theta.d\theta.d\psi \Big\{a^n\cos^n\theta + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta\cos^2\psi$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^{n-4}b^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta\cos^4\psi+\cdots \text{etc.}\Big\}$$

et puis il y aura $Q=0$, si $n$ est un nombre pair: il ne nous reste donc que trouver $Q$ quand $n$ est un nombre impair. Pour celà il faut remar-

quer les équations

$$\int_0^\pi \cos^{2i}\theta.\sin^{2m+1}\theta.d\theta = \frac{2m.2(m-1)....2}{(2i+1).(2i+3)....(2i+2m-1)}\cdot\frac{2}{2i+2m+1}$$

et

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i}\psi.d\psi = \frac{1.3....(2i-1)}{2.4.......2i}\cdot 2\pi,$$

d'où l'on tire, si $n = 2q+1$,

$$\int_0^\pi \cos^{2(q+1)}\theta.\sin\theta.d\theta = \frac{2}{2q+3},$$

$$\int_0^\pi \cos^{2q}\theta\ .\ \sin^3\theta.d\theta = \frac{2}{2q+3}\cdot\frac{2}{2q+1},$$

$$\int_0^\pi \cos^{2(q-1)}\theta.\sin^5\theta.d\theta = \frac{2}{2q+3}\cdot\frac{2}{(2q+1)(2q-1)},$$

$$\int_0^\pi \cos^{2(q-2)}\theta.\sin^7\theta.d\theta = \frac{2}{2q+3}\cdot\frac{2.4}{(2q+1)(2q-1)(2q-3)}$$

etc.

et

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\psi.d\psi = \tfrac{1}{2}.2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\psi.d\psi = \frac{1.3}{2.4}\cdot 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^6\psi.d\psi = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^8\psi.d\psi = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot 2\pi$$

etc.,

ce qui étant substitué dans l'expression de $Q$, on aura

$$Q = \frac{4\pi}{2q+3}\cdot a(a^2+b^2)^q,$$

et par consequent

$$\begin{aligned}\nu = \frac{4\pi a}{r}\Big\{ & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{2}{1}k + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{3}{1}k^2 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{4}{1}k^4 + \dots\right) \\ & - \frac{a^2+b^2}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{4.3.2}{1.2.3}k + \frac{1.3....9}{2.4....10}\cdot\frac{5.4.3}{1.2.3}k^2 - \frac{1.3....11}{2.4....12}\cdot\frac{6.5.4}{1.2.3}k^4 + \dots\right) \\ & + \frac{(a^2+b^2)^2}{7}\left(\frac{1.3....9}{2.4....10} - \frac{1.3....11}{2.4....12}\cdot\frac{6.5....2}{1.2....5}k + \frac{1.3....13}{2.4....14}\cdot\frac{7.6....3}{1.2....5}k^2 - \frac{1.3....15}{2.4....16}\cdot\frac{8.6....4}{1.2....5}k^4 + \dots\right) \\ & - \frac{(a^2+b^2)^3}{9}\left(\frac{1.3....13}{2.4....14} - \frac{1.3....15}{2.4....16}\cdot\frac{8.7....2}{1.2....7}k + \frac{1.3....17}{2.4....18}\cdot\frac{9.8....3}{1.2....7}k^2 - \frac{1.3....19}{2.4....20}\cdot\frac{10.9....4}{1.2....7}k^4 + \dots\right) \\ & + \text{etc.}\Big\}.\end{aligned}$$

Mais nous avons supposé $a = 2k^{\frac{1}{2}}\frac{z}{r}$, $b = 2k^{\frac{1}{2}}\frac{x}{r}$, $\left(\frac{r'}{r}\right)^2 = k$: ce qui étant substitué dans la série précédente, nous aurons

$$\nu = \frac{8\pi . r' . z}{r^3}\Big[\frac{1}{2}.\frac{1}{3} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{2}{1}.\frac{k}{3} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{3}{1}.\frac{k^2}{3} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{4}{1}.\frac{k^3}{3} + \ldots$$
$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{2^2 k}{5} - \frac{1.3\ldots 7}{2.4\ldots 8}.\frac{4.3.2}{1.2.3}.\frac{2^2 k^2}{5} + \frac{1.3\ldots 9}{2.4\ldots 10}.\frac{5.4.3}{1.2.3}.\frac{2^2 k^3}{5} + \ldots$$
$$+ \frac{1.3\ldots 9}{2.4\ldots 10}.\frac{2^4 k^2}{7} - \frac{1.3\ldots 11}{2.4\ldots 12}.\frac{6.5\ldots 2}{1.2\ldots 5}.\frac{2^4 k^3}{7} + \ldots$$
$$+ \frac{1.3\ldots 13}{2.4\ldots 14}.\frac{2^6 k^3}{9} + \ldots\Big].$$

Mais comme en général

$$\frac{1.3\ldots}{2.4\ldots}\frac{(4q+1)}{2(2q+1)}.\frac{2^{2q}}{2q+3} - \frac{2q}{1}.\frac{1.3\ldots(4q-1)}{2.4\ldots\ldots 4q}.\frac{2^{2q-2}}{2q+1} + \frac{(2q-1)(2q-2)}{1.2}.\frac{1.3\ldots(4q-3)}{2.4\ldots 2(2q-1)}.\frac{2^{2q-4}}{2q-1}$$
$$- \frac{(2q-2)(2q-3)(2q-4)}{1.2.3}.\frac{1.3\ldots(4q-5)}{2.4\ldots 2(2q-2)}.\frac{2^{2q-6}}{2q-3} + \ldots \pm \frac{q+1}{1}.\frac{1.3\ldots(2q+1)}{2.4\ldots 2(q+1)}.\frac{1}{3} = 0,$$

on aura

$$\nu = \frac{4\pi . r' . z}{3r^3}.$$

A présent nous trouverons sans aucune difficulté

$$A = -\mu p r'^2\left(\frac{d\nu}{dx}\right) = \frac{4\pi . \mu p r'^3 z x}{r^5},$$
$$C = -\mu p r'^2\left(\frac{d\nu}{dz}\right) = \frac{4\pi . \mu p r'^3 z^2}{r^5} - \frac{4\pi . \mu p r'^3}{3r^3},$$

d'où l'on aura

$$\frac{A}{C} = \frac{x . z}{z^2 - \frac{1}{3} . r^2}.$$

Il résulte de la dernière équation que le rapport de $A$ et de $C$ est indépendant du demi-diamètre de la sphère magnétique qui se trouve dans l'intérieur de la terre.

Supposons maintenant que la sphère du noyau magnétique qui se trouve dans l'intérieur de la terre soit concentrique avec le globe terrestre: dans ce cas le plan des coordonnées $x$ et $y$ deviendra le plan de l'équateur magnétique, et si l'on désigne par $\lambda$ la latitude magnétique on aura alors

$$z = r\sin\lambda, \qquad x = r\cos\lambda$$

et par conséquent

$$\frac{A}{C} = \frac{\sin\lambda . \cos\lambda}{\sin^2\lambda - \frac{1}{3}}.$$

Désignons enfin par $I$ l'inclinaison de l'aiguille aimantée et par $F$ son intensité, nous aurons

$$A = F\sin(180 - I - \lambda) = + F\sin(I + \lambda),$$
$$C = F\cos(180 - I - \lambda) = - F\cos(I + \lambda)$$

et par conséquent

$$\operatorname{tang}(I+\lambda) = -\frac{\sin\lambda.\cos\lambda}{\sin^2\lambda - \frac{1}{3}} = \frac{\sin 2\lambda}{\cos 2\lambda - \frac{1}{3}},$$

ou bien

$$\operatorname{tang} I = 2 \operatorname{tang}\lambda.$$

L'équation pénultième est celle que Mr. *Biot* a trouvée, ayant supposé qu'au centre de la terre il y a un aimant très-petit ou deux centres d'action magnétique infiniment voisins. Mais comme le calcul précédent montre que $I$ est indépendant du demi-diamètre de la sphère magnétique qui se trouve au milieu de la terre, pourvu qu'elle soit concentrique avec le globe terrestre, on peut conclure que, dans ce cas, l'inclinaison magnétique est toujours la même et qu'elle provienne de l'action d'un noyau magnétique, renfermé dans l'intérieur de la terre, ou de l'action de toutes les particules magnétiques disséminées dans sa substance.

Avril 1836.

---

# 18.

# Eine neue Methode, die numerischen Summen langsam convergirender Reihen zu berechnen.

(Vom Herrn Dr. phil. *E. E. Kummer* zu Liegnitz.)

---

In einer Abhandlung Bd. 13. pag. 171 dieses Journals habe ich einige Sätze erwiesen, welche für die Convergenz oder Divergenz einer jeden unendlichen Reihe, in welcher, von einem bestimmten Gliede an, alle folgenden positiv sind, ein allgemeingültiges Criterium enthalten. Ich habe daselbst pag. 181 bemerkt, dafs die willkürliche Function, welche in dem ersten und zweiten Satze vorkommt, ein leichtes Mittel an die Hand giebt, um zwei Grenzen zu finden, in denen die Summe aller Glieder einer solchen Reihe, welche auf ein bestimmtes Glied folgen, enthalten sein mufs, und ich habe dies a. a. O. allgemein und an einigen Beispielen gezeigt. Hierauf habe ich eine Methode gegründet, die numerischen Summen sehr langsam convergirender Reihen mit Leichtigkeit zu finden, indem ich nur eine geringe Anzahl der ersten Glieder der Reihe wirklich summire, den Werth aller übrigen aber in zwei Grenzen einschliefse, welche ich so nahe als möglich zusammen bringe. Diese Methode will ich jetzt, unabhängig von den Resultaten jener Abhandlung, kürzlich auseinandersetzen.

Wenn die Reihe $\overset{1}{A}+\overset{2}{A}+\overset{3}{A}+\ldots\ldots+\overset{k}{A}+\ldots\ldots$ in inf. zu summiren ist, in welcher alle Glider positiv sein sollen, so kommt es darauf an, zwei Grenzen zu finden, in denen die Summe der Reihe $\overset{k+1}{A}+\overset{k+2}{A}+\overset{k+3}{A}+\ldots$ in inf. enthalten sein mufs. Zu diesem Zwecke nehme ich eine willkürliche Function $\overset{k}{m}$ des Stellenzeigers $k$, welche ich jedoch so weit bestimme, dafs $\overset{k}{m}\overset{k}{A}$ nur positive Werthe haben, und, wenn $k$ in's Unendliche wächst, sich der Grenze 0 in's Unendliche nähern soll, und dafs der Ausdruck $\frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{\overset{k+1}{A}}-\overset{k+1}{m}$, den ich kurz durch $f(k)$ bezeichne, positiv sein, und, wenn $k$ in's Unendliche wächst, sich der Grenze 1 in's Unendliche nähern soll.

Dieses vorausgesetzt folgt aus der Gleichung $\frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{\overset{k+1}{A}} - \overset{k+1}{m} = f(k)$:

$$1.\quad \begin{cases} \overset{k}{m}\overset{k}{A} - \overset{k+1}{m}\overset{k+1}{A} = f(k).\overset{k+1}{A}, \\ \overset{k+1}{m}\overset{k+1}{A} - \overset{k+2}{m}\overset{k+2}{A} = f(k+1).\overset{k+2}{A}, \\ \overset{k+2}{m}\overset{k+2}{A} - \overset{k+3}{m}\overset{k+3}{A} = f(k+2).\overset{k+3}{A}, \\ \quad\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Durch Addition aller dieser Gleichungen, bis in's Unendliche, erhält man:

$$2.\quad \overset{k}{m}\overset{k}{A} = f(k).\overset{k+1}{A} + f(k+1).\overset{k+2}{A} + f(k+2).\overset{k+3}{A} + \ldots \text{ in inf.};$$

denn ein Glied $-\overset{k+\infty}{m}\overset{k+\infty}{A}$, welches dem Theile links vom Gleichheitszeichen noch hinzuzufügen wäre, verschwindet, weil vorausgesetzt worden ist, es soll $\overset{k}{m}\overset{k}{A} = 0$ sein, für $k = \infty$. Die Gleichung (2.) durch $f(k)$ dividirt, giebt:

$$3.\quad \frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{f(k)} = \overset{k+1}{A} + \frac{f(k+1)}{f(k)}\overset{k+2}{A} + \frac{f(k+2)}{f(k)}\overset{k+3}{A} + \ldots.$$

Es ist oben bestimmt worden, die Function $f(k)$ solle positiv sein und für $k = \infty$ die Grenze 1 erreichen: ich bestimme nun weiter, es solle $k$ so grofs angenommen werden, dafs von dem Werthe $k = k$ bis $k = \infty$ die Function $f(k)$ entweder nur wachse oder nur abnehme (kein Maximum oder Minimum mehr habe). Im ersten Falle, wo $f(k)$, fortwährend wachsend, sich der Einheit nähert, hat man

$$f(k) < 1, \quad f(k+1) < 1, \quad f(k+2) < 1, \quad \ldots \text{ etc.}$$

und

$$\frac{f(k+1)}{f(k)} > 1, \quad \frac{f(k+2)}{f(k)} > 1, \quad \frac{f(k+3)}{f(k)} > 1, \quad \ldots \text{ etc.},$$

und deshalb geben die Gleichungen (2. und 3.):

$$\overset{k}{m}\overset{k}{A} < \overset{k+1}{A} + \overset{k+2}{A} + \overset{k+3}{A} + \ldots \text{ in inf.},$$

$$\frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{f(k)} > \overset{k+1}{A} + \overset{k+2}{A} + \overset{k+3}{A} + \ldots \text{ in inf.}$$

Im anderen Falle, wo $f(k)$, fortwährend abnehmend, sich der Grenze 1 nähert, hat man

$$f(k) > 1, \quad f(k+1) > 1, \quad f(k+2) > 1, \quad \text{etc.},$$

$$\frac{f(k+1)}{f(k)} < 1, \quad \frac{f(k+2)}{f(k)} < 1, \quad \frac{f(k+3)}{f(k)} < 1, \quad \text{etc.};$$

für diesen Fall also geben die Gleichungen (2. und 3.):

$$\overset{k}{m}\overset{k}{A} > \overset{k+1}{A} + \overset{k+2}{A} + \overset{k+3}{A} + \dots \text{ in inf.},$$
$$\frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{f(k)} < \overset{k+1}{A} + \overset{k+2}{A} + \overset{k+3}{A} + \dots \text{ in inf.}$$

Es ist also unter den angegebenen Voraussetzungen (dafs die Glieder der Reihe $\overset{1}{A} + \overset{2}{A} + \overset{3}{A} + \dots$ in inf. alle positiv sind, dafs ferner $\overset{k}{m}\overset{k}{A}$ positiv ist und für $k = \infty$ verschwindet, und dafs der Ausdruck $f(k)$ von dem Werthe $k = k$ bis $k = \infty$ positiv ist, und entweder nur zunehmend oder nur abnehmend sich der Grenze 1 nähert, wenn $k$ in's Unendliche wächst) die Summe aller Glieder, welche auf das $k^{te}$ Glied folgen, stets in den beiden Grenzen eingeschlossen:

$$4. \quad \overset{k}{m}\overset{k}{A} \quad \text{und} \quad \frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{f(k)}.$$

Aus meiner erwähnten Abhandlung über die Convergenz geht hervor, dafs es, sobald die Reihe, deren allgemeines Glied $\overset{k}{A}$ ist, wirklich convergirt, stets eine unendliche Anzahl verschiedener Functionen $\overset{k}{m}$ giebt, welche den gesetzten Bedingungen genügen. Um nun aber durch die beiden Grenzen eine möglichst genaue Bestimmung des wahren Werthes zu haben, mufs man für $\overset{k}{m}$ eine Function wählen, welche bewirkt, dafs diese Grenzen so nahe als möglich zusammenfallen, und dies wird dann der Fall sein, wenn $f(k)$ der Einheit aufserordentlich nahe kommt.

Es soll nun für eine sehr oft vorkommende, und sehr umfassende Gattung sehr langsam convergirender Reihen eine passende Function $\overset{k}{m}$ bestimmt werden, und zwar für alle diejenigen, in welchen der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder sich immer mehr der Einheit nähert, je gröfser der Stellenzeiger $k$ wird, und bei denen dieser Quotient sich nach ganzen fallenden Potenzen von $k$ entwickeln läfst, so dafs

$$5. \quad \frac{\overset{k}{A}}{\overset{k+1}{A}} = 1 + \frac{v_1}{k} + \frac{v_2}{k^2} + \frac{v_3}{k^3} + \frac{v_4}{k^4} + \dots$$

Ich gebe der Function $\overset{k}{m}$ folgende Form eines rationalen Bruches:

$$6. \quad \overset{k}{m} = ck + c_1 + \frac{a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n}{k^n + b_1 k^{n-1} + b_2 k^{n-2} + \dots + b_n},$$

welcher in folgende recurrirende Reihe entwickelt werden mag:

$$7. \quad \overset{k}{m} = ck + c_1 + \frac{c_2}{k} + \frac{c_3}{k^2} + \frac{c_4}{k^3} + \dots$$

**Aus den Entwickelungen (5.) und (7.) bildet man leicht folgende Entwickelung für $f(k)=\frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{\overset{k+1}{A}}-\overset{k+1}{m}$:**

$$
\begin{aligned}
8.\quad f(k) = \; & c(v_1-1)\\
& +(c_1v_1+cv_2)\frac{1}{k}\\
& +(c_2(v_1+1)+c_1v_2+cv_3)\frac{1}{k^2}\\
& +(c_3(v_1+2)+c_2(v_2-1)+c_1v_3+cv_4)\frac{1}{k^3}\\
& +(c_4(v_1+3)+c_3(v_2-3)+c_2(v_3+1)+c_1v_4+cv_5)\frac{1}{k^4}\\
& +(c_5(v_1+4)+c_4(v_2-6)+c_3(v_3+4)+c_2(v_4-1)+c_1v_5+cv_6)\frac{1}{k^5}\\
& +\ldots\text{ etc.}
\end{aligned}
$$

**Das Gesetz, nach welchem diese Entwickelung fortschreitet, ist klar; denn die darin vorkommenden Zahlen sind die Binomialcoëfficienten, mit abwechselnden Vorzeichen. Da für $k=\infty$, $f(k)=1$ sein soll, so mufs $c(v_1-1)=1$ genommen werden. Aufser $c$ sind nun aber, in der bei (6.) angenommenen Form des $\overset{k}{m}$, $2n+1$ willkürliche Constanten enthalten, welche so bestimmt werden sollen, dafs dadurch die Coëfficienten von $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k^2}$, $\frac{1}{k^3}\ldots$ bis $\frac{1}{k^{2n+1}}$ in der Entwickelung des $f(k)$ verschwinden: dafs also folgende Gleichungen Statt haben:**

$$
9.\quad\left\{\begin{aligned}
1 &= c(v_1-1),\\
0 &= c_1v_1+cv_2,\\
0 &= c_2(v_1+1)+c_1v_2+cv_3,\\
0 &= c_3(v_1+2)+c_2(v_2-1)+c_1v_3+cv_4,\\
0 &= c_4(v_1+3)+c_3(v_2-3)+c_2(v_3+1)+c_1v_4+cv_5,\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= c_{2n+1}(v_1+2n)+c_{2n}\left(v_2-\frac{2n(2n-1)}{1.2}\right)+\ldots+cv_{2n+2}.
\end{aligned}\right.
$$

**Alsdann hat $f(k)$ folgende Form der Entwickelung:**

$$f(k)=1+\frac{p}{k^{2n+2}}+\frac{q}{k^{2n+3}}+\ldots,$$

**woraus man ersieht, dafs, wenn $k$ und $n$ nur einigermafsen grofs angenommen werden, $f(k)$ der Einheit sehr nahe kommt, und folglich die beiden Grenzen bei (4.) sehr nahe zusammenfallen. Weil nun oben gesetzt worden ist:**

$$\frac{a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n}{k^n + b_1 k^{n-1} + b_2 k^{n-2} + \dots + b_n} = \frac{c_2}{k} + \frac{c_3}{k^2} + \frac{c_4}{k^3} + \dots,$$

so erhält man, indem man mit dem Nenner multiplicirt und die gleichen Potenzen von $k$ mit einander vergleicht, folgende Gleichungen:

$$10. \quad \begin{cases} a_1 = c_2, \\ a_2 = c_3 + c_2 b_1, \\ a_3 = c_4 + c_3 b_1 + c_2 b_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n = c_{n+1} + c_n b_1 + c_{n-1} b_2 + \dots + c_2 b_{n-1}, \end{cases}$$

$$11. \quad \begin{cases} 0 = c_{n+2} + c_{n+1} b_1 + c_n b_2 + \dots + c_2 b_n, \\ 0 = c_{n+3} + c_{n+2} b_1 + c_{n+1} b_2 + \dots + c_3 b_n, \\ 0 = c_{n+4} + c_{n+3} b_1 + c_{n+2} b_2 + \dots + c_4 b_n, \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 = c_{2n+1} + c_{2n} b_1 + c_{2n-1} b_2 + \dots + c_{n+1} b_n. \end{cases}$$

Um nun $\overset{k}{m}$ zu finden, bestimmt man zuerst die $2n+2$ Gröfsen $c$, $c_1$, $c_2$, .... $c_{2n+1}$, durch die bekannten $v_1$, $v_2$, $v_3$, etc. aus den Gleichungen bei (9.). Die gefundenen Werthe dieser Quantitäten substituirt man in den $n$ Gleichungen bei (11.) und bestimmt aus diesen die Gröfsen $b_1$, $b_2$, $b_3$, .... $b_n$; alsdann erhält man aus den Gleichungen (10.) unmittelbar auch $a_1$, $a_2$, $a_3$, .... $a_n$. Nachdem so die Function $\overset{k}{m}$ der Gleichung (6.) vollständig bestimmt ist, berechnet man $f(k)$, und sodann $\overset{k}{m}\overset{k}{A}$ und $\frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{f(k)}$, die beiden Grenzen der Reihe $\overset{k+1}{A} + \overset{k+2}{A} + \overset{k+3}{A} + \dots$ in inf. Auf eben so viele Decimalstellen, als diese beiden Grenzen mit einander übereinstimmen, hat man den wahren Werth dieser Reihe genau, und wenn man hiezu noch die auf gewöhnlichem Wege gefundene Summe der ersten $k$ Glieder addirt, so hat man die Summe der Reihe $\overset{1}{A} + \overset{2}{A} + \overset{3}{A} + \overset{4}{A} + \dots$ in inf.

Wir wollen nun diese Methode auf die Summation einiger Reihen anwenden:

**Beispiel 1.** Die Summe folgender Reihe zu berechnen:

$$R = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots \text{ in inf.}$$

In diesem Falle ist $\overset{k}{A} = \frac{1}{k^3}$, also

$$\frac{\overset{k}{A}}{\underset{A}{\overset{k+1}{}}} = 1 + \frac{3}{k} + \frac{3}{k^2} + \frac{1}{k^3},$$

und folglich

$$v_1 = 3, \quad v_2 = 3, \quad v_3 = 1, \quad v_4 = v_5 = v_6 = \ldots\ldots = 0.$$

Für diese Werthe der $v_1$, $v_2$, $v_3$, etc. erhält man aus den Gleichungen (10.):

$$c = \tfrac{1}{2}, \quad c_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad c_2 = +\tfrac{1}{4}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = -\tfrac{1}{12}, \quad c_5 = 0,$$
$$c_6 = +\tfrac{1}{12}, \quad c_7 = 0, \quad c_8 = -\tfrac{3}{10}, \quad c_9 = 0, \quad c_{10} = \tfrac{5}{12}, \quad c_{11} = 0.$$

Aus diesen Werthen erhält man ferner durch die Gleichungen bei (12.), wenn $n = 5$ angenommen wird:

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 4, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = \tfrac{22}{10}, \quad b_5 = 0,$$

und hieraus endlich, durch die Gleichungen (11.):

$$a_1 = \tfrac{1}{4}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \tfrac{11}{12}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \tfrac{3}{10}.$$

Substituirt man nun diese Werthe in der Form des $\overset{k}{m}$ bei (6.), so wird:

$$\overset{k}{m} = \frac{k}{2} - \frac{1}{2} + \frac{30k^4 + 110k^2 + 36}{120k^5 + 480k^3 + 264k}.$$

Nimmt man nun $k = 10$, so berechnet man leicht:

$$\overset{10}{m} = 4{,}52491\,74854\,03728\ldots\ldots, \qquad \overset{11}{m} = 5{,}02266\,51730\,6974\ldots\ldots,$$

und hieraus

$$f(10) = 1{,}00000\,00000\,0261\ldots\ldots;$$

ferner

$$\overset{10}{m}\overset{10}{A} = 0{,}00452\,49174\,85403\,73\ldots\ldots; \qquad \frac{\overset{10}{m}\overset{10}{A}}{f(10)} = 0{,}00452\,49174\,85391\,91\ldots\ldots,$$

welches die beiden Grenzen sind, in welchen die Summe der Reihe

$$\frac{1}{11^3} + \frac{1}{12^3} + \frac{1}{13^3} + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

enthalten ist. Addirt man hiezu noch die Summe der ersten zehn Glieder:

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{10^3} = 1{,}19753\,19856\,74193\,25\ldots\ldots,$$

so erhält man die Summe der Reihe:

$$R < 1{,}20205\,69031\,59596\,98\ldots\ldots, \qquad R > 1{,}20205\,69031\,59585\,16\ldots\ldots,$$

so dafs nach dieser Methode, indem wir nur die ersten zehn Glieder wirklich durch Addition summirt haben, der wahre Werth der Reihe bis zur vierzehnten Decimalstelle genau gefunden worden ist. Übrigens läfst sich zeigen, dafs man, nach der gewöhnlichen Art zu summiren, um dieselbe Genauigkeit zu erreichen, mehr als Zehn Millionen Glieder der Reihe summiren müfste.

**Beispiel 2.** Es sei folgende unendliche Reihe zu summiren:

$$y = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

Das $k^{te}$ Glied dieser Reihe ist:

$$\overset{k}{A} = \left(\frac{1.3.5\ldots(2k-3)}{2.4.6\ldots(2k-2)}\right)^3,$$

folglich

$$\frac{\overset{k}{A}}{\overset{k+1}{A}} = \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2k} + \frac{6}{2^2 k^2} + \frac{10}{2^3 k^3} + \frac{15}{2^4 k^4} + \ldots$$

also

$$v_1 = \frac{3}{2}, \quad v_2 = \frac{6}{4}, \quad v_3 = \frac{10}{2^3}, \quad v_4 = \frac{15}{2^4}, \quad v_5 = \frac{21}{2^5}, \quad v_6 = \frac{28}{2^6},$$
$$v_7 = \frac{36}{2^7}, \quad v_8 = \frac{45}{2^8}.$$

In der Form des $\overset{k}{m}$, Gleichung (6.), nehme ich, weil dies eine große Genauigkeit geben wird, $n = 3$; ich erhalte alsdann aus den Gleichungen (9.):

$$c = 2, \quad c_1 = -2, \quad c_2 = \frac{1}{5}, \quad c_3 = \frac{3}{20}, \quad c_4 = \frac{3}{40}, \quad c_5 = 0,$$
$$c_6 = \frac{-81}{13.160}, \quad c_7 = \frac{-81}{13.320}.$$

Hieraus durch die Gleichungen (11.):

$$b_1 = -\frac{9}{4}, \quad b_2 = \frac{243}{104}, \quad b_3 = -\frac{189}{208};$$

und endlich aus den Gleichungen bei (10.):

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad a_2 = -\frac{3}{10}, \quad a_3 = \frac{213}{1040};$$

so dafs für diesen Fall ist:

$$\overset{k}{m} = 2k - 2 + \frac{208k^2 - 312k + 213}{1040k^3 - 2340k^2 + 2430k - 945}.$$

Nimmt man wieder $k = 10$, so findet man durch leichte Rechnung:

$$\overset{10}{m} = 18{,}02157\,45971\,26\ldots, \qquad \overset{11}{m} = 20{,}01947\,75864\,35\ldots,$$
$$f(10) = 1{,}00000\,00019\,0\ \ldots,$$
$$\overset{10}{m}\overset{10}{A} = 0{,}11497\,88158\,3\ \ldots, \qquad \frac{\overset{10}{m}\overset{10}{A}}{f(10)} = 0{,}11497\,88156\,1\ \ldots$$

Addirt man hiezu noch die Summe der ersten zehn Glieder, welche 1,27822 51138 68.... ist, so erhält man die Summe der Reihe $y$:

$$y < 1{,}39320\,39297\,0\ldots, \qquad y > 1{,}39320\,39294\,8\ldots,$$

also

$$y = 1{,}39320\,39296\ldots,$$

wo höchstens die letzte Stelle um zwei Einheiten unrichtig sein kann.

Ich bemerke hier, dafs die Reihe $y$ durch folgendes bestimmte Integral ausgedrückt werden kann:

$$y = \frac{4}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-x^2y^2)}},$$

und dieses bestimmte Integral wieder durch elliptische Transcendenten, so dafs

$$y = \frac{4}{\pi^2}(F'(\sqrt{\tfrac{1}{2}}))^2.$$

Der Zahlenwerth des $y$ nach dieser Formel berechnet, stimmt genau mit dem obigen überein.

Man kann diese Methode der Summation noch aus einem anderen Gesichtspuncte auffassen, nämlich, wenn man von der Form eines rationalen Bruches, welche der Function $\overset{k}{m}$ gegeben worden ist, ganz absieht, und nur die Form der Reihenentwickelung, Gleichung (7.), berücksichtigt. Betrachtet man nämlich die Gleichungen (9.) als Recursionsformeln, und denkt man sich dieselben bis in's Unendliche fortgesetzt, und die Gröfsen $c, c_1, c_2, c_3$ bis in's Unendliche daraus bestimmt, so ist für jeden Werth des $k$, $f(k) = 1$, also fallen für jeden Werth des $k$ die beiden Grenzen $\overset{k}{m}\overset{k}{A}$ und $\frac{\overset{k}{m}\overset{k}{A}}{f(k)}$ zusammen, und man hat

$$(12.)\quad \overset{k}{A}\left(ck + c_1 + \frac{c_2}{k} + \frac{c_3}{k^2} + \dots\right) = \overset{k+1}{A} + \overset{k+2}{A} + \overset{k+3}{A} + \dots,$$

wenn

$$\frac{\overset{k}{A}}{\overset{k+1}{A}} = 1 + \frac{v_1}{k} + \frac{v_2}{k^2} + \frac{v_3}{k^3} + \dots.$$

und

$$\begin{aligned}
1 &= c(v_1 - 1),\\
0 &= c_1 v_1 + c v_2,\\
0 &= c_2(v_1+1) + c_1 v_2 + c v_3,\\
0 &= c_3(v_1+2) + c_2(v_2-1) + c_1 v_3 + c v_4,\\
0 &= c_4(v_1+3) + c_3(v_2-3) + c_2(v_3+1) + c_1 v_4 + c v_5,\\
0 &= c_5(v_1+4) + c_4(v_2-6) + c_3(v_3+4) + c_2(v_4-1) + c_1 v_5 + c v_6,\\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Dies ist eine neue, ziemlich allgemeine Summationsformel, und zwar unter allen wohl diejenige, welche durch am meisten elementare Methoden

hergeleitet werden kann. Sie hat auch einige Vorzüge vor der gewöhnlichen, welche für den gegenwärtigen Zweck wie folgt dargestellt werden kann:

$$13.\quad \overset{k+1}{A} + \overset{k+2}{A} + \overset{k+3}{A} + \dots \text{ in inf.}$$
$$= \int_k^\infty \overset{k}{A}\, dk - \tfrac{1}{2}\overset{k}{A} - \frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{d\overset{k}{A}}{dk} + \frac{\overset{2}{B}}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^3\overset{k}{A}}{dk^3} - \dots,$$

wo $\overset{1}{B} = \frac{1}{6}$, $\overset{2}{B} = \frac{1}{30}$, etc. die Bernoullischen Zahlen sind. Diese Formel kann in vielen Fällen ebenfalls dazu angewendet werden, die numerischen Summen sehr langsam convergirender Reihen zu berechnen; wenn aber $\overset{k}{A}$ eine unentwickelbare Function ist, wie in dem obigen zweiten Beispiele, so haben Integrale und Differenzialquotienten derselben an sich keinen Sinn. Nur in dem Falle, wo $\overset{k}{A} = \frac{1}{k^m}$, stimmen die beiden Summationsformeln (12.) und (13.) vollständig mit einander überein.

Liegnitz, den 10. November 1834.

# 19.

## Einiges von Kegelschnitten.

(Vom Herrn Prof. *Bruun* zu Odessa.)

---

1. **Lehrsatz.** Ein Punct $P$, dessen Coordinaten $g, h$ sind, liegt innerhalb oder außerhalb der Parabel

$$1.\quad y^2+2Bxy+B^2x^2+2Dy+2Ex=0,$$

je nachdem $h^2+2Bgh+B^2g^2+2Dh+2Eg \lesseqgtr 0$ ist.

**Beweis.** Die Gleichung (1.) läßt sich immer, ohne den Anfangspunct der Coordinaten zu verändern, auf die Form

$$Ry'^2+Tx'=0$$

bringen; wo, wenn $\alpha$ der Coordinatenwinkel des alten Achsensystems ist und $\beta$ und $\gamma$ die Winkel bedeuten, unter denen die neuen Achsen die alte Abscissenachse schneiden, und wenn man $\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=m$ und $\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha-\gamma)}=m'$ setzt, folgende Bedingungsgleichungen Statt finden:

$$m'=-\frac{E}{D},\qquad m=-B,$$

und

$$R=(m'-m)^2\sin(\alpha-\gamma)^2;\qquad T=2D(m-m')\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha \text{ ist.}$$

Sind nun die Coordinaten des Punctes $P$ in Beziehung auf das neue Achsensystem $g', h'$, so liegt der Punct $P$ innerhalb oder außerhalb der Parabel, je nachdem

$$Rh'^2+Tg' \lesseqgtr 0 \text{ ist.}$$

Es lassen sich aber die neuen Coordinaten $g', h'$ durch die alten $g, h$ bestimmen: namentlich ist

$$h'=\frac{(h-mg)\sin\alpha}{(m'-m)\sin(\alpha-\gamma)}\qquad\text{und}\qquad g'=\frac{(h-m'g)\sin\alpha}{(m-m')\sin(\alpha-\beta)}.$$

Setzen wir nun für $R$, $T$, $h'^2$, $g'$ ihre Werthe, so kommt

$$Rh'^2=(h^2+2Bgh+g^2B^2)\sin\alpha^2\qquad\text{und}\qquad Tg'=2(Dh+Eg)\sin\alpha^2:$$

also liegt $P$ innerhalb oder außerhalb der Parabel, je nachdem

$$h^2+2Bgh+B^2g^2+2Dh+2Eg \lesseqgtr 0 \text{ ist.}$$

**Anwendung.** In einer Ebene sind fünf Puncte $O, M, N, P, Q$ gegeben, von welchen keine drei in einer Geraden liegen: die Art des Ke-

gelschnitts zu bestimmen, welcher durch die fünf Puncte beschrieben werden kann.

Es sei $y^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F$ die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts. Die Coordinaten des Punctes seien $O=0, 0$; des Punctes $M=a, 0$; des Punctes $N=0, b$; des Punctes $P=g, h$ *); des Punctes $Q=g', h'$.

Alsdann erhält man, als Gleichungen der zwei durch $O$, $M$, $N$, $P$ gehenden Parabeln:

der einen $y^2+2B'xy+B'^2x-by-B'^2ax=0$,

der anderen $y^2+2B''xy+B''^2x^2-by-B''^2ax=0$,

wenn $B'$ und $B''$ die Wurzeln der Gleichung $B^2+\frac{2Bh}{g-a}+\frac{h^2-bh}{g(g-a)}=0$ sind.

Es liegt der fünfte Punct $Q$ innerhalb oder aufserhalb der ersten Parabel, je nachdem

$$h'^2+2B'g'h'+B'^2g'^2-bh'-B'^2ag'\lessgtr 0,$$

oder

$$g'[g'-a]\left[B'^2+\frac{2B'h'}{g'-a}+\frac{h'^2-bh'}{g'[g'-a]}\right]\lessgtr 0$$

ist; endlich, je nachdem $(B'-B''')(B'-B^{IV})g'(g'-a)\lessgtr 0$ ist, wenn $B'''$, $B^{IV}$ die Wurzeln der Gleichung $B'^2+\frac{2Bh'}{g'-a}+\frac{h'^2-bh'}{g'(g'-a)}=0$ sind.

$Q$ liegt innerhalb oder aufserhalb der zweiten Parabel, je nachdem

$$(B''-B''')(B''-B^{IV})g'(g'-a)\lessgtr 0 \text{ ist;}$$

$Q$ also innerhalb oder aufserhalb beider Parabeln, wenn

$$(B'-B''')(B'-B^{IV})(B''-B''')(B''-B^{IV})>0 \text{ ist;}$$

$Q$ innerhalb der einen und aufserhalb der anderen, wenn

$$(B'-B''')(B'-B^{IV})(B''-B''')(B''-B^{IV})<0 \text{ ist.}$$

Die Bedingungsgleichungen eines Kegelschnitts, welcher durch die fünf Puncte $M$, $N$, $O$, $P$, $Q$ geht, sind, wenn man $C-B^2=d$ setzt,

$$B^2+\frac{2Bh}{g-a}+\frac{h^2-bh}{g(g-a)}+d=0 \quad\text{und}\quad B^2+\frac{2Bh'}{g'-a}+\frac{h'^2-bh'}{g'(g'-a)}+d=0,$$

oder

$$(B-B')(B-B'')+d=0 \quad\text{und}\quad (B-B''')(B-B^{IV})+d=0;$$

also

$$B=\frac{B'''B^{IV}-B'B''}{B'''+B^{IV}-B'-B''} \quad\text{und}\quad \frac{(B'-B''')(B'-B^{IV})(B''-B''')(B''-B^{IV})}{(B'''+B^{IV}-B'-B'')^2}+d=0;$$

---

*) Unter den fünf Puncten lassen sich immer vier auswählen, von welchen jeder aufserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks liegt. Es seien $O$, $M$, $N$, $P$ diese vier Puncte.

daher ist für $d > 0$ der Kegelschnitt, der durch $O, M, N, P, Q$ geht, eine Ellipse, wenn $(B'-B''')(B'-B^{IV})(B''-B''')(B''-B^{IV}) < 0$, d. i. wenn $Q$ innerhalb der einen und außerhalb der andern Parabel liegt. Für $d < 0$ ist der Kegelschnitt, der durch $O, M, N, P, Q$ geht, eine Hyperbel, wenn $(B'-B''')(B'-B^{IV})(B''-B''')(B''-B^{IV}) > 0$, d. h. wenn $Q$ innerhalb beider oder außerhalb beider Parabeln liegt.

Man erhält also folgende Auflösung.

Man beschreibe durch $O, M, N, P$ die zwei möglichen Parabeln. Liegt nun der fünfte Punct in einer dieser Parabeln selbst, so ist diese Parabel der Kegelschnitt, welcher sich durch alle fünf Puncte beschreiben läßt. Liegt der Punct $Q$ innerhalb beider Parabeln, oder außerhalb beider, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel. Ist er dagegen innerhalb der einen und außerhalb der anderen befindlich, so liegt er mit den vier übrigen in einer Ellipse (**Möbius** Baryc. Calcul S. 382).

2. **Lehrsatz.** Ein Punct $P$, desen Coordinaten $g$, $h$ sind, liegt innerhalb oder außerhalb der Ellipse

$$1. \quad y^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex = 0,$$

je nachdem

$$h^2+2Bgh+Cg^2+2Dh+2Eg \lesseqgtr 0 \text{ ist.}$$

**Beweis.** Die Gleichung (1.) läßt sich immer, ohne den Anfangspunct der Coordinaten zu verändern, auf die Form

$$Ry^2+Sx^2+Tx = 0$$

bringen, wo nämlich, wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $m$, $m'$ dieselben Bedeutungen wie im ersten Lehrsatze haben, folgende Bedingungsgleichungen Statt finden:

$$m = \frac{BE-CD}{BD-E}, \qquad m' = -\frac{E}{D},$$

und

$$R = (m'^2+2Bm'+C)\sin(\alpha-\gamma)^2,$$
$$S = (m^2+2Bm+C)\sin(\alpha-\beta)^2,$$
$$T = 2(Dm+E)\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha \text{ ist.}$$

Sind die Coordinaten des Punctes $P$ in Bezug auf das neue Achsensystem $h'$, $g'$, so liegt der Punct innerhalb oder außerhalb der Ellipse, je nachdem $Rh'^2+Sg'+Tg' \lesseqgtr 0$ ist.

Drückt man nun die neuen Coordinaten durch die alten aus, und setzt für $R$, $S$, $T$ ihre Werthe, so erhält man, nach gehöriger Entwicklung, $P$ innerhalb oder außerhalb der Ellipse, je nachdem

$$h^2+2Bgh+Cg^2+2Dh+2Eg \lesseqgtr 0 \text{ ist.}$$

**Anwendung.** Ein Punct $P$ in der Ebene eines Dreiecks wird mit den Spitzen des Dreiecks $OMN$ durch Gerade verbunden. Die Art des Kegelschnitts zu bestimmen, welcher die Seiten des Dreiecks in den Durchschnitten mit jenen Geraden berührt.

Es seien die Coordinaten der Puncte $O = 0, 0$, $M = a, 0$, $N = 0, b$, $P = g, h$: so erhält man für den verlangten Kegelschnitt folgende Bedingungsgleichung:

$$d = C - B^2 = -(X)^2 \left[h^2 + \frac{b}{a}hg + \frac{b^2}{a^2}g^2 - bh - \frac{b^2}{a}g\right] *).$$

Es ist aber $y^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{b^2}{a^2}x^2 - by - \frac{b^2}{a}x = 0$ die Gleichung der Ellipse, welche durch die Puncte $O$, $M$, $N$ geht und den Schwerpunct des Dreiecks zum Mittelpunct hat.

Daher ist der verlangte Kegelschnitt

eine Parabel, oder $= 0$
eine Ellipse, oder $d > 0$
eine Hyperbel, oder $< 0$

, je nachdem $h^2 + \frac{b}{a}hg + \frac{b^2}{a^2}g^2 - bh - \frac{b^2}{a}g \begin{Bmatrix} = \\ < \\ > \end{Bmatrix} 0$ ist,

d. h. je nachdem der Punct $P$ auf der Peripherie innerhalb oder aufserhalb der Ellipse, welche durch $M$, $N$, $O$ geht und den Schwerpunct zum Mittelpunct hat, liegt. Es ergiebt sich also folgende Auflösung:

Man beschreibe um das Dreieck eine Ellipse, welche den Schwerpunct desselben zum Mittelpunct hat: dann ist der Kegelschnitt eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der Punct $P$ in der Peripherie dieser Ellipse, oder innerhalb, oder aufserhalb derselben liegt (**Möbius** S. 389).

---

*) Den Werth von $X$ entwickele ich hier nicht weiter, da er, ins Quadrat erhoben, das Zeichen von $d$ nicht verändert.

# 20.

# Bemerkung über Kreisfunctionen.

(Vom Herrn Prof *Raabe* in Zürich.)

Bekanntlich kommt der Analyst in Verlegenheit, wenn er auf Integrale wie die folgenden: $\int_0^\infty \sin x\,\partial x$, $\int_0^\infty \cos x\,\partial x$, etc. das gewöhnliche Verfahren beim Integriren anwenden will. Im 15. Bande dieses Journals habe ich zwar gezeigt, wie das viel allgemeinere Integral $\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\,\partial x$ in ein anderes verwandelt werden kann, dessen obere Grenze endlich wird, und dessen untere Grenze unverändert bleibt; indessen bleibt es interessant, die Richtigkeit folgender zwei Gleichungen nachzuweisen:

$$\text{Lim} \cos x = 0, \qquad \text{Lim} \sin x = 0,$$

wo das Grenzzeichen Lim auf das unendliche Wachsen des Winkels $x$ Bezug hat. Denn, sind vorerst diese zwei Gleichheiten nachgewiesen, so ist, wegen

$$\int \sin x\,\partial x = \text{const} - \cos x \quad \text{und} \quad \int \cos x\,\partial x = \text{const} + \sin x,$$

nach dem allgemein üblichen Integrationsverfahren:

$$\int_0^\infty \sin x\,\partial x = 1 - \text{Lim} \cos x = 1 \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \cos x\,\partial x = \text{Lim} \sin x = 0.$$

Um nun die Richtigkeit der obigen zwei Grenzgleichungen nachzuweisen, legen wir die bekannte Gleichung

$$e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1} \sin y$$

zum Grunde, wo $e$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen vorstellt. Aus dieser Gleichung erhält man folgende:

$$e^{my\sqrt{-1}} = \cos y^m [1 + \sqrt{-1} \tan y]^m.$$

Wird nun $y > 0$ und $< \frac{\pi}{4}$ oder $\text{tang}\, y > 0$ und $< 1$ vorausgesetzt, so ist

$$[1 + \sqrt{-1}\, \text{tang}\, y]^m = P + Q\sqrt{-1},$$

wo der Kürze wegen

$$P = 1 - \frac{m(m-1)}{1.2} \text{tang}\, y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \text{tang}\, y^4 - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3.4.5.6} \text{tang}\, y^6 + \dots,$$

$$Q = \frac{m}{1} \text{tang}\, y - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \text{tang}\, y^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} \text{tang}\, y^5 - \dots$$

gesetzt wurde. Diese Gleichung, die für alle Werthe von $m$ besteht, hat auch noch ihre Richtigkeit, wenn $m$ in den Zustand des Unendlich-Grofswerdens übergeht. In diesem Zustande der Gröfse $m$ hat man:

$$P = 1 - \frac{m^2}{1.2} \text{tang}\, y^2 + \frac{m^4}{1.2.3.4} \text{tang}\, y^4 - \frac{m^6}{1.2.3.4.5.6} \text{tang}\, y^6 + \text{etc.} = \cos(m\, \text{tang}\, y),$$

$$Q = \frac{m}{1} \text{tang}\, y - \frac{m^3}{1.2.3} \text{tang}\, y^3 + \frac{m^5}{1.2.3.4.5} \text{tang}\, y^5 - \text{etc.} \qquad = \sin(m\, \text{tang}\, y).$$

Daher geht die obige Gleichung in folgende über:

$$e^{my\sqrt{-1}} = \cos y^m\,[\cos(m\,\mathrm{tang}\,y) + \sqrt{-1}\,\sin(m\,\mathrm{tang}\,y)].$$

Da man ferner für jeden reellen, übrigens willkürlich grofsen Werth von $m\,\mathrm{tang}\,y$,

$$\cos(m\,\mathrm{tang}\,y) = \text{oder} < \pm 1 \quad \text{und} \quad \sin(m\,\mathrm{tang}\,y) = \text{oder} < \pm 1$$

voraussetzen darf, und nach der gemachten Annahme über $y$ und $m$ der Factor $\cos y^m$ ohne Ende der Null nahe kommt, so ist: $\mathrm{Lim}\,e^{my\sqrt{-1}} = 0$, wo $y$ eine endliche und $m$ eine unendlich wachsende Gröfse ist. Stellt man nun die unendlich grofs werdende Gröfse $my$ durch $x$ vor, so ist $\mathrm{Lim}\,e^{x\sqrt{-1}} = 0$. Andrerseits besteht für jeden reellen, übrigens noch so grofsen Werth von $x$, die identische Gleichung: $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$; daher ist auch $\mathrm{Lim}\cos x = 0$ und $\mathrm{Lim}\sin x = 0$; was zu beweisen war.

Da man ferner aus diesen Gleichungen die Richtigkeit der folgenden zwei Gleichungen: $\mathrm{Lim}\cos a x = 0$, $\mathrm{Lim}\sin a x = 0$ herleiten kann, wo $a$ jede reelle, nur nicht unendlich klein werdende Gröfse vorstellen darf: so ist man dadurch im Stande, die Werthe der verschiedenen Potenzen und Producte von $\sin x$ und $\cos x$ beim unendlichen Wachsen von $x$ anzugeben.

Es ist z. B. wegen $\sin x^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ und $\cos x^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, mit Zuziehung des so eben bewiesenen, $\mathrm{Lim}\sin x^2 = \frac{1}{2}$ und $\mathrm{Lim}\cos x^2 = \frac{1}{2}$. Addirt man diese zwei Gleichungen, so erhält man die bekannte Gleichung

$$\mathrm{Lim}\sin x^2 + \mathrm{Lim}\cos x^2 = 1.$$

Als fernere Anwendung setze man folgende Gleichungen:

$$y_n = \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots + \cos(\alpha+(n-1)\beta),$$
$$z_n = \sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots + \sin(\alpha+(n-1)\beta).$$

Stellt $n$ eine ganze, übrigens noch so grofse positive Zahl vor, so hat man

$$y_n = \frac{\sin\frac{1}{2}n\beta.\cos[\alpha+\frac{1}{2}(n-1)\beta]}{\sin\frac{1}{2}\beta}, \qquad z_n = \frac{\sin\frac{1}{2}n\beta.\sin[\alpha+\frac{1}{2}(n-1)\beta]}{\sin\frac{1}{2}\beta}.$$

Um die Werthe von $y_n$ und $z_n$ beim unendlichen Zunehmen von $n$ zu erfahren, löse man die Producte in den Zählern dieser Brüche in Summen auf. Dadurch erhält man zuerst:

$$y_n = -\frac{1}{2}.\frac{\sin(\alpha-\frac{1}{2}\beta)}{\sin\frac{1}{2}\beta} + \frac{1}{2}.\frac{\sin[\alpha+(n-\frac{1}{2})\beta]}{\sin\frac{1}{2}\beta}, \quad z_n = +\frac{1}{2}.\frac{\cos(\alpha-\frac{1}{2}\beta)}{\sin\frac{1}{2}\beta} - \frac{1}{2}.\frac{\cos[\alpha+(n-\frac{1}{2})\beta]}{\sin\frac{1}{2}\beta}.$$

Wird nun $n$ in den Zustand des Unendlich-Grofswerdens versetzt, so ist für jeden endlichen Werth von $\beta$:

$$\mathrm{Lim}\,y = -\frac{1}{2}.\frac{\sin(\alpha-\frac{1}{2}\beta)}{\sin\frac{1}{2}\beta} \quad \text{und} \quad \mathrm{Lim}\,z_n = \frac{1}{2}.\frac{\cos(\alpha-\frac{1}{2}\beta)}{\sin\frac{1}{2}\beta}.$$

Zum Schlusse noch die Bemerkung. Sämmtliche hier aufgestellten Resultate erhält man auch, wenn man das arithmetische Mittel aller Werthe der Function sucht, deren sie beim unendlichen Wachsen der Variabeln fähig ist.

---

# 21.

# De transformatione integralium Abelianorum primi ordinis commentatio.

(Auctore *Fried. Jul. Richelot*, prof. in Academia Albertina Regiom.)

## Introductio.

In commentatione prima de integralibus Abelianis, quam pag. 182 tomi XII. invenis, egi de reductione integralium huius modi:

$$\int\left(\frac{Fx\,dx}{\sqrt{(\varphi x)}}\right)$$

in quibus $Fx$ et $\Phi x$ quaelibet functiones rationales integrae sunt. Quae demonstravi, quoties $\Phi x$ factoribus nonnisi realibus gaudet, per substitutionem huius modi:

$$x = \frac{a+bz^2}{c+dz^2}$$

revocari ad integralia huius formae:

$$\int\frac{\psi(z^2)\,dz}{\sqrt{V}}$$

in quibus $\psi(z^2)$ functio rationalis ipsius $z^2$ est, atque $V$ ex factore $(1-z^2)$ et factoribus $(1-k^2z^2)$ conflatur, ita ut quantitas $k$ realis unitateque minor sit. Hanc integralium Abelianorum formam ut canonicam proposuimus, quamvis, si functio $\Phi x$ factores et reales et imaginarios, vel adeo omnes imaginarios habet, reductio generalis non successerat. Integralia vero Abeliana primi ordinis, quippe in quibus functio $\Phi x$ sextum ordinem non superat, ad formam canonicam reduci posse, in introductione commentationis allatae commemoravi, nec non adieci, me inde ex his disquisitionibus ad generalem formae canonicae transformationem memorabilem pervenisse.

Id quod uberius adhuc hîc narrare placet, aeque ac excusare, cur reductionem illam generaliorem illic promissam nondum promulgaverim. Ad reductionem enim integralium huius modi:

$$\int\frac{Fx\,dx}{\sqrt{[(A+Bx+Cx^2)(A_1+B_1x+C_1x^2)(A_2+B_2x+C_2x^2)]}}$$

aggressus, in quibus tres factores trinomii et realibus et imaginariis vel adeo omnibus imaginariis factoribus gaudent, in ingentes incideram diffi-

cultates, discerptionem integralis quandam indagans ei similem quam Cl. *Legendre* in tertio tomo operis illustrissimi „Traité des fonctions elliptiques" adhibuerat. Ibi enim („troisième supplement §. XII.") geometra sagacissimus ope substitutionis singularis integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{[x(1-x^2)(1-k^2x^2)]}}$$

per aggregatum duorum integralium ellipticorum primae speciei expressit, eadem amplitudine modulisque talibus gaudentium, quorum alter alterius complementum sit. Idem theorema memorabile Cl. *Jacobi* ad integrale:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{[(x+x^2)(1-k^2x^2)]}},$$

et ad integralia generalioris formae:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{[x(1-x)(1-k\lambda x)(1+kx)(1+\lambda x)]}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{[x(1-x)(1-k\lambda x)(1+kx)(1+\lambda x)]}},$$

extenderat, quae (pagina 416 tomi VIII. huius diarii) similiter in aggregatum similium duorum integralium ellipticorum eiusdem argumenti commutavit.

His exemplis incensus, cum mox animadvertissem, integrale generale propositum, quod in hanc mihi formam reduxeram;

$$\int \frac{Fz\;dz}{\sqrt{[(a+bz+cz^2)(z^2+d)(z^2+e)]}},$$

si eadem ratione transformare vellem, nonnisi in duorum Abelianorum eiusdem ordinis aggregatum abire posse, transformationem talem horum integralium:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^5)}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}},$$

prosperrimo successu disquisivi.

Per substitutionem enim linearem:

$$x = \frac{1+t}{1-t},$$

integrali primo in hanc formam supra allatam reducto:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1\pm x^5)}} = \sqrt{(\tfrac{2}{5})}\cdot\int_{-1}^{t} \frac{\sqrt{(1-t)}\,dt}{\sqrt{\left[\left(t^2+\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{10}\right)\left(t^2+\operatorname{tang}^2\frac{3\pi}{10}\right)\right]}},$$

adhibui transformationem irrationalem:

$$t = \mp\sqrt{(1-z^2)},$$

sive:

$$\sqrt{(1-t)} = \sqrt{\left(\frac{1+z}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{1-z}{2}\right)},$$

ubi superiora signa pro limitibus:

$$\left\{\begin{array}{l} x=0 \ldots\ldots\ldots x=1 \\ t=-1 \ldots\ldots t=0 \\ z=0 \ldots\ldots\ldots z=1 \end{array}\right\}$$

inferiora pro limitibus:

$$\left\{\begin{array}{l} x=1 \ldots\ldots\ldots x=\infty \\ t=0 \ldots\ldots\ldots t=1 \\ z=1 \ldots\ldots\ldots z=0 \end{array}\right\}$$

valent. — Qua apte introducta, accepi has aequationes integrales:

$$4\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1+x^5)}} = \int_0^z \frac{z\,dz}{\sqrt{\left[(1+z)\left(1-\cos^2\frac{\pi}{10}z^2\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{10}z^2\right)\right]}}$$
$$+\int_0^z \frac{z\,dz}{\sqrt{\left[(1-z)\left(1-\cos^2\frac{\pi}{10}z^2\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{10}z^2\right)\right]}},$$
$$4\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(1+x^5)}} = \int_1^z \frac{z\,dz}{\sqrt{\left[(1+z)\left(1-\cos^2\frac{\pi}{10}z^2\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{10}z^2\right)\right]}}$$
$$-\int_1^z \frac{z\,dz}{\sqrt{\left[(1-z)\left(1-\cos^2\frac{\pi}{10}z^2\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{10}z^2\right)\right]}},$$

illam pro prioribus, hanc pro posterioribus argumentorum limitibus valentem.

Quibus aequationibus inter se additis, haec sequitur integralis definiti expressio memorabilis:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(1+x^5)}} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{z\,dz}{\sqrt{\left[(1-z)\left(1-\cos^2\frac{\pi}{10}z^2\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{10}z^2\right)\right]}},$$

sive:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(1+x^5)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\left[\left(1-\cos^2\frac{\pi}{10}\sin^4\varphi\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{10}\sin^4\varphi\right)\right]}}.$$

In primis terminis utriusque aequationis posito: $z=-z$, et brevitatis causa $\sqrt{\left[(1-z)\left(1-\cos^2\frac{\pi}{10}z^2\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{10}z^2\right)\right]}=\Delta z$, habemus:

$$4\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1+x^5)}} = \int_0^z \frac{z\,dz}{\Delta z} + \int_0^{z_1} \frac{z\,dz}{\Delta z},$$
$$4\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(1+x^5)}} = \int_1^z \frac{z\,dz}{\Delta z} - \int_1^{z_1} \frac{z\,dz}{\Delta z},$$

ita ut integralia nova eadem forma atque diversis argumentis gaudeant.

Simili ratione cum et alterum integrale, et nonnulla alia specialis formae reduxissem, coniecturam meam hanc esse veram reductionis horum integralium naturam, illustrissimo *Jacobi*, cuius consilio sapientissimo doctrinaque singulari adhuc fruor, proposui. Hic vir venerabundus de integralium generalioris illius formae reductione iam diu frustra disquirenti mihi substitutionem generaliorem irrationalem in finem propositum communicavit hanc:

$$2y = \sqrt{(a+bz+cz^2)} \mp \sqrt{(a-bz+cz^2)},$$

qua et summa et differentia integralium:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{[(a+bx+cx^2)(x^2+d)(x^2+e)]}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{[(a-bx+cx^2)(x^2+d)(x^2+e)]}},$$

per unum integrale Abelianum exprimeretur. — Hac ex substitutione clarissimi *Jacobi* egressus, mox totam reductionem omnium integralium Abelianorum primi ordinis ad talia integralia eiusdem generis inveni, quae realibus ipsius $\varphi x$ factoribus gaudent. Et adeo, cum integralia duo nova diversa eodem argumento gaudentia ad eadem integralia, sed diversorum argumentorum revenirent, Cl. *Jacobi* hanc integralis divisionem egregie conspirare animadvertit cum ea, quam tunc temporis considerat, theoria, eiusmodi integrale etiam in Analysi non unicum, sed binorum summam considerandam esse; simul, vir cl. cum similes substitutiones etiam eodem successu, eo casu adhibuissem, si omnes factores functionis $\varphi x$ reales sunt, me incitavit, ut eodem modo ipsam quoque formam canonicam tractarem; fieri enim posse, ut inde nascatur transformatio formae canonicae meae, iam diu usque ad illud tempus a me quaesita, quae indefinite repetita ad alios aliosque modulos fortasse continuo decrescentes ducat. Ego quum intelligerem, quanti momenti sit sagacissima illa viri cl. divinatio, omni cura, ceteris omnibus disquisitionibus in praesens missum factis, in hanc difficilem materiam inquirere constitui. Integralium novorum argumenta ea forma, quam tunc considerabam non intra limites reales continebantur, et adeo ad formam canonicam reductorum in intervallo 0—1 iacerent necesse fuit. Illud ope theorematis Abeliani fundamentalis commutavi, per quod ex transformationis formulis, quae ad imaginaria bina argumenta ducebant, tales derivavi, quae ad reales limites reveniebant; hoc vero commentatione mea antea memorata valde mihi sublevatum est. Per summam calculorum complicationem, per novitatem rei saepe omnibus analogiis destitutae, interdum per ipsam copiam methodorum e quibus scita electio facienda est,

facile a tanto labore abhorres. Qui tamen labor a me superatus, si quis alius, prosperos successus habuit. Inveni enim transformationem integralium Abelianorum primi ordinis, per quam repetitam moduli simul omnes eadem fere rapiditate decrescunt, qua in transformatione integralium ellipticorum Landeniana, ita ut vel per paucissimas transformationes integralia illa ad elliptica revocentur, indeque algorithmus calculi prorsus in eundem redeat, qui in calculandis integralibus ellipticis adhibetur, vel per paucas transformationes adhuc adiectas directe computentur.

In hac igitur commentatione transformationum harum fundamenta detexi, theoriam quam amplissime exposui, demonstrationem breviorem atque directam adieci, facilem Algorithmum haec integralia definita et indefinita computandi attuli, quae per methodos usitatas nonnisi aut cum summa aut difficultate insuperabili determinari possunt. Quomodo integralia indefinita per theorema Abelianum ad minimum numerum reducantur et obiter indicatum invenis et alii commentationi reservavi. Ceterum omnes formulas, ad transformationem meam spectantes, ita expolivisse mihi videor, ut concinnitas calculi, quantum credo, nihil desiderandum relinquat. Ad egregiam vero calculorum et theoriae ipsius per se ipsam confirmationem ostendendam, simulque calculum expeditum pro iis casibus offerendum, quibus moduli omnes proxime ad unitatem accedunt, eadem cura transformationem quoque inversam, quae ad modulos continuo maiores ducit, et calculi rationem idoneam, quae in illa methodo adhiberi debet, explicavi. Postremo, ut exempla, computationem duorum integralium definitorum secundum utramque methodum institutam, adieci, et perfectum consensum valorum, via opposita inventorum, nactus sum; quorum exemplorum alterum una cum brevi algorithmi expositione in commentariolo, in Novis Astronomicis a Cl. *Schumacher* editis geometris communicavi.

## Caput primum.
## De transformationibus integralium Abelianorum primi ordinis ipsis.

### I.

De nova forma integralis Abeliani et de substitutionibus linearibus, quae a forma canonica ad illam ducunt.

Theorema fundamentale in quo ut principio tota nostra disquisitio nititur, hoc est:

Integrale Abelianum primi ordinis:

$$\int \frac{Fz\,dz}{\sqrt{[z(1-z)(1-k^2z)(1-\lambda^2z)(1-\mu^2z)]}}$$

pro quibuslibet limitibus, qui inter intervalla quae per factores functionis sub signo radicali eruuntur, continentur, per aggregatum duorum eiusdem formae exprimi potest, quorum limites ut radices aequationis quadraticae dantur, cuiusque coefficientes functiones rationales integrae argumenti dati $z$ sunt, nec secundum ordinem superant. Cuius theorematis demonstratio a numero quantitatum arbitrariarum repetitur, quae in coefficientibus aequationis quadraticae fundamentalis inveniuntur, eamque in peculiari integralis Abeliani forma digeramus, quae ad eam magis quadrat, nec non facillime ad nostram formam propositam reduci potest.

Forma, de qua agitur, haec est:

$$1.\quad \int \frac{[F_1(v^2)+vF_2(v^2)]\,dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}},$$

ubi $F_1(v^2)$ et $F_2(v^2)$ functiones rationales pares ipsius $v$, atque $a$, $r$, $s$ quantitates constantes sunt. Iam igitur de substitutionibus linearibus disserere placet, per quas a forma canonica ad hanc novam reveniamus.

Introducamus substitutionem linearem:

$$z = \frac{m+nv}{p+qv},$$

ubi $m$, $n$, $p$, $q$ quantitates adhuc determinandae sunt. Iam patet fore:

$$\frac{dz}{\sqrt{[z(1-z)(1-k^2z)(1-\lambda^2z)(1-\mu^2z)]}} = \frac{(pn-qm)(p+qv)\,dv}{\sqrt{(\Delta v)}},$$

ubi $\Delta v$ productum horum sex factorum erit:

$$2. \quad \begin{cases} m + nv, \\ p + qv, \\ (p-m) + (q-n)v, \\ (p-k^2m) + (q-k^2n)v, \\ (p-\lambda^2m) + (q-\lambda^2n)v, \\ (p-\mu^2m) + (q-\mu^2n)v. \end{cases}$$

Iam vero expressionem

$$(pn-qm)(p+qv)F\left(\frac{m+nv}{p+qv}\right),$$

hac forma exhibere licet:

$$\frac{f_1(v^2)+vf_2(v^2)}{f_3(v^2)+vf_4(v^2)},$$

ubi per $f(v^2)$ functiones integrae pares ipsius $v$ significantur. Numeratore igitur denominatoreque per:

$$f_3(v^2) - vf_4(v^2)$$

multiplicatis, ad formam

$$F_1(v^2) + vF_2(v^2)$$

devehimur.

Sex vero factorum, ut ad formam radicalis $\Delta v$ praescriptam perveniamus, bini ad formas:

$$(1+v), \quad (1-v),$$

applicandi sunt, unde 30 diversos casus nanciscimur. Ceterorum quaternorum, cum bini forma:

$$(1-av), \quad (1+av),$$

induant, necesse sit, quae conditio ad aequationem quadraticam inter coefficientes $m$, $n$, $p$, $q$, ducit, inde duceni casus oriuntur. Itaque 360 diversas substitutiones lineares quaesitae naturae adipiscimur. Iam vero in harum numero etiam 120 imaginariae erunt, id quod ex deductione substitutionis ipsa derivare licet.

Designemus hunc ad finem per:

$$(p-\alpha m)+(q-\alpha n)v, \qquad (p-\gamma m)+(q-\gamma n)v,$$
$$(p-\beta m)+(q-\beta n)v, \qquad (p-\delta m)+(q-\delta n)v,$$

tales quatuor illarum sex functionum (2.), ut priores duae respective ad formas:

$$(1+v), \quad (1-v),$$

posteriores ad formas:

$$(1-av), \quad (1+av)$$

applicentur. Quantitates igitur:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,$$

e numero quantitatum

$$-\infty,\ 0,\ \mu^2,\ \lambda^2,\ k^2,\ 1,$$

arbitrio adhuc eligendae erunt.

Habemus vero has inde aequationes:

$$3.\quad (p-\alpha m)=(q-\alpha n),\qquad (p-\beta m)=-(q-\beta n),$$

$$4.\quad (p-\gamma m)=\pm(q-\gamma n)a,\quad (p-\delta m)=\mp(q-\delta n)a.$$

Ex aeq. (4.) $a$ eliminato, sequitur haec:

$$(p-\gamma m)(q-\delta n)=-(p-\delta m)(q-\gamma n),$$

sive:

$$5.\quad 2(pq+\gamma\delta mn)=(mq+pn)(\gamma+\delta);$$

qua aequatione cum aequationibus (3.) coniuncta, valores quantitatum:

$$m,\ n,\ p,\ q,$$

quarum una quaelibet $=1$ poni potest, determinantur.

Quam determinationem ita faciamus, ut ponamus:

$$6.\quad p-\alpha m=M,\quad q-\alpha n=N,\quad p-\beta m=P,\quad q-\beta n=Q,$$

unde sequitur:

$$7.\quad p=\frac{\beta M-\alpha P}{\beta-\alpha},\quad q=\frac{\beta N-\alpha Q}{\beta-\alpha},\quad m=\frac{M-P}{\beta-\alpha},\quad n=\frac{N-Q}{\beta-\alpha},$$

quibus valoribus in (5.) substitutis, cum $\beta-\alpha$ evanescere nequeat, inde prodit aequatio:

$$2(\beta M-\alpha P)(\beta N-\alpha Q)+2\gamma\delta(M-P)(N-Q)$$
$$=[(M-P)(\beta N-\alpha Q)+(N-Q)(\beta M-\alpha P)](\gamma+\delta).$$

Iam vero habemus ex aeq. (3.) et (6.):

$$M=N,\qquad P=-Q,$$

quibus substitutis, erit aequatio finalis:

$$M^2(\beta-\gamma)(\beta-\delta)=P^2(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta).$$

Inde sequitur fore:

$$8.\quad \frac{M}{P}=\pm\sqrt{\left(\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}\right)}=\frac{N}{P}.$$

Habemus igitur ex his valoribus, aequationibus (7.) adiuti:

$$9.\quad \begin{cases} m=\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]}\mp\sqrt{[(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]},\\ n=\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]}\pm\sqrt{[(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]},\\ p=\beta\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]}\mp\alpha\sqrt{[(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]},\\ q=\beta\sqrt{[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)]}\pm\alpha\sqrt{[(\beta-\gamma)(\beta-\delta)]}.\end{cases}$$

Inde videmus, substitutionem fieri imaginariam, nisi quantitas:

$$\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)},$$

positivo valore gaudeat. Id quod fieri nequit, nisi quantitates $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ex sex quantitatibus memoratis ita eligantur, ut nec $\gamma$ nec $\delta$ sola intra $\alpha$ et $\beta$, quod attinet ad magnitudinem, iaceat.

Jam vero: $\alpha = -\infty$ posito, inde quinque suppositiones ipsius $\beta$ in ordinem sequuntur, quarum prima 6, quinta 6, secunda 3 et quarta 3, tertia vero 2 diversos casus suppeditat; itaque hac in suppositione prima viginti casus habemus, unde ob signi radicalis duplicitatem, quadraginta substitutiones reales diversae emanant. Eodem modo:

$$\alpha = 0, \quad = \mu^2, \quad = \lambda^2, \quad = k^2, \quad = 1,$$

posito inde 240 substitutiones reales derivamus. Easdem etiam ex primis quadraginta ope sex transformationum fundamentalium classis $A$ vel classis $B$, quas in commentatione prima de integralibus Abelianis art. III. vocavimus, nancisci licet. Nimirum hae fuerunt formulae:

$$10. \left\{ \begin{array}{llll} \text{class. } A. & & \text{class. } B. & \\ \text{I.} & y = z, & \text{I.} & y = \dfrac{1-z}{1-k^2 z}, \\ \text{II.} & y = -\dfrac{1}{k_1^2} \cdot \dfrac{1-z}{z}, & \text{II.} & y = \dfrac{1-k^2}{1-\lambda^2} \cdot \dfrac{1-\lambda^2 z}{1-k^2 z}, \\ \text{III.} & y = \dfrac{1-\lambda^2}{k^2-\lambda^2} \cdot \dfrac{1-k^2 z}{1-z}, & \text{III.} & y = \dfrac{k^2-\lambda^2}{k^2-\mu^2} \cdot \dfrac{1-\mu^2 z}{1-\lambda^2 z}, \\ \text{IV.} & y = \dfrac{k^2-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2} \cdot \dfrac{1-\lambda^2 z}{1-k^2 z}, & \text{IV.} & y = \dfrac{\lambda^2}{\lambda^2-\mu^2}(1-\mu^2 z), \\ \text{V.} & y = \dfrac{\lambda^2}{\mu^2} \cdot \dfrac{1-\mu^2 z}{1-\lambda^2 z}, & \text{V.} & y = \dfrac{1}{\mu^2 z}, \\ \text{VI.} & y = \dfrac{1}{1-\mu^2 z}, & \text{VI.} & y = \dfrac{z}{1-z}, \end{array} \right.$$

per quas integrale:

$$\int \frac{(A+Bz)\,dz}{\sqrt{[z(1-z)(1-k^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)]}},$$

in eandem ipsius formam:

$$\int \frac{(M+Ny)\,dy}{\sqrt{[y(1-y)(1-c^2 y)(1-l^2 y)(1-m^2 y)]}},$$

redit. Loco citato has substitutiones amplius exposuimus atque in quaque modulos $c$, $l$, $m$, ex modulis $k$, $\lambda$, $\mu$, determinavimus. Facile vero ex argumentorum consideratione patet, si in quaque formula classis $A$. vel $B$. loco $z$ quamlibet formularum quadraginta substituamus, atque $k$, $\lambda$, $\mu$, per $c$, $l$, $m$, semper exprimamus, inde novas illas substitutiones quaesitas oriri.

Inde ex formulis generalibus exempli gratia omnes substitutiones formae:

$$z = c\left(\frac{1 \pm v}{1 \mp v}\right),$$

facillime derivamus. Posito enim primo loco:

$$\alpha = -\infty, \qquad \beta = 0,$$

habemus in formulis (9.)

$$m = \alpha, \qquad n = \alpha, \qquad p = \mp \alpha \sqrt{(\gamma\delta)}, \qquad q = \pm \alpha \sqrt{(\gamma\delta)},$$

ergo:

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{(\gamma\delta)}} \cdot \frac{1+v}{1-v}.$$

Secundo vero posito:

$$\alpha = 0, \qquad \beta = -\infty,$$

erit ex formulis (9.)

$$m = \mp \beta, \qquad n = \pm \beta, \qquad p = \beta \sqrt{(\gamma\delta)}, \qquad q = \beta \sqrt{(\gamma\delta)},$$

ergo:

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{(\gamma\delta)}} \cdot \frac{1-v}{1+v}.$$

Iam vero quantitates $\gamma$ et $\delta$ his sex valoribus cohaerentibus gaudere possunt:

$$\begin{array}{llll} \gamma = \mu^2, & \delta = \lambda^2, & \gamma = \lambda^2, & \delta = k^2, \\ \gamma = \mu^2, & \delta = k^2, & \gamma = \lambda^2, & \delta = 1, \\ \gamma = \mu^2, & \delta = 1, & \gamma = k^2, & \delta = 1, \end{array}$$

unde ad has viginti quatuor substitutiones formae praescriptae devehimur:

$$11. \left\{ \begin{array}{lll} \text{I.} & z = \pm \frac{1}{\lambda\mu} \cdot \frac{1+v}{1-v}, & z = \pm \frac{1}{\lambda\mu} \cdot \frac{1-v}{1+v}, \\ \text{II.} & z = \pm \frac{1}{k\mu} \cdot \frac{1+v}{1-v}, & z = \pm \frac{1}{k\mu} \cdot \frac{1-v}{1+v}, \\ \text{III.} & z = \pm \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1+v}{1-v}, & z = \pm \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1-v}{1+v}, \\ \text{IV.} & z = \pm \frac{1}{k\lambda} \cdot \frac{1+v}{1-v}, & z = \pm \frac{1}{k\lambda} \cdot \frac{1-v}{1+v}, \\ \text{V.} & z = \pm \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1+v}{1-v}, & z = \pm \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1-v}{1+v}, \\ \text{VI.} & z = \pm \frac{1}{k} \cdot \frac{1+v}{1-v}, & z = \pm \frac{1}{k} \cdot \frac{1-v}{1+v}. \end{array} \right.$$

Iam igitur ex antecedentibus patet, si has formulas in formulis fundamentalibus classis *A.* vel classis *B.* introducamus, cunctas 144 diversas substitutiones inde emanantes prodituras esse. Re vera hîc classem *B.* non alias substitutiones procreare inde clarum fit, quod per formulam quintam:

$$y = \frac{1}{\mu^2 z},$$

ubi moduli $c$, $l$, $m$, tales sunt, ut habeamus:

$$k = \frac{m}{l}, \qquad \lambda = \frac{m}{c}, \qquad \mu = m,$$

revenimus

ex formulis I. ad formulas V.,
\- - - II. - - - VI.,
\- - - III. - - - III.,
\- - - IV. - - - IV.

Sed etiam via inversa ad easdem substitutiones lineares proficisci licet. Ponamus enim hunc ad finem, quantitates $a$, $r$, $s$ reales esse, et tales ut sit:

$$a > 0, \qquad r < s.$$

Iam igitur facile perspicitur, quantitates:

$$1, \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{s}, \quad -\frac{1}{a}, \quad -1,$$

triginta diversis modis secundum ipsarum magnitudinem permutari posse. Nam quantitates: $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{s}$, 15 diversis modis in sex locis, ita ut: $\frac{1}{r} > \frac{1}{s}$ maneat, poni possunt; atque permutationum vicenarum quaternarum quantitatum:

$$1, \quad \frac{1}{a}, \quad -\frac{1}{a}, \quad -1$$

nonnisi binae hae adhiberi possunt, in quibus est:

$$1 > \frac{1}{a} > -\frac{1}{a} > -1, \qquad \frac{1}{a} > 1 > -1 > -\frac{1}{a},$$

unde triginta series illas diversas omnium sex quantitatum adipiscimur. Iam vero in commentatione iam allata art. II. demonstravimus, integrale:

$$12. \quad \int \frac{Fx\, dx}{\sqrt{[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)(x-\alpha_6)]}},$$

per duodecim substitutiones in formam canonicam transformari posse, quarum sex priores classi $A$. adscriptae, si per:

$$\alpha_{\mu+1}, \quad \alpha_\mu, \quad \alpha_{\mu-1}$$

tres se excipientes quantitatum $\alpha$ in circulo scriptarum, quae hanc legem sequuntur:

$$13. \qquad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5 > \alpha_6,$$

designemus, his formulis comprehenduntur:

$$14.\quad \begin{cases} z = \left(\frac{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1}}{\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{x-\alpha_{\mu}}{x-\alpha_{\mu-1}}\right), & k^2 = \left(\frac{\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+1}}{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+2}}{\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+2}}\right), \\ \lambda^2 = \left(\frac{\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+1}}{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+3}}{\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+3}}\right), & \mu^2 = \left(\frac{\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+1}}{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+4}}{\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+4}}\right), \end{cases}$$

et sex posteriores classi *B.* adscriptae, his formulis:

$$15.\quad \begin{cases} z = \left(\frac{\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+2}}{\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{x-\alpha_{\mu+1}}{x-\alpha_{\mu+2}}\right), & k^2 = \left(\frac{\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu}}{\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu}}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu-1}}{\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu-1}}\right), \\ \lambda^2 = \left(\frac{\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu}}{\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu}}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu-2}}{\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu-2}}\right), & \mu^2 = \left(\frac{\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu}}{\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu}}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu-3}}{\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu-3}}\right). \end{cases}$$

Loco igitur seriei quantitatum $\alpha$ (13.) qualibet illarum triginta permutationum sumta, inde duodecim, cunctas igitur 360 formulas tales derivare licet, per quas ad formam canonicam ex forma praescripta perveniamus. Inverse igitur, semper quantitatibus $a$, $r$, $s$, per $k$, $\lambda$, $\mu$, expressis, id quod si permutationi propositae satisfiat, nonnisi singula ratione fieri potest, inde 360 diversas nanciscimur substitutiones naturae desideratae. Harum substitutionum 120, in quarum permutationibus dispositio quantitatum:

$$1,\quad \frac{1}{a},\quad -\frac{1}{a},\quad -1,$$

eadem est, ad formulas non recentes, sed quae iam in ceteris inveniebantur, ducunt; attamen ex diversitate permutationum cohaerentium ad relationes quantitatis modulorum $k$, $\lambda$, $\mu$, tales, ut:

$$k^2 \gtrless \lambda,\quad k^2 \gtrless \mu,\quad \lambda^2 \gtrless \mu,\quad k\lambda > \mu \quad \text{etc.}$$

concludendum erit.

Permutationes illae enim triginta erunt:

$$16.\quad \begin{cases} 1)\ 1 > \frac{1}{a} > \frac{1}{r} > \frac{1}{s} > -\frac{1}{a} > -1, & 8)\ 1 > \frac{1}{r} > \frac{1}{a} > \frac{1}{s} > -\frac{1}{a} > -1, \\ 2)\ 1 > \frac{1}{a} > \frac{1}{r} > -\frac{1}{a} > \frac{1}{s} > -1, & 9)\ 1 > \frac{1}{r} > \frac{1}{a} > -\frac{1}{a} > \frac{1}{s} > -1, \\ 3)\ 1 > \frac{1}{a} > -\frac{1}{a} > \frac{1}{r} > \frac{1}{s} > -1, & 10)\ 1 > \frac{1}{r} > \frac{1}{s} > \frac{1}{a} > -\frac{1}{a} > -1, \\ 4)\ 1 > \frac{1}{a} > \frac{1}{r} > -\frac{1}{a} > -1 > \frac{1}{s}, & 11)\ \frac{1}{r} > 1 > \frac{1}{a} > \frac{1}{s} > -\frac{1}{a} > -1, \\ 5)\ 1 > \frac{1}{a} > -\frac{1}{a} > \frac{1}{r} > -1 > \frac{1}{s}, & 12)\ \frac{1}{r} > 1 > \frac{1}{a} > -\frac{1}{a} > \frac{1}{s} > -1, \\ 6)\ 1 > \frac{1}{a} > -\frac{1}{a} > -1 > \frac{1}{r} > \frac{1}{s}, & 13)\ \frac{1}{r} > 1 > \frac{1}{a} > -\frac{1}{a} > -1 > \frac{1}{s}, \\ 7)\ 1 > \frac{1}{r} > \frac{1}{a} > -\frac{1}{a} > -1 > \frac{1}{s}, & 14)\ \frac{1}{r} > \frac{1}{s} > 1 > \frac{1}{a} > -\frac{1}{a} > -1, \end{cases}$$

$$
16.\quad \begin{cases}
15)\ \frac{1}{r} > 1 > \frac{1}{s} > \frac{1}{a} > -\frac{1}{a} > -1, & 23)\ \frac{1}{a} > \frac{1}{r} > 1 > \frac{1}{s} > -1 > -\frac{1}{a},\\
16)\ \frac{1}{a} > 1 > \frac{1}{r} > \frac{1}{s} > -1 > -\frac{1}{a}, & 24)\ \frac{1}{a} > \frac{1}{r} > 1 > -1 > \frac{1}{s} > -\frac{1}{a},\\
17)\ \frac{1}{a} > 1 > \frac{1}{r} > -1 > \frac{1}{s} > -\frac{1}{a}, & 25)\ \frac{1}{a} > \frac{1}{r} > \frac{1}{s} > 1 > -1 > -\frac{1}{a},\\
18)\ \frac{1}{a} > 1 > -1 > \frac{1}{r} > \frac{1}{s} > -\frac{1}{a}, & 26)\ \frac{1}{r} > \frac{1}{a} > 1 > \frac{1}{s} > -1 > -\frac{1}{a},\\
19)\ \frac{1}{a} > 1 > \frac{1}{r} > -1 > -\frac{1}{a} > \frac{1}{s}, & 27)\ \frac{1}{r} > \frac{1}{a} > 1 > -1 > \frac{1}{s} > -\frac{1}{a},\\
20)\ \frac{1}{a} > 1 > -1 > \frac{1}{r} > -\frac{1}{a} > \frac{1}{s}, & 28)\ \frac{1}{r} > \frac{1}{a} > 1 > -1 > -\frac{1}{a} > \frac{1}{s},\\
21)\ \frac{1}{a} > 1 > -1 > -\frac{1}{a} > \frac{1}{r} > \frac{1}{s}, & 29)\ \frac{1}{r} > \frac{1}{s} > \frac{1}{a} > 1 > -1 > -\frac{1}{a},\\
22)\ \frac{1}{a} > \frac{1}{r} > 1 > -1 > -\frac{1}{a} > \frac{1}{s}, & 30)\ \frac{1}{r} > \frac{1}{a} > \frac{1}{s} > 1 > -1 > -\frac{1}{a},
\end{cases}
$$

Quibus cum formulis (14.) et (15.) collatis, videmus, permutationes:

4 et 11, 5 et 12, 7 et 15, 19 et 26, 20 et 27, 22 et 30, ad binas easdem, et adeo permutationes 6 et 13 et 14 aeque ac 21, 28, 29 ad ternas easdem formulas ducere.

Inde rursus 24 illas formulas formae:

$$z = \frac{1}{c}\cdot\frac{1\pm v}{1\mp v}$$

derivare licet. Si enim in permutationibus, ubi $+1$ et $-1$ se excipiunt, in formulis (14.):

$$\alpha_{\mu-1} = 1, \qquad \alpha_\mu = -1,$$

et in formulis (15):

$$\alpha_{\mu+1} = 1, \qquad \alpha_{\mu+2} = -1,$$

ponamus, nanciscimur ex permutationibus:

$$
17.\quad \begin{cases}
1)\ z = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1+v}{1-v}, & z = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1-v}{1+v},\\
2)\ z = \frac{1}{k\mu}\cdot\frac{1+v}{1-v}, & z = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1-v}{1+v},\\
3)\ z = \frac{1}{\lambda\mu}\cdot\frac{1+v}{1-v}, & z = \frac{1}{k}\cdot\frac{1-v}{1+v},\\
8)\ z = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1+v}{1-v}, & z = \frac{1}{k\mu}\cdot\frac{1-v}{1+v},\\
9)\ z = \frac{1}{k\lambda}\cdot\frac{1+v}{1-v}, & z = \frac{1}{k\lambda}\cdot\frac{1-v}{1+v},
\end{cases}
$$

$$17.\quad \begin{cases} 10) & z=\frac{1}{k}\cdot\frac{1+v}{1-v}, & z=\frac{1}{\lambda\mu}\cdot\frac{1-v}{1+v}, \\ 20) \text{ vel } 27) & z=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{v-1}{v+1}, & z=\frac{1}{k\mu}\cdot\frac{v+1}{v-1}, \\ 21) \text{ vel } 28) \text{ vel } 29) & z=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{v-1}{v+1}, & z=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{v+1}{v-1}, \\ 22) \text{ vel } 30) & z=\frac{1}{k\mu}\cdot\frac{v-1}{v+1}, & z=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{v+1}{v-1}, \\ 24) & z=\frac{1}{k\lambda}\cdot\frac{v-1}{v+1}, & z=\frac{1}{k\lambda}\cdot\frac{v+1}{v-1}, \\ 25) & z=\frac{1}{\lambda\mu}\cdot\frac{v-1}{v+1}, & z=\frac{1}{k}\cdot\frac{v+1}{v-1}. \end{cases}$$

Re vera substitutio

$$z = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{v\pm 1}{v\mp 1},$$

prout: $\lambda > k^2$ vel $\lambda < k^2$ duas, substitutio:

$$z = \frac{1}{k\mu}\cdot\frac{v\pm 1}{v\mp 1},$$

prout: $\lambda^2 > k\mu$ vel $\lambda^2 < k\mu$ rursus duas, et substitutio:

$$z = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{v\pm 1}{v\mp 1},$$

prout $k^2>\lambda$ et $k^2>\mu$, vel $k^2<\lambda$ et $k^2>\mu$, vel $k^2<\lambda$ et $k^2<\mu$ fuerit tres diversas series sex quantitatum illarum praebet.

## II.

De transformatione irrationali formae:

$$v^2 = \frac{m+nt+pt^2}{m_1+n_1t+p_1t^2},$$

per quam integrale in duorum novorum aggregatum transformatur.

Introducamus, ut demonstrationem una cum transformatione ipsa digeramus, in formulas differentiales:

$$1.\quad \frac{F_1(v^2)\,dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}},$$

$$2.\quad \frac{v.F_2(v^2)\,dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}},$$

hanc substitutionem:

$$3.\quad v^2 = \frac{U}{V},$$

ubi functiones rationales integrae: $U$ et $V$ argumenti $t$ secundum ordinem haud superantes, communi factore carent. Iam dico, sex coefficientes in functionibus $U$ et $V$ provenientes semper ita determinari posse, ut

utrumque integrale (1.) et (2.) in aggregatum duorum integralium Abelianorum transmutentur. Habemus enim e formula (3.), si signum: $\varepsilon = \pm 1$ introducitur,

$$4. \quad v = \varepsilon \sqrt{\frac{U}{V}},$$

unde sequuntur hae formulae:

$$5. \quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\varepsilon}{2} \cdot \dfrac{V\,dU - U\,dV}{V\sqrt{(UV)}}, \\ (1-v^2)(1-a^2v^2) = \dfrac{(V-U)(V-a^2U)}{V^2}, \\ (1-rv)(1-sv) = \dfrac{V+rsU-\varepsilon(r+s)\sqrt{(UV)}}{V}. \end{cases}$$

Quibus formulis apte compositis, functionibusque:

$$F_1\left(\frac{U}{V}\right), \quad F_2\left(\frac{U}{V}\right),$$

ut functionibus ipsius $t$, per:

$$\Pi_1 t, \qquad \Pi_2 t,$$

denotatis, hae aequationes prodeunt differentiales:

$$6. \quad \frac{F_1(v^2)\,dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}}$$
$$= \pm \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon(V\,dU - U\,dV)\,\Pi_1 t}{\sqrt{[U(V-U)(V-a^2U)(V+rsU-\varepsilon(r+s)\sqrt{(UV)})]}},$$

$$7. \quad \frac{v F_2(v^2)\,dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}}$$
$$= \pm \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(V\,dU - U\,dV)\,\Pi_2 t}{\sqrt{[V(V-U)(V-a^2U)(V+rsU-\varepsilon(r+s)\sqrt{(UV)})]}}.$$

Signum $\pm$ ob radicalis ambiguitatem adiiciatur, necesse est, quia semper expressiones:

$$\frac{dv}{dt} = \pm \varepsilon \frac{\Pi_1 t}{F_1(v^2)} \cdot \frac{V dU - U dV}{dt} \cdot \sqrt{\left(\frac{(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)}{U(V-U)(V-a^2U)(V+rsU-\varepsilon(r+s)\sqrt{(UV)})}\right)},$$
$$\frac{dv}{dt} = \pm \frac{\Pi_2 t}{v F_2 v^2} \cdot \frac{V dU - U dV}{dt} \cdot \sqrt{\left(\frac{(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)}{V(V-U)(V-a^2U)(V+rsU-\varepsilon(r+s)\sqrt{(UV)})}\right)},$$

eodem signo ac:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{V\,dU - U\,dV}{V\sqrt{(UV)}\,dt},$$

gaudere debent. In utraque aequatione (6.) et (7.) nominatorem numeratoremque multiplicemus per:

$$\sqrt{[V + rsU + \varepsilon(r+s)\sqrt{(UV)}]},$$

atque expressionem in numeratore ita transformare velimus:

$$8. \quad \sqrt{[V+rsU+\varepsilon(r+s)\sqrt{(UV)}]} =$$
$$\sqrt{\left(\frac{V+rsU+\sqrt{[(V-r^2U)(V-s^2U)]}}{2}\right)}+\varepsilon\sqrt{\left(\frac{V+rsU-\sqrt{[(V-r^2U)(V-s^2U)]}}{2}\right)},$$

Tum vero ponamus functionem:

$$(V-r^2U)(V-s^2U)$$

quadratum esse functionis rationalis ipsius $t$, nec non brevitatis gratia sit:

$$9. \quad \sqrt{[(V-r^2U)(V-s^2U)]} = W;$$

ita ut habeamus:

$$10. \quad \sqrt{[V+rsU+\varepsilon(r+s)\sqrt{(UV)}]} = \sqrt{\left(\frac{V+rsU+W}{2}\right)}+\varepsilon\sqrt{\left(\frac{V+rsU-W}{2}\right)}.$$

In aequationibus (6.) et (7.) his omnibus substitutionibus factis, nanciscimur has:

$$11. \quad \frac{(F_1 v^2)\,dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}}$$
$$= \frac{e\varepsilon}{2}\cdot\frac{V\,dU-U\,dV}{W}\cdot\frac{[\sqrt{(V+rsU+W)}+\varepsilon\sqrt{(V+rsU-W)}]}{\sqrt{[2U(V-U)(V-a^2U)]}}\,\Pi_1 t,$$

$$12. \quad \frac{v(F_2 v^2)\,dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}}$$
$$= \frac{e}{2}\cdot\frac{V\,dU-U\,dV}{W}\cdot\frac{[\sqrt{(V+rsU+W)}+\varepsilon\sqrt{(V+rsU-W)}]}{\sqrt{[2V(V-U)(V-a^2U)]}}\,\Pi_2 t.$$

Signum $e=\pm 1$ ex comparatione expressionum quantitatis $\frac{dv}{dt}$ determinatur, ita ut, cum sit:

$$\frac{\Pi_1 t}{F_1 v^2} = 1 = \frac{\Pi_2 t}{F_2 v^2},$$

$e$ congruat cum signo expressionis:

$$13. \quad \frac{\sqrt{[(V-r^2U)(V-s^2U)(V-U)(V-a^2U)]}}{(V\sqrt{V})[\sqrt{(V+srU+W)}+\varepsilon\sqrt{(V+srU-W)}]\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}}\;{}^{*)}.$$

---

*) Varietas signorum quadruplex, per signa $e$ et $\varepsilon$ supra absoluta, generaliter ita explicatur.

Ponamus:

$$\int\frac{(F_1 v^2)\,dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}} = F_1 v.$$

Facile ex aequatione (11.) derivatur, aequatione (8.) adhibita:

$$\left(\frac{dF_1 v}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{V\,dU-U\,dV}{W\,dt}\right)^2\frac{(\Pi_1 t)^2[V+rsU+\varepsilon(r+s)\sqrt{(UV)}]}{U(V-U)(V-a^2U)}$$

unde radicali $\varepsilon\sqrt{(UV)}$ eliminata, videmus differentiale $\left(\frac{dF_1 v}{dt}\right)$ radicem esse huius aequationis quadratico-quadraticae

$$\left[\left(\frac{dF_1 v}{dv}\right)^2-\tfrac{1}{4}\left(\frac{V\,dU-U\,dV}{W\,dt}\right)^2\cdot\frac{(\Pi_1 t)^2.(V+rsU)}{U(V-U)(V-a^2U)}\right]^2 = \tfrac{1}{16}\left(\frac{V\,dU-U\,dV}{W\,dt}\right)^4\cdot\frac{(\Pi_1 t)^4(r+s)^2UV}{U^2(V-U)^2(V-a^2U)^2},$$

unde quadruplicitas signorum supra exposita originem trahit.

Iam vero de functionibus, $U$, $V$, $W$ nonnulla theoremata afferre placet, quibus adiuti aequationes (11.) et (12.) commutare licebit.

Primum facile demonstratur, quantitatem:

$$\frac{V\,dU-U\,dV}{W\,dt},$$

abire in constantem. Habemus enim has aequationes identicas:

$$(V-r^2U)\,dU-U\,d(V-r^2U) = V\,dU-U\,dV,$$
$$(V-s^2U)\,dU-U\,d(V-s^2U) = V\,dU-U\,dV,$$

quae ostendunt, quemque factorem functionem $(V-r^2U)$ vel $(V-s^2U)$ bis metientem etiam functionem $V\,dU-U\,dV$ metiri. Iam vero fuit:

$$W^2 = (V-r^2U)(V-s^2U),$$

nec functio $W^2$, quae quadratum completum fuit, talis esse potest, ut factores:

$$(V-r^2U), \qquad (V-s^2U),$$

eodem communi gaudeant factore, quippe qui factor simul functionis $U$ et $V$, communi factore carentes, metiretur. Unde concluditur fore:

$$\frac{V\,dU-U\,dV}{W} = C_0\,dt,$$

ubi per $C_0$ quantitas constans exprimitur.

Deinde obtinemus, functionem $U$ cum functione:

$$(V+rsU+W),$$

aeque ac cum functione

$$(V+rsU-W),$$

communi singulo factore gaudere, similique natura functionem $V$ frui.

Habemus enim, posito:

$$V+rsU+W = M, \qquad V+rsU-W = N,$$

has aequationes:

$$M.N = (r+s)^2UV, \qquad M+N = 2(V+rsU).$$

Cum functiones $U$, $V$, $W$, $M$ et $N$ secundum ordinem haud superent, ex priori aequatione sequitur, aut functionem $M$ alterum factorem cum $U$, alterum cum $V$ communem habere, simulque $N$ eadem proprietate gaudere, aut functionem $U$ vel $V$ utroque communi factore cum $M$ gaudere, simulque functionem $V$ vel $U$ cum $N$. Si vero functio $M$ utrumque factorem ipsius $U$ contineret, eosdem factores etiam functionem $2V-N$ metiri, aequatio posterior docet, sive quia $V$ et $N$ communi utroque factore gaudent, etiam $V$ et $N$ ipsas, id quod, quia $V$ et $U$ communi factore ca-

rent, fieri nequit. Eodem modo intelligitur ipsum $M$ utrumque factorem ipsius $V$ continere non posse.

Nil igitur restat, nisi assumere id quod demonstrandum erat; atque ponere licet:

$$U = (a + bt)(c + dt), \qquad M = C_1(a + bt)(e + ft),$$
$$V = (e + ft)(g + ht), \qquad N = C_2(c + dt)(g + ht),$$

ubi quantitates $a$, $b$, $c$ etc., $C_1$, $C_2$, constantes sunt. Quibus expressionibus in aequationibus (11.) et (12.) substitutis, facilibusque reductionibus institutis, habemus:

$$14. \quad \frac{(F_1 v^2)\, dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2 v^2)(1-rv)(1-sv)]}}$$
$$= \frac{e\varepsilon C_0}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{C_1}{2}}\right)(e+ft)\Pi_1 t\, dt}{\sqrt{[(c+dt)(e+ft)(V-U)(V-a^2 U)]}} + \frac{\varepsilon\left(\sqrt{\frac{C_2}{2}}\right)(g+ht)\Pi_1 t\, dt}{\sqrt{[(a+bt)(g+ht)(V-U)(V-a^2 U)]}}\right),$$

$$15. \quad \frac{v(F_2 v^2)\, dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2 v^2)(1-rv)(1-sv)]}}$$
$$= \frac{e\varepsilon C_0}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{C_2}{2}}\right)(c+dt)\Pi_2 t\, dt}{\sqrt{[(e+ft)(c+dt)(V-U)(V-a^2 U)]}} + \frac{\varepsilon\left(\sqrt{\frac{C_1}{2}}\right)(a+bt)(\Pi_2 t)\, dt}{\sqrt{[(g+ht)(a+bt)(V-U)(V-a^2 U)]}}\right).$$

Quia functiones $U$ et $V$ secundum ordinem superare nequeunt, ponamus:

$$U = m + nt + pt^2, \qquad V = m_1 + n_1 t + p_1 t^2.$$

Ut vero functio:

$$(V - r^2 U).(V - s^2 U)$$

quadratum fiat, quippe quod quartum ordinem superare nequeat, duabus inter coefficientes $m$, $n$, $p$, $m_1$, $n_1$, $p_1$, aequationibus conditionalibus satisfaciendum est. Quatuor autem e numero harum sex quantitatum, quod attinet ad illam conditionem, indeterminatae maneant, necesse est, quia substitutione:

$$t = \frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega},$$

instituta, functio $(V - r^2 U)(V - s^2 U)$, si antea quadratum functionis ipsius $t$ fuerit, in quadratum functionis ipsius $\omega$ abit. Duae igitur quantitates, ut illis duabus aequationibus conditionalibus satisfiat, remanent, ita ut adepti simus

**theorema:**

„Substitutio:

$$16. \quad v^2 = \frac{m + nt + pt^2}{m_1 + n_1 t + p_1 t^2}$$

„semper ita determinari potest, ut integralia Abeliana primi ordinis formae:

$$\int \frac{(F_1 v^2 + v(F_2 v^2))\, dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2 v^2)(1-rv)(1-sv)]}}$$

„ad aggregatum integralium eiusdem ordinis, quorum argumenta inter eos-„dem omnia limites continentur, reducantur, et adeo tres quantitates ar-„bitrariae in transformatione remanent."

## III.

### Quomodo duo integralia nova ad eandem formam diversaque argumenta redncantur.

Aequatio fundamentalis (16.), ut quadratica argumenti $t$ tractar potest, quae radicibus $t_1$ et $t_2$ gaudet; ergo, cum fuerit:

$$1.\quad t^2(p-p_1 v^2) + t(n-n_1 v^2) + (m-m_1 v^2) = 0,$$

habemus:

$$2.\quad t_1 t_2 = \frac{m-m_1 v^2}{p-p_1 v^2}, \qquad -t_1 - t_2 = \frac{n-n_1 v^2}{p-p_1 v^2}.$$

Inde sequitur, quantitate $v^2$ eliminata, haec inter radices $t_1$ et $t_2$ relatio:

$$(np_1 - n_1 p) t_1 t_2 + (mp_1 - m_1 p)(t_1 + t_2) + (mn_1 - nm_1) = 0,$$

sive:

$$3.\quad t_1 = -\frac{(mn_1 - nm_1) + (mp_1 - m_1 p) t_2}{(mp_1 - m_1 p) + (np_1 - n_1 p) t_2},$$

unde derivatur haec formula:

$$4.\quad \frac{dt_1}{dt_2} = -\frac{(mp_1 - m_1 p)^2 - (mn_1 - nm_1)(np_1 - n_1 p)}{[(mp_1 - m_1 p) + (np_1 - n_1 p) t_2]^2}$$

sive numeratore $= g$ nominatoreque $= n_2^2$ brevitatis gratia positis.

$$5.\quad \frac{dt_1}{dt_2} = -\frac{g}{n_2^2}.$$

Tum habemus:

$$6.\quad v^2 = \frac{U}{V} = \frac{m + nt_1 + pt_1^2}{m_1 + n_1 t_1 + p_1 t_1^2} = \frac{m + nt_2 + pt_2^2}{m_1 + n_1 t_2 + p_1 t_2^2}.$$

Ponamus vero

$$7.\quad \begin{cases} U_1 = m + nt_1 + pt_1^2, \\ V_1 = m_1 + n_1 t_1 + p_1 t_1^2, \\ U_2 = m + nt_2 + pt_2^2, \\ V_2 = m_1 + nt_2 + p_1 t_2^2, \\ W_1 = \dfrac{V_1\, dU_1 - U_1\, dV_1}{C_0\, dt_1}, \\ W_2 = \dfrac{V_2\, dU_2 - U_2\, dV_2}{C_0\, dt_2}, \end{cases}$$

E formulis (7.) et (3.) sequuntur hae:

$$8.\quad U_1 = \frac{gU_2}{n_2^2}, \qquad V_1 = \frac{gV_2}{n_2^2}.$$

Cum vero sit:

$$\frac{W_1}{V_1} = \left[\frac{V_1\,dU_1 - U_1\,dV_1}{V_1^2\,C_0\,dt_1}\right]V_1 \quad \text{et} \quad \frac{W_2}{V_2} = \left[\frac{V_2\,dU_2 - U_2\,dV_2}{V_2^2\,C_0\,dt_2}\right]V_2,$$

$$= \frac{V_1}{C_0}\cdot\frac{d\frac{U_1}{V_1}}{dt_1}, \qquad\qquad = \frac{V_2}{C_0}\cdot\frac{d\frac{U_2}{V_2}}{dt_2},$$

erit:

$$9. \quad \frac{W_1}{V_1} = \frac{g V_2}{C_0 n_0^2}\cdot\frac{dt_2}{dt_1}\cdot\frac{d\left(\frac{U_1}{V_1}\right)}{dt_2} = \frac{g}{n_2^2}\cdot\frac{dt_2}{dt_1}\cdot\frac{W_2}{V_2},$$

unde formula (5.) adiuti, nanciscimur hanc:

$$10. \quad \frac{W_1}{V_1} = -\frac{W_2}{V_2}.$$

Quibus formulis collatis, habemus:

$$11. \begin{cases} \dfrac{V_1\,dU_1 - U_1\,dV_1}{W_1} = C_0.dt_1 = -C_0.\dfrac{g}{n_2^2}.dt_2, \\ \Pi_1 t_1 = \Pi_1 t_2, \qquad \Pi_2 t_1 = \Pi_2 t_2, \\ \sqrt{[(V_1 - U_1)(V_1 - a^2 U_1)]} = \pm\dfrac{g}{n_2^2}\sqrt{[(V_2 - U_2)(V_2 - a^2 U_2)]}, \\ \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(\dfrac{V_1 + rsU_1 \pm W_1}{U_1}\right)\right]} = \pm\sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(\dfrac{V_2 + rsU_2 \mp W_2}{U_2}\right)\right]}, \\ \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(\dfrac{V_1 + rsU_1 \pm W_1}{V_1}\right)\right]} = \pm\sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(\dfrac{V_2 + rsU_2 \mp W_2}{V_2}\right)\right]}. \end{cases}$$

Has formulas introducamus in aequationibus (11.) et (12.), ita ut loco ipsius $t$ ponamus $t_1$, quo fit:

$$12. \quad \frac{(F_1 v^2)\,dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}}$$

$$= \pm\frac{C_0}{2}\left[\frac{\Pi_1 t_1.\sqrt{[\frac{1}{2}(V_1 + rsU_1 + W_1)]}\,dt_1}{\sqrt{[U_1(V_1 - U_1)(V_1 - a^2U_1)]}} \pm \frac{\Pi_1 t_2.\sqrt{[\frac{1}{2}(V_2 + rsU_2 + W_2)]}\,dt_2}{\sqrt{[U_2(V_2 - U_2)(V_2 - a^2U_2)]}}\right],$$

$$13. \quad \frac{v(F_2 v^2)\,dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}}$$

$$= \pm\frac{C_0}{2}\left[\frac{\Pi_2 t_1.\sqrt{[\frac{1}{2}(V_1 + rsU_1 - W)]}\,dt_1}{\sqrt{[V_1(V_1 - U_1)(V_1 - a^2U_1)]}} \pm \frac{\Pi_2 t_2.\sqrt{[\frac{1}{2}(V_2 + rsU_2 - W_2)]}}{\sqrt{[V_2(V_2 - U_2)(V_2 - a^2U_2)]}}\right].$$

Ex iis adhuc, quae in articulo antecedente exposuimus, sponte, denotationibus ibi adhibitis hîc introductis, sequuntur aequationes hae:

$$14. \quad \frac{F_1 v^2\,dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}}$$

$$= \pm\frac{C\sqrt{C_1}}{2\sqrt{2}}\left[\frac{(e+ft_1)\,\Pi_1 t_1\,dt_1}{\sqrt{[(c+dt_1)(e+ft_1)(V_1 - U_1)(V_1 - a^2U_1)]}}\right.$$

$$\left.\pm\frac{(e+ft_2)\,\Pi_1 t_2\,dt_2}{\sqrt{[(c+dt_2)(e+ft_2)(V_2 - U_2)(V_2 - a^2U_2)]}}\right],$$

$$15. \quad \frac{v F_2 v^2 dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}}$$
$$= \pm \frac{C\sqrt{C_1}}{2\sqrt{2}} \left[ \frac{(g+ht_1)\Pi_2 t_1 dt_1}{\sqrt{[(c+dt_1)(e+ft_1)(V_1-U_1)(V_1-a^2U_1)]}} \pm \frac{(g+ht_2)\Pi_2 t_2 dt_2}{\sqrt{[(c+dt_2)(e+ft_2)(V_2-U_2)(V_2-a^2U_2)]}} \right].$$

Limites argumentorum, inter quos integrationes faciendae sunt, ii valores radicum $t_1$ et $t_2$ sunt, qui cum datis limitibus argumenti $v$ cohaerent. Signa $\pm$ pro diversis intervallis determinanda manent. Inde ex hac disquisitione igitur sequitur hoc

**theorema.**

„Aequatio quadratica:
$$(p-p_1 v^2)+(n-n_1 v^2)t+(m-m_1 v^2) = 0$$
„semper ita determinari potest ut integrale Abelianum:
$$\int \frac{(F_1 v^2 + v F_2 v^2)\, dv}{\sqrt{[1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}},$$
„ad aggregatum duorum integralium, eiusdem formae Abelianorum, quo-„rum limites bini ut radices aequationis fundamentalis quadraticae dantur, „reduci possit, imoque tres inter coefficientes aequationis propositae arbi-„trariae manent."

## IV.

De substitutione formae: $v^2 = \frac{m - qt^2}{m_1 - q_1 t^2}$.

Tribus quantitatibus arbitrariis eo utamur, ut formam radicalis in integralibus novis, ad eandem unam, quam proposuimus, reducamus. Quem finem per parem functionem loco ipsius $\frac{U}{V}$ introductam adipisci licet, ita ut inde per substitutiones lineares adiectas, rursus omnes similes formae derivari possint. Habemus enim, ut, hoc fieri posse, demonstremus, posito:
$$t = \frac{\alpha+\beta\omega}{\gamma+\delta\omega},$$
loco formulae:
$$v^2 = \frac{m+nt+pt^2}{m_1+n_1t+p_1t^2}$$
hanc
$$v^2 = \frac{m(\gamma+\delta\omega)^2+n(\gamma+\delta\omega)(\alpha+\beta\omega)+p(\alpha+\beta\omega)^2}{m_1(\gamma+\delta\omega)^2+n_1(\gamma+\delta\omega)(\alpha+\beta\omega)+p_1(\alpha+\beta\omega)^2}.$$
Quantitates ibi $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ita eligere possumus, ut sit:
$$2\gamma\delta m + (\gamma\beta+\alpha\delta)n + 2\alpha\beta p = 0,$$
$$2\gamma\delta m_1 + (\gamma\beta+\alpha\delta)n_1 + 2\alpha\beta p_1 = 0,$$

unde sequitur:

$$\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}=-\frac{2(p_1 m-p m_1)}{(p_1 n-p n_1)}, \qquad \frac{\alpha}{\gamma}.\frac{\beta}{\delta}=-\frac{(n m_1-n_1 m)}{(p_1 n-p n_1)}.$$

Quae aequationes docent, si expressio:

$$(p_1 m-p m_1)^2+(n m_1-n_1 m)(p_1 n-p n_1),$$

quae eadem est, quam in (4.) articuli praecedentis per $g$ denotavimus, positivo valore gaudeat, quantitates $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\delta}$ semper reales ita determinari posse, ut formula $\frac{U}{V}$ functio par ipsius $\omega$ fiat; inverse omnes ex transformatione

$$v^2=\frac{U}{V},$$

ubi $\frac{U}{V}$ functio par fuerit, derivatas ea proprietate gaudere, ut quantitas $g$ positiva sit, sive, quod ex aequatione (art. III.) (4.) dum $t_1$ et $t_2$ realibus valoribus gaudent, sponte prodit, ut argumento $t_1$ crescente, argumentum $t_2$ decrescat. Ab hac igitur singulari forma, ubi $\frac{U}{V}$ functio par sit, proficiscentes, totam transformationem digeramus.

Ponamus igitur:

$$1. \quad v^2=\frac{m-q t^2}{m_1-q_1 t^2}=\frac{U}{V},$$

atque conditioni per coefficientes satis fiamus, ut functio:

$$(V-r^2 U)(V-s^2 U)$$

quadratum completum fiat. Habemus vero substitutione instituta:

$$(V-r^2 U)(V-s^2 U)$$
$$=((m_1-r^2 m)-(q_1-r^2 q)t^2)((m_1-s^2 m)-(q_1-s^2 q)t^2);$$

quae functio quadratum fit, posito:

$$2. \quad \text{aut,}\ \frac{m_1}{m}=s^2, \quad \text{et}\ \frac{q_1}{q}=r^2,$$

$$3. \quad \text{aut,}\ \frac{m_1}{m}=r^2, \quad \text{et}\ \frac{q_1}{q}=s^2.$$

Priori casu, unde alter, $r$ cum $s$ commutato prodibit, posito, habemus has formulas:

$$4. \quad \begin{cases} v=\varepsilon\sqrt{\left(\dfrac{m-q t^2}{m s^2-q r^2 t^2}\right)}, \\ \dfrac{dv}{dt}=\dfrac{-\varepsilon.m q(s^2-r^2)t}{\sqrt{[(m s^2-q r^2 t^2)^3(m-q t^2)]}}, \\ 1-v^2=\dfrac{m(s^2-1)-q(r^2-1)t^2}{m s^2-q r^2 t^2}, \end{cases}$$

$$4.\quad\begin{cases} 1-a^2v^2 = -\left[\dfrac{m(a^2-s^2)-q(a^2-r^2)t^2}{ms^2-qr^2t^2}\right], \\ (1-rv)(1-sv) = \dfrac{[\sqrt{(ms^2-qr^2t^2)}-\varepsilon r\sqrt{(m-qt^2)}][\sqrt{(ms^2-qr^2t^2)}-\varepsilon s\sqrt{(m-qt^2)}]}{(ms^2-qr^2t^2)} \\ \qquad = (s+r)\left[\dfrac{ms-\varepsilon\sqrt{[(ms^2-qr^2t^2)(m-qt^2)]}-qrt^2}{(ms^2-qr^2t^2)}\right]. \end{cases}$$

In ultima formula numeratore denominatoreque per:

$$ms+\varepsilon\sqrt{[(ms^2-qr^2t^2)(m-qt^2)]}-qrt^2,$$

multiplicatis nanciscimur hanc aequationem:

$$(1-rv)(1-sv) = \frac{(s+r)(s-r)^2 mq.t^2}{(ms^2-qr^2t^2)[ms+\varepsilon\sqrt{((ms^2-qr^2t^2)(m-qt^2))}-qrt^2]}.$$

Iam vero formulam identicam proponimus:

$$ms+\varepsilon\sqrt{((ms^2-qr^2t^2)(m-qt^2))}-qrt^2$$
$$= \left[\sqrt{\left(\frac{(s\sqrt{m}-rt\sqrt{q})(\sqrt{m}+t\sqrt{q})}{2}\right)}+\varepsilon\sqrt{\left(\frac{(s\sqrt{m}+rt\sqrt{q})(\sqrt{m}-t\sqrt{q})}{2}\right)}\right]^2.$$

Qua formula in antecedenti substituta, habemus:

$$\frac{1}{(1-rv)(1-sv)} =$$
$$\frac{(ms^2-qr^2t^2)}{(s+r)(s-r)^2m^2qt^2}\left[\sqrt{\left(\frac{(s\sqrt{m}-rt\sqrt{q})(\sqrt{m}+t\sqrt{q})}{2}\right)}+\varepsilon\sqrt{\left(\frac{(s\sqrt{m}+rt\sqrt{q})(\sqrt{m}-t\sqrt{q})}{2}\right)}\right]^2$$

Ex omnibus vero his formulis apte compositis sequitur, si brevitatis gratia ponimus:

$$(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv) = \varphi v,$$
$$\sqrt{\left(\frac{(s+r)}{2s}\cdot\frac{q}{m}\cdot\frac{1}{(s^2-1)(a^2-s^2)}\right)} = M,$$

fore:

$$5.\quad \frac{F_1 v^2.dv}{\sqrt{(\varphi v)}}$$
$$= \varepsilon.eMs(\Pi_1 t^2)dt\left(\frac{\sqrt{\left[\left(1-\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\left(1+\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\right]}+\varepsilon\sqrt{\left[\left(1+\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\left(1-\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\right]}}{\sqrt{\left[-\left(1-\frac{q}{m}t^2\right)\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{r^2-1}{s^2-1}t^2\right)\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}t^2\right)\right]}}\right),$$

$$6.\quad \frac{v(F_2 v^2)dv}{\sqrt{(\varphi v)}}$$
$$= \quad eM(\Pi_2 t^2)dt\left(\frac{\sqrt{\left[\left(1-\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\left(1+\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\right]}+\varepsilon\sqrt{\left[\left(1+\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\left(1-\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\right]}}{\sqrt{\left[-\left(1-\frac{r^2}{s^2}\cdot\frac{q}{m}t^2\right)\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{r^2-1}{s^2-1}t^2\right)\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}t^2\right)\right]}}\right),$$

ubi functiones $\Pi_1 t^2$ et $\Pi_2 t^2$ loco functionum:

$$F_1\left(\frac{m-qt^2}{ms^2-qr^2t^2}\right),\qquad F_2\left(\frac{m-qt^2}{ms^2-qr^2t^2}\right),$$

introductae sunt, atque signum $e = \pm 1$, cum signo quantitatis:

7. $$\frac{-(s^2-r^2)t\sqrt{\left[-\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{r^2-1}{s^2-1}t^2\right)\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}t^2\right)\right]}}{\left\{\sqrt{\left[\left(1-\frac{q}{m}\,\frac{r^2}{s^2}t^2\right)^2\right]}\right\}\left\{\sqrt{\left[\left(1-\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\left(1+\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\right]}+e\sqrt{\left[\left(1+\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\left(1-\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\right]}\right\}\sqrt{(\varphi v)}}$$

congruat, necesse est.

Si formulam fundamentalem ut aequationem quadraticam puram ipsius $t$ tractamus, ita ut habeamus:

$$t^2-\frac{m}{q}\cdot\frac{1-s^2v^2}{1-r^2v^2}=0$$

radices ita distinguere placet, ut ponamus:

$$t_1=+\sqrt{\left(\frac{m}{q}\cdot\frac{1-s^2v^2}{1-r^2v^2}\right)},\qquad t_2=-\sqrt{\left(\frac{m}{q}\cdot\frac{1-s^2v^2}{1-r^2v^2}\right)}.$$

In formulis antecedentibus igitur, argumenti $t$ loco, in termino secundo introducamus $t_1$, atque $t_2=-t_1$ ponere velimus, ita ut habeamus:

$$\frac{\sqrt{\left[\left(1-\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\left(1+\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\right]}dt}{\sqrt{\left[-\left(1-\frac{q}{m}t^2\right)\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{r^2-1}{s^2-1}t^2\right)\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}t^2\right)\right]}}=\frac{\left(1-\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t_1\right)dt_1}{\sqrt{[-(\Theta t_1)]}},$$

$$\frac{\sqrt{\left[\left(1+\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\left(1-\frac{q}{m}t\right)\right]}dt}{\sqrt{\left[-\left(1-\frac{q}{m}t^2\right)\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{r^2-1}{s^2-1}t^2\right)\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}t^2\right)\right]}}=\frac{-\left(1-\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t_2\right)dt_2}{\sqrt{[-(\Theta t_2)]}},$$

$$\frac{\sqrt{\left[\left(1-\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\left(1+\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\right]}dt}{\sqrt{\left[-\left(1-\frac{r^2}{s^2}\,\frac{q}{m}t^2\right)\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{r^2-1}{s^2-1}t^2\right)\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}t^2\right)\right]}}=\frac{-\left(1-\sqrt{\frac{q}{m}}t_2\right)dt_2}{\sqrt{[-(\Theta t_2)}},$$

$$\frac{\sqrt{\left[\left(1+\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\left(1-\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\right]}dt}{\sqrt{\left[-\left(1-\frac{r^2}{s^2}\cdot\frac{q}{m}t^2\right)\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{r^2-1}{s^2-1}t^2\right)\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}t^2\right)\right]}}=\frac{\left(1-\sqrt{\frac{q}{m}}t_1\right)dt_1}{\sqrt{[-(\Theta t_1)}},$$

Ubi brevitatis causa posuimus:

$$\Theta t=\left[1-\left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{r^2-1}{s^2-1}\right)t^2\right]\left[1-\left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}\right)t^2\right]\left(1-\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\left(1-\sqrt{\frac{q}{m}}t\right).$$

Quibus formulis adiuti, has aequationes ex (5.) et (6.) deduximus, ubi, ut supra, posuimus:

$$\Pi_1 t_1^2=F_1\left(\frac{m-qt_1^2}{ms^2-qr^2t_1^2}\right),\qquad \Pi_2 t_1^2=F_2\left(\frac{m-qt_1^2}{ms^2-qr^2t_1^2}\right)\quad \text{etc.}$$

$$9.\quad \frac{F_1 v^2 . dv}{\sqrt{(\varphi v)}} = \varepsilon . e . M s \left( \frac{\Pi_1 t_1^2 \left(1 - \frac{r}{s} \sqrt{\frac{q}{m}}\, t_1\right) dt_1}{\sqrt{(-\Theta t_1)}} - \varepsilon \frac{\Pi_1 t_2^2 \left(1 - \frac{r}{s} \sqrt{\frac{q}{m}}\, t_2\right) dt_2}{\sqrt{(-\Theta t_2)}} \right),$$

$$10.\quad \frac{v (F_2 v^2) dv}{\sqrt{(\varphi v)}} = \varepsilon . e\, M \left( \frac{\Pi_2 t_1^2 \left(1 - \sqrt{\frac{q}{m}}\, t_1\right) dt_1}{\sqrt{(-\Theta t_1)}} - \varepsilon \frac{\Pi_2 t_2^2 \left(1 - \sqrt{\frac{q}{m}}\, t_2\right) dt_2}{\sqrt{(-\Theta t_2)}} \right).$$

In utraque parte integratione facta, nil restat, nisi ut limites adhuc argumentorum definiamus, indeque valores signorum $\varepsilon$ et $e$ deducamus, pro aliis limitum intervallis alios.

Hunc ad finem, ut disquisitionum stabiliamus, e numero triginta permutationum unam praeferamus, quae et ad simpliciorem formam substitutionis:

$$z = \frac{1}{C} \cdot \frac{1 \pm v}{1 \mp v},$$

nec ad particuliares modulorum conditiones ducit, atque ponamus:

$$11.\quad 1 > \frac{1}{r} > \frac{1}{s} > \frac{1}{a} > -\frac{1}{a} > -1.$$

Limites argumentorum nunc in hac tabula comprehenduntur.

12.

| Limites ipsius $v$. | Limites ipsius $t_1$. | Limites ipsius $t_2$. |
|---|---|---|
| $\pm\infty$. | $\frac{s}{r}\sqrt{\frac{m}{q}}$. | $-\frac{r}{s}\sqrt{\frac{m}{q}}$. |
| $\pm 1$. | $\sqrt{\left(\frac{m}{q} \cdot \frac{s^2-1}{r^2-1}\right)}$. | $\sqrt{\left(\frac{m}{q} \cdot \frac{s^2-1}{r^2-1}\right)}$. |
| $\pm\frac{1}{r}$ | $+\infty$. / $+i\infty$. | $-\infty$. / $-i\infty$. |
| $\pm\frac{1}{s}$. | 0. | 0. |
| $\pm\frac{1}{a}$. | $\sqrt{\left(\frac{m}{q} \cdot \frac{a^2-s^2}{a^2-r^2}\right)}$. | $\sqrt{\left(\frac{m}{q} \cdot \frac{a^2-s^2}{a^2-r^2}\right)}$. |
| 0. | $\sqrt{\frac{m}{q}}$. | $-\sqrt{\frac{m}{q}}$. |
| $\pm i\infty$. | $\frac{s}{r}\sqrt{\frac{m}{q}}$. | $-\frac{s}{r}\sqrt{\frac{m}{q}}$. |

Formulis differentialis habemus:

$$\frac{dt_1}{dv} = -\sqrt{\frac{m}{q}} \cdot \frac{(s^2-r^2)v}{\sqrt{[(1-r^2v^2)^2(1-s^2v^2)]}},$$

$$\frac{dt_2}{dv} = \sqrt{\frac{m}{q}} \cdot \frac{(s^2-r^2)v}{\sqrt{[(1-r^2v^2)^2(1-s^2v^2)]}}.$$

Quae formulae, cum, $v$ vel evanescente, vel in $\pm\infty$ abeunte, ipsae evanescant, contra, $v = \pm\frac{1}{s}$ vel $= \pm\frac{1}{r}$ posito, in infinitum abeant, maxima

et minima radicum $t_1$ et $t_2$ pro his valoribus dari, indicant. Prior formula dum argumentum $v$:

$$\text{vel ab } -\infty, \text{ ad } -\frac{1}{r}, \text{ vel ab } -\frac{1}{s}, \text{ ad } 0$$

pergit, negativo, dum argumentum $v$:

$$\text{vel ab } -\frac{1}{r}, \text{ ad } -\frac{1}{s}, \text{ vel ab } 0, \text{ ad } i\infty$$

pergit, imaginario valore formae $-iP^2$, dum argumentum $v$:

$$\text{vel ab } \frac{1}{s}, \text{ ad } \frac{1}{r}, \text{ vel ab } -i\infty, \text{ ad } 0$$

pergit, imaginario valore formae $iP^2$ gaudet.

Videmus igitur, argumenta $t_1$ et $t_2$ in intervallis in tabula assignatis simul cum intervallo $v$, altero crescente altero decrescente, continuo pergere.

Iam porro ad determinationem signorum $\varepsilon$ et $e$ aggrediamur. Habemus ex formula (4.)

$$13. \quad v = \varepsilon \sqrt{\left(\frac{m - qt_1^2}{ms^2 - qr^2t_1^2}\right)},$$

quia $t_1$ loco argumenti $t$ substitutum est. Videmus vero expressionem:

$$\sqrt{\left(\frac{m - qt_1^2}{ms^2 - qr^2t_1^2}\right)},$$

pro omnibus valoribus in tabula nostra comprehensis argumenti $t_1$, positivam esse, uno intervallo $\sqrt{\frac{m}{q}} - \frac{s}{r}\sqrt{\frac{m}{q}}$ excepto, ubi imaginaria formae $iP^2$ est. Ergo iure concludimus pro positivis atque imaginariis formae: $iP^2$ valoribus ipsius $v$, fore: $\varepsilon = +1$, pro negativis atque imaginariis formae: $-iP^2$, fore: $\varepsilon = -1$.

Inde extemplo, formula (7.) adhibita, emanat, signum $e$ idem fore, ac signum expressionis:

$$14. \quad \frac{-(s^2-r^2)t_1\sqrt{\left[-\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{r^2-1}{s^2-1}t_1^2\right)\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}t_1^2\right)\right]}}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{r^2}{s^2}t_1^2\right)^2\right]}\left\{\sqrt{\left[\left(1-\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t\right)\left(1+\sqrt{\frac{q}{m}}t_1\right)\right]}\pm\sqrt{\left[\left(1+\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t_1\right)\left(1-\sqrt{\frac{q}{m}}t_1\right)\right]}\right\}\sqrt{(\varphi v)}}$$

superiori signo pro positivis, inferiori pro negativis argumenti $v$ valoribus valente. Signum igitur huius radicalis pro diversis intervallis quaerendum est.

I. Argumentum $v$ iaceat intra: $\pm\infty$ et $\pm\frac{1}{r}$.

Expressio:

$$\sqrt{\left[\left(1-\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t_1\right)\left(1+\sqrt{\frac{q}{m}}t_1\right)\right]}\pm\sqrt{\left[\left(1+\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t_1\right)\left(1-\sqrt{\frac{q}{m}}t_1\right)\right]}$$

in hanc abit:

$$\sqrt{-1}\left\{\sqrt{\left[\left(\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t_1-1\right)\left(\sqrt{\frac{q}{m}}t_1+1\right)\right]}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t_1+1\right)\left(\sqrt{\frac{q}{m}}t_1-1\right)\right]}\right\},$$

quae, superiori signo valente, formae:

$$\sqrt{-1}\,P^2,$$

inferiori valente, formae:

$$-\sqrt{-1}\,P^2$$

erit, quia habemus:

$$\left(\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t_1-1\right)\left(\sqrt{\frac{q}{m}}t_1+1\right)<\left(\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t_1+1\right)\left(\sqrt{\frac{q}{m}}t_1-1\right).$$

Alter factor:

$$\frac{-(s^2-r^2)t_1\sqrt{\left[-\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{r^2-1}{s^2-1}t_1^2\right)\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}t_1^2\right)\right]}}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{r^2}{s^2}t_1^2\right)^2\right]}\sqrt{(\varphi v)}};$$

erit, quod attinet ad signa, dum argumentum $v$:

vel intra: $\infty$ et $1$, vel intra: $-1$ et $-\frac{1}{r}$

iacet, formae: $P^2\sqrt{(1-1)}$, dum vero argumentum $v$:

vel intra: $1$ et $\frac{1}{r}$, vel intra: $-\infty$ et $-1$

continetur, formae: $-P^2\sqrt{-1}$.

Inde colligitur, fore:

pro intervallis: $\pm\infty\ldots\pm 1$, $\quad e=+1$,

pro intervallis: $\pm\frac{1}{r}\ldots\pm\frac{1}{s}$, $\quad e=-1$.

II. Argumentum $v$ iaceat intra: $\pm\frac{1}{s}$ et 0.

Factor:

$$\sqrt{\left[\left(1-\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t_1\right)\left(1+\sqrt{\frac{q}{m}}t_1\right)\right]}\pm\sqrt{\left[\left(1+\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t_1\right)\left(1-\sqrt{\frac{q}{m}}t_1\right)\right]}$$

quia est:

$$\left(1-\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t_1\right)\left(1+\sqrt{\frac{q}{m}}t_1\right)>\left(1+\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}t_1\right)\left(1-\sqrt{\frac{q}{m}}t_1\right),$$

semper positivo valore gaudet.

Factor alter dum argumentum $v$:

vel intra: $\frac{1}{s}\ldots\frac{1}{a}$, vel intra: $-\frac{1}{a}\ldots-\frac{1}{s}$,

iacet, negativo, dum argumentum $v$:

$$\text{vel intra: } \frac{1}{a} \text{ et } 0, \quad \text{vel intra: } 0 \text{ et } -\frac{1}{a}$$

progreditur, positivo valore gaudebit.

Inde colligitur fore:

$$\text{pro intervallis: } \pm\frac{1}{a} \ldots\ldots 0, \qquad e = +1,$$

$$\text{pro intervallis: } \pm\frac{1}{s} \ldots\ldots \pm\frac{1}{a}, \qquad e = -1.$$

III. Argumentum $v$ iaceat intra: $\pm\frac{1}{r} \ldots\ldots \pm\frac{1}{s}$.

Hic ponere licet:

$$t_1 = T^2\sqrt{-1},$$

$$\frac{s\sqrt{m}}{\sqrt{(s^2m+r^2qT^4)}} = \cos\Theta, \qquad \frac{rT^2\sqrt{q}}{\sqrt{(s^2m+r^2qT^4)}} = \sin\Theta,$$

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{(m+qT^4)}} = \cos\Theta_1, \qquad \frac{T^2\sqrt{q}}{\sqrt{(m+qT^4)}} = \sin\Theta_1,$$

ubi $\frac{\pi}{2} > \Theta_1 > \Theta$ est.

Quibus formulis adhibitis, has habemus aequationes:

$$\sqrt{\left[\left(1-\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}\,t_1\right)\left(1+\sqrt{\frac{q}{m}}\,t_1\right)\right]} + \sqrt{\left[\left(1+\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}\,t_1\right)\left(1-\sqrt{\frac{q}{m}}\,t_1\right)\right]}$$

$$= 2\sqrt{\left[\left(1+\frac{r^2}{s^2}.\frac{q}{m}T^4\right)\left(1+\frac{q}{m}T^4\right)\right]}\cos\frac{\Theta_1-\Theta}{2},$$

atque:

$$\sqrt{\left[\left(1-\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}\,t_1\right)\left(1+\sqrt{\frac{q}{m}}\,t_1\right)\right]} - \sqrt{\left[\left(1+\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}\,t_1\right)\left(1-\sqrt{\frac{q}{m}}\,t_1\right)\right]}$$

$$= 2\sqrt[4]{\left[\left(1+\frac{r^2}{s^2}.\frac{q}{m}T^4\right)\left(1+\frac{q}{m}T^4\right)\right]}\sin\frac{\Theta_1-\Theta}{2}\sqrt{-1}.$$

Illa quantitas forma $P^2$, haec forma $+iP^2$ gaudet.

Factor alter

$$\frac{-(s^2-r^2)t_1\sqrt{\left[-\left(1-\frac{q}{m}.\frac{r^2-1}{s^2-1}t_1^2\right)\left(1-\frac{q}{m}.\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}t_1^2\right)\right]}}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{q}{m}.\frac{r^2}{s^2}t_1^2\right)^2\right]}\sqrt{(\varphi v)}},$$

dum argumentum $v$:

$$\text{intra: } \frac{1}{r} \text{ et } \frac{1}{s}$$

iacet negativo, dum vero argumentum $v$:

$$\text{intra: } -\frac{1}{s} \ldots\ldots -\frac{1}{r}$$

continetur, imaginario valore formae: $-P^2\sqrt{-1}$ fruitur.

Ergo erit pro intervallis:

$$\pm\frac{1}{r}\;\ldots\;\pm\frac{1}{s}, \qquad e = -1.$$

IV. Argumentum $v$ iaceat inter: 0 et $\pm i\,\infty$.

Factor:

$$\sqrt{\left[\left(1-\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}\,t_1\right)\left(1+\sqrt{\frac{q}{m}}\,t_1\right)\right]}\pm\sqrt{\left[\left(1+\frac{r}{s}\sqrt{\frac{q}{m}}\,t_1\right)\left(1-\sqrt{\frac{q}{m}}\,t_1\right)\right]}$$

formam:

$$M^2 \pm i N^2$$

assumit.

Factor reliquus, posito:

$$v = \pm i V^2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1+r^2V^4)}} = \cos\eta, \qquad \frac{rV^2}{\sqrt{(1+r^2V^4)}} = \sin\eta,$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1+s^2V^4)}} = \cos\eta_1, \qquad \frac{sV^2}{\sqrt{(1+s^2V^4)}} = \sin\eta_1,$$

in hanc formam abit:

$$= \frac{1}{\sqrt{[(1+r^2V^4)(1+s^2V^4)]}}\cos\frac{\eta_1-\eta}{2}\pm i\sin\frac{\eta_1-\eta}{2};$$

unde colligitur fore:

in intervallis: $0\;\ldots\;\pm i\infty$ ipsius $v$, $\qquad e = +1$.

Omnibus collectis habemus hanc signorum $e$ et $s$ determinationem:

$$14.\quad \begin{cases} \text{pro intervallis ipsius } v\text{:} \quad \pm\frac{1}{a}\;\ldots\;0\;\ldots\;\pm i\infty\;\ldots\;\pm 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \pm\infty \\ \qquad\qquad e = \pm 1, \qquad e = +1, \\ \text{pro intervallis ipsius } v\text{:} \quad \pm 1\;\ldots\;\pm\frac{1}{r}\;\ldots\;\pm\frac{1}{s}\;\ldots\;\pm\frac{1}{a} \\ \qquad\qquad e = \pm 1, \qquad e = -1. \end{cases}$$

Iam vero integrale novum non modo ad eandem formam radicalis, sed etiam ad eundem factorum ordinem reducere licet, quem in dato integrali posuimus. Id quod, ut ad comparationem prorsus similium integralium denique perveniamus, facimus. Inter duos casus, quos ponere licet:

$$15.\quad \sqrt{\frac{m}{q}} = \sqrt{\left(\frac{r^2-1}{s^2-1}\right)}, \qquad \sqrt{\frac{m}{q}} = \sqrt{\left(\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}\right)},$$

ut factorem: $(1-t^2)$ in functione: $\Theta t$ adipiscamur, prior, ut finem propositum nanciscamur, praeferendus est, unde fit:

$$16.\quad t_1 = \sqrt{\left(\frac{r^2-1}{s^2-1}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{1-s^2v^2}{1-r^2v^2}\right)}, \qquad t_2 = -\sqrt{\left(\frac{r^2-1}{s^2-1}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{1-s^2v^2}{1-r^2v^2}\right)},$$

$$17.\quad \begin{cases} \Theta t = (1-t^2)\left(1-\frac{s^2-1}{r^2-1}\cdot\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}t^2\right)\left(1-\frac{r}{s}\sqrt{\left(\frac{s^2-1}{r^2-1}t\right)}\right)\left(1-\sqrt{\left(\frac{s^2-1}{r^2-1}t\right)}\right), \\ M = \sqrt{\left(\frac{s+r}{2s}\cdot\frac{1}{(r^2-1)(a^2-s^2)}\right)}, \qquad \Pi_1 t^2 = F_1\left(\frac{(r^2-1)-(s^2-1)t^2}{(r^2-1)s^2-(s^2-1)r^2t^2}\right), \\ \qquad \Pi_2 t^2 = F_2\left(\frac{(r^2-1)-(s^2-1)t^2}{(r^2-1)s^2-(s^2-1)r^2t^2}\right), \end{cases}$$

sive:

$$\Pi_1 t^2 = F_1 v^2, \qquad \Pi_2 t^2 = F_2 v^2.$$

Brevitatis causa posito:

$$18.\quad \sqrt{\left(\frac{s^2-1}{r^2-1}\right)}\sqrt{\left(\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}\right)} = a_1, \quad \frac{r}{s}\sqrt{\left(\frac{s^2-1}{r^2-1}\right)} = r_1, \quad \sqrt{\left(\frac{s^2-1}{r^2-1}\right)} = s_1,$$

facile intelligitur fore:

$$1 > \frac{1}{r_1} > \frac{1}{s_1} > \frac{1}{a_1} > -\frac{1}{a_1} > -1$$

si fuerit, quod erat propositum:

$$1 > \frac{1}{r} > \frac{1}{s} > \frac{1}{a} > -\frac{1}{a} > -1.$$

Ponamus porro:

$$20.\quad s\Pi_1 t^2 + \Pi_2 t^2 = P_1 t^2 = -\sqrt{\left(\frac{s^2-1}{r^2-1}\right)}(r\Pi_1 t^2 + \Pi_2 t^2) = P_2 t^2.$$

Quibus igitur quantitatibus omnibus introductis, ex additione integralium aequationum (9.) et (10.) hanc memorabilem adipiscimur aequationem:

$$21.\quad \int \frac{(F_1 v^2 + v F_2 v^2)\,dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}}$$

$$= e\varepsilon M\left[\int \frac{(P_1 t_1^2 + t_1 . P_2 t_1^2)\,dt}{\sqrt{[-(1-t_1^2)(1-a_1^2 t_1^2)(1-r_1 t_1)(1-s_1 t_1)]}}\right.$$

$$\left. - \varepsilon \int \frac{(P_2 t_2^2 + t_2 . P_2 t_2^2)\,dt_2}{\sqrt{[-(1-t_2^2)(1-a_1^2 t_2^2)(1-r_1 t_2^2)(1-s_1 t_2^2)]}}\right],$$

ubi signa $e$ et $\varepsilon$, ut supra exposuimus, determinantur.

Iam igitur diversa intervalla integralis propositi permigrantes, hanc tabulam denique componere licet, ubi brevitatis gratia rursus signum:

$$\Theta t = (1-t^2)(1-a_1^2 t^2)(1-r_1 t)(1-s_1 t),$$

introductum est.

I. Primum intervallum ipsius $v$: ab $-1$ usque ad $+1$.

Limites $v$, $t_1$, $t_2$,

$$\begin{Bmatrix} -1, & +1, & -1, \\ -\infty, & +\frac{1}{r}, & -\frac{1}{r}, \end{Bmatrix} \int \frac{F_1 v^2 + v F_2 v^2)\,dv}{\sqrt{(\varphi v)}}$$

$$= -\int \frac{M(P_1 t_1^2 + t_1 P_2 t_1^2)\,dt}{\sqrt{(-\Theta t)}} - \int \frac{M(P_1 t_2^2 + t_2 P_2 t_2^2)\,dt_2}{\sqrt{(-\Theta t_2)}},$$

$$\begin{Bmatrix} +\infty, & +\frac{1}{r}, & -\frac{1}{r}, \\ +1, & +1, & -1, \end{Bmatrix} \int \frac{F_1 v + v F_2 v^2)\, dv}{\sqrt{(\varphi v)}}$$

$$= +\int \frac{M(P_1 t_1^2 + t_1 P_2 t_1^2)\, dt}{\sqrt{(-\Theta t_1)}} - \int \frac{M(P_1 t_2^2 + t_2 P_2 t_2^2)\, dt_2}{\sqrt{(-\Theta t_2)}}.$$

II. Secundum intervallum ipsius $v$: ab 1 usque ad $\frac{1}{r}$.
Tertium intervallum ipsius $v$: ab $\frac{1}{r}$ - - $\frac{1}{s}$.
Quartum intervallum ipsius $v$: ab $\frac{1}{s}$ - - $\frac{1}{a}$.

Lim. $v$, $t_1$, $t_2$,

$$\left.\begin{matrix} \begin{Bmatrix} 1, & 1, & -1, \\ \frac{1}{r}, & \infty, & -\infty, \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \frac{1}{r}, & i\infty, & -i\infty, \\ \frac{1}{s}, & 0, & 0, \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \frac{1}{s}, & 0, & 0, \\ \frac{1}{a}, & \frac{1}{a}, & -\frac{1}{a}, \end{Bmatrix} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \int \frac{(F_1 v^2 + v F_2 v^2)\, dv}{\sqrt{(\varphi v)}} \\ = -\int \frac{M(P_1 t_1^2 + t_1 P_2 t_1^2)\, dt}{\sqrt{(-\Theta t)}} + \int \frac{M(P_1 t_2^2 + t_2 P_2 t_2^2)\, dt_2}{\sqrt{(-\Theta t_2)}}. \end{matrix}$$

III. Quintum intervallum ipsius $v$: ab $\frac{1}{a}$ usque ad $-\frac{1}{a}$.

Lim. $v$, $t_1$, $t_2$,

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{a}, & \frac{1}{a}, & -\frac{1}{a}, \\ 0, & \frac{1}{s}, & -\frac{1}{s}, \end{Bmatrix} \begin{matrix} \int \frac{(F_1 v^2 + v F_2 v^2)\, dv}{\sqrt{(\varphi v)}} \\ = \int \frac{M(P_1 t_1^2 + t_1 P_2 t_1^2)\, dt_1}{\sqrt{(-\Theta t_1)}} - \int \frac{M(P_1 t_2^2 + t_2 P_2 t_2^2)\, dt_2}{\sqrt{(-\Theta t_2)}}. \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0, & \frac{1}{s}, & -\frac{1}{s}, \\ -\frac{1}{a}, & \frac{1}{a}, & -\frac{1}{a}, \end{Bmatrix} \begin{matrix} \int \frac{(F_1 v^2 + v F_2 v^2)\, dv}{\sqrt{(\varphi v)}} \\ = -\int \frac{M(P_1 t_1^2 + t_1 P_2 t_1^2)\, dt_1}{\sqrt{(-\Theta t_1)}} - \int \frac{M(P_1 t_2^2 + t_2 P_2 t_2^2)\, dt_2}{\sqrt{(-\Theta t_2)}}. \end{matrix}$$

**IV. Sextum intervallum ipsius $v$: ab $-\frac{1}{a}$ usque ad $-1$.**

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{lll}-\frac{1}{a}, & \frac{1}{a}, & -\frac{1}{a},\\ -\frac{1}{s}, & 0, & 0,\end{array}\right\}\\ \left\{\begin{array}{lll}-\frac{1}{s}, & 0, & 0,\\ -\frac{1}{r}, & i\infty, & -i\infty,\end{array}\right\}\\ \left\{\begin{array}{lll}-\frac{1}{r}, & \infty, & -\infty,\\ -1, & +1, & -1,\end{array}\right\}\end{array}\right\}\quad \begin{array}{c}\int\frac{F_1 v^2+v F_2 v^2)\,dv}{\sqrt{(\varphi v)}}\\ =+\int\frac{M(P_1 t_1^2+t_1 P_2 t_1^2)\,dt}{\sqrt{(-\Theta t_1)}}+\int\frac{M(P_1 t_2^2+t_2 P_2 t_2^2)\,dt_2}{\sqrt{(-\Theta t_2)}}.\end{array}$$

**V. Imaginarium intervallum ipsius $v$: ab $0$ ad $+i\infty$ et $-i\infty$ ad $0$.**

Lim. $v$, $t_1$, $t_2$,

$$\left\{\begin{array}{lll}0, & \frac{1}{s_1}, & -\frac{1}{s_1},\\ i\infty, & \frac{1}{r_1}, & -\frac{1}{r_1},\end{array}\right\}\quad \begin{array}{c}\int\frac{(F_1 v+v F_2 v^2)\,dv}{\sqrt{(\varphi v)}}\\ =\int\frac{M(P_1 t_1^2+t_1 P_2 t_1^2)\,dt}{\sqrt{(-\Theta t_1)}}-\int\frac{M(P_1 t_2^2+t_2 P_2 t_2^2)\,dt_2}{\sqrt{(-\Theta t_2)}}.\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{lll}-i\infty, & \frac{1}{r_1}, & -\frac{1}{r_1},\\ 0, & \frac{1}{s_1}, & -\frac{1}{s_1},\end{array}\right\}\quad \begin{array}{c}\int\frac{(F_1 v+v F_2 v^2)\,dv}{\sqrt{(\varphi v)}}\\ =-\int\frac{M(P_1 t_1^2+t_1 P_2 t_1^2)\,dt}{\sqrt{(\Theta t_1)}}+\int\frac{M(P_1 t_2^2+t_2 P_2 t_2^2)\,dt_2}{\sqrt{(-\Theta t_2)}}.\end{array}$$

## V.

### Quomodo transformationes modo inventae invertantur.

Transformatio, quam modo exposuimus, memorabili gaudet natura, ut protinus inversa ad se ipsam reducat. Sequuntur enim ex aequationibus:

$$1.\quad r_1^2=\frac{r^2}{s^2}\cdot\frac{s^2-1}{r^2-1},\qquad s_1^2=\frac{s^2-1}{r^2-1},\qquad a_1^2=\frac{s^2-1}{r^2-1}\cdot\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2},$$

hae inversae:

$$2.\quad r^2=\frac{r_1^2}{s_1^2}\cdot\frac{s_1^2-1}{r_1^2-1},\qquad s^2=\frac{s_1^2-1}{r_1^2-1},\qquad a^2=\frac{s_1^2-1}{r_1^2-1}\cdot\frac{a_1^2-r_1^2}{a_1^2-s_1^2},$$

atque ex formula igitur transformationis:

$$3.\quad t^2=\frac{r^2-1}{s^2-1}\cdot\frac{1-s^2v^2}{1-r^2v^2},$$

haec inversa:

$$4.\quad v^2=\frac{r_1^2-1}{s_1^2-1}\cdot\frac{1-s_1^2t^2}{1-r_1^2t^2}.$$

Positiva huius aequationis quadraticae argumenti $v$ radice $= v_1$, negativa $= v_2$, posita, habemus has formulas, quae cum formulis (16.) artic. IV. mutationibus necessariis factis, prorsus congruunt:

$$5. \quad v_1 = \sqrt{\left[\left(\frac{r_1^2-1}{s_1^2-1}\right)\left(\frac{1-s_1^2 t^2}{1-r_1^2 t^2}\right)\right]}, \qquad v_2 = -\sqrt{\left[\left(\frac{r_1^2-1}{s_1^2-1}\right)\left(\frac{1-s_1^2 t^2}{1-r_1^2 t^2}\right)\right]}.$$

Quod attinet ad numeratores, habemus ex aequat. (20.) art. IV. substitutionibus (2.) factis:

$$\sqrt{\left(\frac{s_1^2-1}{r_1^2-1}\right)}\,\Pi_1 t^2 + \Pi_2 t^2 = P_2 t^2,$$

atque:

$$-r_1\sqrt{\left(\frac{s_1^2-1}{r_1^2-1}\right)}\,\Pi_1 t^2 - s_1 \Pi_2 t^2 = P_2 t^2,$$

unde sequitur:

$$6. \quad \begin{cases} \Pi_1 t^2 = \quad (s_1 P_1 t^2 + P_2 t^2)\sqrt{\left(\frac{r_1^2-1}{s_1^2-1}\right)}\left(\frac{1}{s_1-r_1}\right), \\ \Pi_2 t^2 = -(r_1 P_1 t^2 + P_2 t^2)\left(\frac{1}{s_1-r_1}\right). \end{cases}$$

Iam vero cum fuerit ex aequat. (17.) art. IV. substitutione (4.) facta:

$$F_1 v^2 = F_1\left(\frac{r_1^2-1}{s_1^2-1}\cdot\frac{1-s_1^2 t^2}{1-r_1^2 t^2}\right) = \Pi_1 t^2,$$

$$F_2 v^2 = F_2\left(\frac{r_1^2-1}{s_1^2-1}\cdot\frac{1-s_1^2 t^2}{1-r_1^2 t^2}\right) = \Pi_2 t^2,$$

sequitur, aequat. (6.) attractis fore:

$$7. \quad \begin{cases} F_1 v^2 = \quad (s_1 P_1 t^2 + P_2 t^2)\sqrt{\left(\frac{r_1^2-1}{s_1^2-1}\right)}\left(\frac{1}{s_1-r_1}\right), \\ F_2 v^2 = -(r_1 P_1 t^2 + P_2 t^2)\left(\frac{1}{s_1-r_1}\right). \end{cases}$$

Contra introducta inversa transformatione, ubique $r$, $s$, $a$ cum $r_1$, $s_1$, $a_1$ commutatis, atque $t$ cum $v$, hunc numeratorem, ex aequat. (20.) art. IV. deducimus:

$$8. \quad (s_1 P_1 t^2 + P_2 t^2) - \sqrt{\left(\frac{s_1^2-1}{r_1^2-1}\right)}(r_1 P_1 t^2 + P_2 t^2)\, v,$$

ubi loco functionum:

$$P_1 t^2, \quad P_2 t^2,$$

hae sunt ponendae secundum aequat. (4.):

$$P_1\left[\left(\frac{r^2-1}{s^2-1}\right)\left(\frac{1-s^2 v^2}{1-r^2 v^2}\right)\right] \quad \text{et} \quad P_2\left[\left(\frac{r^2-1}{s^2-1}\right)\left(\frac{1-s^2 v^2}{1-r^2 v^2}\right)\right],$$

si totam expressionem ad functionem argumenti $v$ vellemus. Qua numeratoris expressione cum formulis (7.) collata, invenimus, numeratorem transformationis inversae fore:

$$9. \quad \left[(s_1 - r_1)\sqrt{\left(\frac{s_1^2-1}{r_1^2-1}\right)}\right][F_1 v^2 + v F_2 v^2].$$

Huc accedit adhuc multiplicator $M$ (17. art. IV.), qui iisdem substitutionibus (2.) factis, sit:

$$10. \quad M = \sqrt{\left(\frac{s_1+r_1}{2s_1}\cdot\frac{1}{(r_1^2-1)(a_1^2-s_1^2)}\right)}.$$

Quibus collatis nanciscimur ex aequat. (21.) hanc:

$$11. \quad \int\frac{(P_1t^2+tP_2t^2)\,dt}{\sqrt{[(1-t^2)(1-a_1^2t^2)(1-r_1t)(1-s_1t)]}}$$

$$= -e\varepsilon\frac{(s_1-r_1)}{r_1^2-1}\sqrt{\left(\frac{s_1+r_1}{2s_1}\cdot\frac{s_1^2-1}{a_1^2-s_1^2}\right)}\left[\int\frac{(F_1v_1^2+v_1F_2v_1^2)\,dv_1}{\sqrt{[-(1-v_1^2)(1-a^2v_1^2)(1-rv_1)(1-sv_1)]}}\right.$$
$$\left.-\varepsilon\int\frac{(F_1v_2^2+v_2F_2v_2^2)\,dv_2}{\sqrt{[-(1-v_2^2)(1-a^2v_2^2)(1-rv_2)(1-sv_2)]}}\right]$$

signis $e$ et $\varepsilon$ simili ratione, ac in aequat. (14.) art. IV. determinatis.

Aequationes inter integralia definita inde ex hac generali formula, pro singularibus intervallis prodeuntes, cum iis, quae ex tabula nostra additione vel subtractione oriuntur, formula ex form. (10.) et (17.) art. IV.:

$$\frac{1}{2M} = \sqrt{\left(\frac{s}{(s+r)}\cdot\frac{(r^2-1)(a^2-s^2)}{2}\right)} = \frac{s_1-r_1}{(r_1^2-1)}\sqrt{\left(\frac{s_1+r_1}{2s_1}\cdot\frac{s_1^2-1}{a_1^2-s_1^2}\right)}$$

advocata, sponte optime congruunt.

## VI.

### De transformatione reciproca formae canonicae.

Iam vero quaestio oritur, quomodo ex transformatione modo proposita, ad transformationem integralis formae:

$$\int\frac{Fz.dz}{\sqrt{[(z)(1-z)(1-k^2z)(1-\lambda^2z)(1-\mu^2z)]}}$$

perveniamus. Quem ad finem in memoriam revocare placet diversas duodecim substitutiones art. II. commentationis memoratae, quas in formulis (14.) et (15.) articuli primi exposuimus.

Posito ibi $x = v$ et

$$\alpha_1 = +1,\quad \alpha_2 = +\frac{1}{r},\quad \alpha_3 = +\frac{1}{s},\quad \alpha_4 = +\frac{1}{a},\quad \alpha_5 = -\frac{1}{a},\quad \alpha_6 = -1,$$

et

$\alpha_\mu$ in ordinem $= \alpha_1,\ = \alpha_2,\ = \alpha_3,\ = \alpha_4,\ = \alpha_5,\ = \alpha_6,$

habemus has duodecim formulas, quibus adhibitis ab integrali

$$1. \quad \int\frac{(F_1v^2+vF_2v^2)\,dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}}$$

ad formam canonicam revenire licet.

2.

**Classis *A*.**

| | Limites ipsius $z$ | $0 \quad \dots$ | $1.$ |
|---|---|---|---|
| $z = \frac{r+1}{r-1}\cdot\frac{1-v}{1+v}$, | Limites ipsius $v$ | $1 \quad \dots$ | $\frac{1}{r}$. |
| $z = \frac{s-1}{s-r}\cdot\frac{1-rv}{1-v}$, | - - - - - | $\frac{1}{r} \quad \dots$ | $\frac{1}{s}$. |
| $z = \frac{a-r}{a-s}\cdot\frac{1-sv}{1-rv}$, | - - - - - | $\frac{1}{s} \quad \dots$ | $\frac{1}{a}$. |
| $z = \frac{a+s}{2a}\cdot\frac{1-av}{1-sv}$, | - - - - - | $\frac{1}{a} \quad \dots$ | $-\frac{1}{a}$. |
| $z = \frac{a+1}{a-1}\cdot\frac{av+1}{av-1}$, | - - - - - | $-\frac{1}{a} \quad \dots$ | $-1$. |
| $z = \frac{a-1}{2}\cdot\frac{v+1}{av+1}$, | - - - - - | $-1 \quad \dots$ | $+1$. |

**Classis *B*.**

| | Limites ipsius $z$ | $0 \quad \dots$ | $1.$ |
|---|---|---|---|
| $z = \frac{s-1}{r-1}\cdot\frac{1-rv}{1-sv}$, | Limites ipsius $v$ | $\frac{1}{r} \quad \dots$ | $1$. |
| $z = \frac{a-r}{s-r}\cdot\frac{1-sv}{1-av}$, | - - - - - | $\frac{1}{s} \quad \dots$ | $\frac{1}{r}$. |
| $z = \frac{a+s}{a-s}\cdot\frac{1-av}{1+av}$, | - - - - - | $\frac{1}{a} \quad \dots$ | $\frac{1}{s}$. |
| $z = \frac{a+1}{2a}\cdot\frac{1+av}{1+v}$, | - - - - - | $-\frac{1}{a} \quad \dots$ | $+\frac{1}{a}$. |
| $z = \frac{1+a}{1-a}\cdot\frac{1+v}{1-v}$, | - - - - - | $-1 \quad \dots$ | $-\frac{1}{a}$. |
| $z = \frac{r+1}{2}\cdot\frac{1-v}{1-rv}$, | - - - - - | $+1 \quad \dots$ | $-1$. |

Inde duodecim modis, sicut iam in primo articulo diximus, integrale formae:

$$\int \frac{Fz\, dz}{\sqrt{[z(1-z)(1-k^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)]}}$$

in aggregatum duorum integralium superioris formae transformatur, si in formulis:

$$3. \quad t_1 = \sqrt{\left(\frac{r^2-1}{s^2-1}\right)}\sqrt{\left(\frac{1-s^2v^2}{1-r^2v^2}\right)}, \quad t_2 = -\sqrt{\left(\frac{r^2-1}{s^2-1}\right)}\sqrt{\left(\frac{1-s^2v^2}{1-r^2v^2}\right)},$$

loco ipsius $v$ valores ex duodecim formulis prodeuntes substituamus, quantitatesque $r$, $s$, $a$ ex modulis, quos ut datos supponimus, $k$, $\lambda$, $\mu$, determinemus. Iam vero facile intelligitur, has omnes duodecim transformationes, ex una qualibet earum, substitutionibus duodecim fundamentalibus,

art. III. commentationis memoratae, quarum formulas in art. I., 10. proposuimus, adhibitis, ita ut singuli cuiusque integralis fundamentalis modulos ut datos supponamus, quantitatesque $k$, $\lambda$, $\mu$ per illos expressas, in una illa substitutione introducamus, eodem modo derivari posse. Adiiciamus adhuc necesse est, transformationem, ad quam pervenire velimus, talem esse debere, ut intervallum $0-1$ quam commodissimo continuato calculo convergenti determinari possit; quam ob rem tales superiorum formularum omittere licebit, quarum intervalla argumentorum $t_1$ et $t_2$ cum intervallo $0-1$ cohaerentia imaginaria sunt, quippe quae per fundamentales substitutiones ad reales reduci nequeunt. Itaque secunda atque quinta utriusque classis formula extemplo negligi debet, ut ex tabula in art. IV. desumitur, quae docet, intervalla:

$$\frac{1}{r}\ \ldots\ \frac{1}{s}, \qquad\qquad -\frac{1}{a}\ \ldots\ -1,$$

exprimi per intervalla:

$$\pm i\infty\ \ldots\ 0, \qquad \pm\frac{1}{a_1}\ \ldots\ 0, \quad 0\ \ldots\ \pm i\infty, \quad \pm\infty\ \ldots\ \pm 1$$

Primam igitur formam prioris classis, quippe quae omnium simplicissima est, adhibeamus:

$$z = \left(\frac{r+1}{r-1}\right)\left(\frac{1-v}{1+v}\right),$$

in integrali:

$$\int\frac{(F_1 v^2 + v F_2 v^2)\,dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2 v^2)(1-rv)(1-sv)]}}.$$

Habemus ex prima substitutione classis *A.* (art. II. comment. allatae)

$$5.\quad k^2 = \left(\frac{r-1}{r+1}\right)\left(\frac{s+1}{s-1}\right),\quad \lambda^2 = \left(\frac{r-1}{r+1}\right)\left(\frac{a+1}{a-1}\right),\quad \mu^2 = \left(\frac{r-1}{r+1}\right)\left(\frac{a-1}{a+1}\right),$$

unde sequitur, cum $t > s > r$ esse debeat, fore:

$$6.\quad r = \frac{1+\lambda\mu}{1-\lambda\mu},\quad s = \frac{k^2+\lambda\mu}{k^2-\lambda\mu},\quad a = \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu},$$

$$7.\quad z = \frac{1}{\lambda\mu}\left(\frac{1-v}{1+v}\right),\quad v = \frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z},$$

$$8.\quad (1-v^2)(1-a^2 v^2)(1-rv)(1-sv)$$
$$= (-1)^3\left[\frac{64\lambda^4\mu^4}{(1-\lambda\mu).(k^2-\lambda\mu).(\lambda-\mu)^2}\right]\left[\frac{z.1-z.1-k^2 z.1-\lambda^2 z.1-\mu^2 z}{(1+\lambda\mu z)^6}\right],$$

$$9.\quad dv = \frac{-2\lambda\mu\,dz}{(1+\lambda\mu z)^2},$$

$$10.\quad F_1 v^2 + v F_2 v^2 = F_1\left(\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\right)^2 + \frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}F_2\left(\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\right)^2.$$

Quibus omnibus formulis collatis, nanciscimur, posito:

$$11.\quad \begin{cases} F_1\left(\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\right)^2+\left(\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\right)F_2\left(\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\right)^2=\psi z, \\ \frac{\lambda-\mu}{4\lambda\mu}\sqrt{[(1-\lambda\mu)(k^2-\lambda\mu)]}=N, \end{cases}$$

hanc formulam:

$$12.\quad \frac{e_1 N.\psi z(1+\lambda\mu z)\,dz}{\sqrt{[-(z)(1-z)(1-k^2z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)]}}=\frac{(F_1 v^2+vF_2 v^2)\,dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}},$$

ubi signum $e_1$ determinatur ut signum expressionis:

$$13.\quad \left[-\frac{1}{(1+\lambda\mu z)}\sqrt{\left(\frac{-z(1-z)(1-k^2z)(1-\lambda^2z)(1-\mu^2z)}{(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)}\right)}\right].$$

Eodem modo in integralibus:

$$\frac{P_1 t^2+t_1 P_2 t_1^2)\,dt}{\sqrt{[-(1-t^2)(1-a_1^2t^2)(1-r_1 t)(1-s_1 t)]}}$$

substitutionem similem:

$$14.\quad y=\frac{r_1+1}{r_1-1}\cdot\frac{1-t}{1+t},$$

facientes, nanciscimur, modulis per $c$, $l$, $m$ significatis:

$$15.\quad c^2=\left(\frac{r_1-1}{r_1+1}\right)\left(\frac{s_1+1}{s_1-1}\right),\quad l^2=\left(\frac{r_1-1}{r_1+1}\right)\left(\frac{a_1+1}{a_1-1}\right),\quad m^2=\left(\frac{r_1-1}{r_1+1}\right)\left(\frac{a_1-1}{a_1+1}\right).$$

Iam vero ex aequat. (2.) art. V. valoribus ipsorum $r_1$, $s_1$, $a_1$, desumtis, fit:

$$16.\quad \begin{cases} \frac{r_1-1}{r_1+1}=\frac{r\sqrt{(s^2-1)}-s\sqrt{(r^2-1)}}{r\sqrt{(s^2-1)}+s\sqrt{(r^2-1)}},\quad \frac{s_1+1}{s_1-1}=\frac{\sqrt{(s^2-1)}+\sqrt{(r^2-1)}}{\sqrt{(s^2-1)}-\sqrt{(r^2-1)}}, \\ \frac{a_1-1}{a_1-1}=\frac{\sqrt{(s^2-1)}\sqrt{(a^2-r^2)}-\sqrt{(r^2-1)}\sqrt{(a^2-s^2)}}{\sqrt{(s^2-1)}\sqrt{(a^2-r^2)}+\sqrt{(r^2-1)}\sqrt{(a^2-s^2)}}, \end{cases}$$

ibique valoribus quantitatum $r$, $s$, $a$, (6.) introductis:

$$17.\quad \frac{r_1-1}{r_1+1}=\frac{(1-k)(k-\lambda\mu)}{(1+k)(k+\lambda\mu)},\quad \frac{s_1+1}{s_1-1}=\frac{(1+k)(k-\lambda\mu)}{(1-k)(k+\lambda\mu)},\quad \frac{a_1-1}{a_1+1}=\frac{k\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k}{k\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k},$$

ubi rursus positae sunt denotationes:

$$\sqrt{(1-\lambda^2)}=\lambda_1,\quad \sqrt{(1-\mu^2)}=\mu_1,\quad \sqrt{(k^2-\lambda^2)}=\lambda_k,\quad \sqrt{(k^2-\mu^2)}=\mu_k.$$

Inde denique prodeunt ex aequat. (15.), hi novorum modulorum valores:

$$18.\quad \begin{cases} c^2=\left(\frac{k-\lambda\mu}{k+\lambda\mu}\right)^2,\quad l^2=\frac{(1-k)(k-\lambda\mu)(k\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k)}{(1+k)(k+\lambda\mu)(k\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k)}, \\ m^2=\frac{(1-k)(k-\lambda\mu)(k\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k)}{(1+k)(k+\lambda\mu)(k\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k)}. \end{cases}$$

Iam rursus relationem inter modulos $c$, $l$, $m$, et $k$, $\lambda$, $\mu$, reciprocam esse, aeque ac relatio fuerit inter quantitates $r_1$, $s_1$, $a_1$, et $r$, $s$, $a$, ex his aequationibus patet:

$$19.\quad \begin{cases} c = \frac{k-\lambda\mu}{k+\lambda\mu}, \quad lm = \frac{(1-k)(k-\lambda\mu)}{(1+k)(k+\lambda\mu)}, \quad l_1 m_1 = \frac{2k(\lambda+\mu)}{(1+k)(k+\lambda\mu)}, \\ k = \frac{c-lm}{c+lm}, \quad \lambda\mu = \frac{(1-c)(c-lm)}{(1+c)(c+lm)}, \quad \lambda_1\mu_1 = \frac{2c(l+m)}{(1+c)(c+lm)}, \end{cases}$$

$$l_c m_c = \frac{k-\lambda\mu}{k+\lambda\mu}\cdot\frac{2k(\lambda-\mu)}{(1+k)(k+\lambda\mu)}, \quad \lambda_k\mu_k = \frac{(c-lm)}{(c+lm)}\cdot\frac{2c(l-m)}{(1+c)(c+lm)}.$$

quae facile, altera series ex altera, deducuntur. Habemus igitur formulis (17.) et (19.) in aequat. (14.) substitutis:

$$20.\quad y = \frac{(1+k)(k+\lambda\mu)}{(1-k)(k-\lambda\mu)}\cdot\frac{1-t}{1+t} = \frac{1}{lm}\cdot\frac{1-t}{1+t},$$

unde sequitur:

$$21.\quad t = \frac{1-lmy}{1+lmy}.$$

atque posito:

$$22.\quad P_1\left(\frac{1-lmy}{1+lmy}\right)^2 + \left(\frac{1-lmy}{1+lmy}\right)P_2\left(\frac{1-lmy}{1+lmy}\right)^2 = \psi_1 y,$$

$$23.\quad N_1 = \frac{l-m}{4lm}\sqrt{[(1-lm)(c^2-lm)]},$$

$$24.\quad \frac{-e_2 N_1 \psi_1 y(1+lmy)\,dy}{\sqrt{[y(1-y)(1-c^2y)(1-l^2y)(1-m^2y)]}} = \frac{(P_1 t^2 + tP_2 t^2)\,dt}{\sqrt{[-(1-t^2)(1-a_1^2t^2)(1-r_1 t)(1-s_1 t)]}},$$

ubi signum $e_2$ congruit cum signo expressionis:

$$25.\quad \left(\frac{1}{1+lmy}\right)\sqrt{\left(\frac{y(1-y)(1-c^2y)(1-l^2y)(1-m^2y)}{-(1-t^2)(1-a_1^2t^2)(1-r_1t)(1-s_1t)}\right)}.$$

Si formulas (6.), (7.), (21.) in formulis (3.) substituamus, duabus substitutionibus coniunctis, adipiscimur has formulas:

$$\left(\frac{1-lmy_1}{1+lmy_1}\right) = \frac{k^2-\lambda\mu}{k(1-\lambda\mu)}\sqrt{\left(\frac{1-\left(\frac{k^2+\lambda\mu}{k^2-\lambda\mu}\right)^2\left(\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\right)^2}{1-\left(\frac{1+\lambda\mu}{1-\lambda\mu}\right)^2\left(\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\right)^2}\right)} = -\left(\frac{1-lmy_2}{1+lmy_2}\right),$$

sive:

$$26.\quad \left(\frac{1-lmy_1}{1+lmy_1}\right) = \sqrt{\left(\frac{(1-k^2z)\left(1-\frac{\lambda^2\mu^2}{k^2}z\right)}{(1-z)(1-\lambda^2\mu^2z)}\right)} = -\left(\frac{1-lmy_2}{1+lmy_2}\right),$$

ubi argumenta singula $y$, quae argumentis $t_1$ et $t_2$ correspondent, per $y_1$ et $y_2$ denotata sunt. Ex formulis vero (12.) et (24.) et formula (21.) art. IV. hanc adipiscimur integralium comparationem:

$$27.\quad \int\frac{e_1 N(1+\lambda\mu z)\psi z\,dz}{\sqrt{[-z(1-z)(1-k^2z)(1-\lambda^2z)(1-\mu^2z)]}}$$

$$= -eeMN_1\left[\int\frac{e_2(1+lmy_1)\psi_1 y_1\,dy_1}{\sqrt{[y_1(1-y_1)(1-c^2y_1)(1-l^2y_1)(1-m^2y_1)]}}\right.$$

$$\left.-\int\frac{ee_3(1+lmy_2)\psi_1 y_2\,dy_2}{\sqrt{[y_2(1-y_2)(1-c^2y_2)(1-l^2y_2)(1-m^2y_2)]}}\right],$$

ubi signa $e_2$ et $e_3$ congruunt respective cum signis expressionis (25.), ibi $y_1$ et $y_2$ substitutis; signa $e$ et $\varepsilon$ per (4.) art. IV. determinantur, quantitas $M$ hac formula exhibetur:

$$28. \quad M = \frac{(\lambda-\mu)(k^2-\lambda\mu)}{4\lambda\mu}\sqrt{\left(\frac{(k^2-\lambda^2\mu^2)(1-\lambda\mu)}{(k^2+\lambda\mu)(k^2-\lambda^2)(k^2-\mu^2)}\right)}.$$

Quantitates $N$, $\psi z$, $c$, $l$, $m$, $N_1$, $\psi_1 y_1$, $\psi_1 y_2$ ex formulis (11.), (19.), (22.), (23.) desumuntur.

Iam vero de limitibus argumentorum integralium (27.) disserendum est, quem ad finem intervalla:

$$-\infty \ldots\ldots 0 \ldots\ldots 1 \ldots\ldots \frac{1}{k^2} \ldots\ldots \frac{1}{\lambda^2} \ldots\ldots \frac{1}{\mu^2} \ldots\ldots \infty,$$

$$-\infty \ldots\ldots 0 \ldots\ldots 1 \ldots\ldots \frac{1}{c^2} \ldots\ldots \frac{1}{l^2} \ldots\ldots \frac{1}{m^2} \ldots\ldots \infty,$$

in utroque integrali respective primum, secundum etc. vocemus.

Limites arg. $z$: $-\infty$, $0$, $1$, $\frac{1}{k^2}$, $\frac{1}{\lambda^2}$, $\frac{1}{\mu^2}$, $\frac{k^2}{\lambda^2\mu^2}$, $\frac{1}{\lambda^2\mu^2}$,
cohaerent cum
his limitibus arg. $v$: $-1$, $+1$, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{s}$, $-\frac{1}{r}$.

Limites arg. $y$: $-\infty$, $0$, $1$, $\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{l^2}$, $\frac{1}{m^2}$, $\frac{c^2}{l^2m^2}$, $\frac{1}{l^2m^2}$,
cohaerent cum
his limitibus arg. $t$: $-1$, $+1$, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{a_1}$, $-\frac{1}{s_1}$, $-\frac{1}{r_1}$.

Ergo ex tabula art. IV. sequitur integralis dati intervallum

28. {
- primum exprimi per intervalla: 2 et $\frac{1}{\lambda^2\mu^2} \ldots\ldots \infty$;
- secundum - - - - - 1;
- tertium - - - - - per intervallum imaginarium;
- quartum - - - - - 5;
- quintum - - - - - 4 et $\frac{c^2}{l^2m} \ldots\ldots \frac{1}{m^2}$;
- sextum - - - - - 5 et intervallum imaginarium et 1.

Dum enim argumentum $z$ per intervalla:

$$-\infty,\ -\frac{1}{\lambda\mu},\ 0,\ 1,\ \frac{1}{k^2},\ \frac{1}{\lambda^2},\ \frac{1}{\lambda\mu},\ \frac{1}{\mu^2},\ \frac{k^2}{\lambda^2\mu^2},\ \frac{1}{\lambda^2\mu^2},\ \infty$$

pergit, argumentum $y_1$ ita progreditur:

$$29. \quad 0,\ 1,\ 0,\ -\frac{1}{lm}\ \text{imag.}\ \frac{1}{lm},\ \frac{1}{l^2},\ \frac{1}{c^2},\ \frac{1}{k^2},\ \frac{1}{lm}\ \text{imag.}\ -\frac{1}{lm},\ 0,$$

atque argumentum $y_2$ ita:

$$\infty,\ \frac{1}{l^2m^2},\ \infty,\ -\frac{1}{lm}\ \text{imag.}+\frac{1}{lm},\ \frac{1}{m^2},\ \frac{c^2}{l^2m^2},\ \frac{1}{m^2},\ \frac{1}{lm}\ \text{imag.}-\frac{1}{lm},\ \infty.$$

Formulis ex (19.) sequentibus:

$$\frac{k^2-\lambda\mu}{k(1-\lambda\mu)}=\frac{c^2-lm}{c^2+lm},\quad \frac{k^2-\lambda\mu}{k^2+\lambda\mu}=\frac{c^2-lm}{c(1-lm)},\quad \frac{1-\lambda\mu}{1+\lambda\mu}=\frac{c^2+lm}{c(1+lm)},$$

adiuti, videmus substitutionem nostram reciprocam esse, et fore:

$$30.\qquad \left(\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\right)^2=\frac{(c^2-lm)^2}{c^2(1-lm)^2}\left(\frac{1-\left(\frac{c^2+lm}{c^2-lm}\right)^2\left(\frac{1-lmy}{1+lmy}\right)^2}{1-\left(\frac{1+lm}{1-lm}\right)^2\left(\frac{1-lmy}{1+lmy}\right)^2}\right).$$

## VII.

De transformationibus formae canonicae, ubi argumenta $z$ et $y_1$ simul in intervallo $0-1$ iacent.

Iam vero transformationem hanc reciprocam ita commutemus necesse erit, ut utriusque integralis argumenta $z$ et $y_1$ intra intervallum: $0-1$ contineantur, adeo ut directam utriusque integralis comparationem adipiscamur. Quem finem octo diversis rationibus nanciscimur, transformationibus fundamentalibus (11.) art. I. adiuti. Nimirum primum argumenta $y_1$ et $y_2$ per sextam utriusque classis transformationem commutemus, simulque argumentum $z$ per utramlibet primam utriusque classis. Inde quatuor emanabunt transformationes ea simili natura gaudentes, ut utrumque argumentum: $y_1$ et $y_2$ in eodem secundo eiusdem integralis intervallo iaceat, dum $z$ in secundo contineatur. Tum vero argumentum $z$ per sextam utriuslibet classis transformationem commutare licet, simulque utrumque argumentum $y$ per primam utriuslibet classis, unde rursus quatuor transformationes derivantur eadem natura gaudentes, ut alterum argumentum $y$ in secundo, alterum in sexto eiusdem integralis intervallo iaceat, dum $z$ in secundo contineatur.

Itaque hanc octo transformationum tabulam composuimus, ubi per $z$, $k$, $\lambda$, $\mu$, integralis dati atque per $y_1 y_2$ $c$, $l$, $m$ integralium novorum argumenta et moduli denotantur; brevitatis gratia haec signa adhuc introduximus:

$$\sqrt{(k^2-\lambda^2)}=\lambda_k,\qquad \sqrt{(k^2-\mu^2)}=\mu_k,\qquad \sqrt{(\lambda^2-\mu^2)}=\mu_l,$$
$$\sqrt{(1-k^2)}=k_1,\qquad \sqrt{(1-\lambda^2)}=\lambda_1,\qquad \sqrt{(1-\mu^2)}=\mu_1,$$
$$\sqrt{(c^2-l^2)}=l_c,\qquad \sqrt{(c^2-m^2)}=m_c,\qquad \sqrt{(l^2-m^2)}=m_l,$$
$$\sqrt{(1-c^2)}=c_1,\qquad \sqrt{(1-l^2)}=l_1,\qquad \sqrt{(1-m^2)}=m_1.$$

**I. Argumentum $z$ per primam classis $A$. substitutionem, et argumenta $y$ per sextam classis $B$. commutantur.**

**Formulae:**

$$\frac{1-(1-l_1c_1)y_1}{1-(1+l_1c_1)y_1} = \sqrt{\left(\frac{(1-k^2z)\left(1-\frac{\lambda^2\mu^2}{k^2}z\right)}{(1-z)(1-\lambda^2\mu^2z)}\right)} = -\frac{1-(1-l_1c_1)y_2}{1-(1+l_1c_1)y_2}.$$

**Moduli:**

$$c_1^2 = \frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{k-\lambda\mu}{k+\lambda\mu}\cdot\frac{k\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k}{k\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k}, \qquad l_1^2 = \frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{k-\lambda\mu}{k+\lambda\mu}\cdot\frac{k\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k}{k\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k},$$

$$m_1^2 = \left(\frac{k-\lambda\mu}{k+\lambda\mu}\right)^2.$$

**Limites:**

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Interv. $z$: | $-\infty$, | $-\frac{1}{\lambda\mu}$, | 0, | 1, | | $\frac{1}{k^2}$, | $\frac{1}{\lambda^2}$, | $\frac{1}{\lambda\mu}$, | $\frac{1}{\mu^2}$, | $\frac{k^2}{\lambda^2\mu^2}$, | | $\frac{1}{\lambda^2\mu^2}$, | $\infty$. |
| - - $y_1$: | 0, | $\mp\infty$, | 0, | $\frac{1}{1+l_1c_1}$ | imag. | $\frac{1}{1-l_1c_1}$, | $\frac{1}{l^2}$, | $\frac{1}{m^2}$, | $\frac{1}{l^2}$, | $\frac{1}{1-l_1c_1}$ | imag. | $\frac{1}{1+l_1c_1}$, | 0. |
| - - $y_2$: | 1, | $\frac{1}{1-l_1^2c_1^2}$, | 1, | $\frac{1}{1+l_1c_1}$ | imag. | $\frac{1}{1-l_1c_1}$, | $\frac{1}{c^2}$, | $\frac{m^2}{m_1^2-c_1^2l_1^2}$, | $\frac{1}{c^2}$, | $\frac{1}{1-l_1c_1}$ | imag. | $\frac{1}{1+l_1c_1}$, | 1. |

---

**II. Argumentum $z$ rursus per primam classis $A$. substitutionem, atque argumenta $y$ per sextam classis $A$. commutantur.**

**Formulae:**

$$\frac{1-(1-m_1)y_1}{1-(1+m_1)y_1} = -\sqrt{\left(\frac{(1-k^2z)\left(1-\frac{\lambda^2\mu^2}{k^2}\right)z}{(1-z)(1-\lambda^2\mu^2z)}\right)} = -\frac{1-(1-m_1)y_2}{1-(1+m_1)y_2},$$

**Moduli:**

$$c_1^2 = \frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{k-\lambda\mu}{k+\lambda\mu}\cdot\frac{k\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k}{k\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k},$$

$$l_1^2 = \frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{k+\lambda\mu}{k-\lambda\mu}\cdot\frac{k\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k}{k\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k},$$

$$m_1^2 = \frac{k\lambda_1\mu-\lambda_k\mu_k}{k\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k}.$$

**Limites:**

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Interv. $z$: | $-\infty$, | $-\frac{1}{\lambda\mu}$, | 0, | 1, | | $\frac{1}{k^2}$, | $\frac{1}{\lambda^2}$, | $\frac{1}{\lambda\mu}$, | $\frac{1}{\mu^2}$, | $\frac{k^2}{\lambda^2\mu^2}$, | | $\frac{1}{\lambda^2\mu^2}$, | $\infty$. |
| - - $y_1$: | 1, | $\frac{1}{c^2}$, | 1, | $\frac{1}{1+m}$ | imag. | $\frac{1}{1-m}$, | $-\frac{1}{m^2}$, | $-\frac{1}{l^2}$, | $\frac{1}{m^2}$, | $\frac{1}{1-m_1}$ | imag. | $\frac{1}{1+m_1}$, | $-1$. |
| - - $y_2$: | 0, | $-\frac{c^2}{c^2-m^2}$, | 0, | $\frac{1}{1+m_1}$ | imag. | $\frac{1}{1-m_1}$, | $-\infty$, | $-\frac{l^2}{l^2-m^2}$, | $\infty$, | $\frac{1}{1-m_1}$ | imag. | $\frac{1}{1+m_1}$, | $-0$. |

---

**III. Argumentum $z$ per primam classis $B$. transformationem, et argumenta $y$ per sextam (classis B.) transformantur.**

**Formulae:**

$$\frac{1-(1-a_1 l_1)y_1}{1-(1+c_1 l_1)y_1} = \frac{1}{k}\sqrt{\left(\frac{(k^2-\lambda^2\mu^2)-(k^2-k^2\lambda^2\mu^2-\lambda_k^2\mu_k^2)z}{z(k^2-\lambda^2\mu^2+\lambda_1^2\mu_1^2)-(k^2-\lambda^2\mu^2)z}\right)} = -\frac{1-(1-c_1 l_1)y_2}{1-(1+c_1 l_1)y_2}.$$

**Moduli:**

$$c_1^2 = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)\left(\frac{k-\lambda\mu}{k+\lambda\mu}\right)\left(\frac{k\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k}{k\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k}\right),$$

$$l_1^2 = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)\left(\frac{k+\lambda\mu}{\lambda-\lambda\mu}\right)\left(\frac{k\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k}{k\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k}\right),$$

$$m_1^2 = \left(\frac{k\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k}{k\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k}\right)^2.$$

**Limites:**

Interv. $z$: $-\infty,\quad 0,\quad 1,\quad \frac{\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k}{k^2\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k},\quad \frac{1}{k^2},\quad \frac{\lambda_1^2\mu_1^2-\lambda_k^2\mu_k^2}{\lambda_1^2\mu_1^2+\lambda_k^2\mu_k^2},\quad \frac{k^2\lambda_1^2\mu_1^2-\lambda_k^2\mu_k^2}{k^2\lambda_1^2\mu_1^2-\lambda_k^2\mu_k},\quad \frac{1}{\lambda^2},\quad \frac{\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k}{k^2\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k},\quad \frac{1}{\mu^2}.$

- - $y_1$: $\frac{1}{1-c_1 l_1}$ im. $\frac{1}{1+c_1 l_1},\quad 0,\quad \begin{matrix}-\infty\\+\infty\end{matrix}\quad 0,\quad \frac{1}{1+l_1 c_1},\quad$ im. $\frac{1}{1-l_1 c_1},\quad \frac{1}{l^2},\quad \frac{1}{m^2},\quad \frac{1}{l^2}.$

- - $y_2$: $\frac{1}{1-l_1 c_1}$ im. $\frac{1}{1+l_1 c_1},\quad 1,\quad \frac{1}{1-c_1^2 l_1^2},\quad 1,\quad \frac{1}{1+l_1 c_1},\quad$ im. $\frac{1}{1-l_1 c_1},\quad \frac{1}{c^2},\quad \frac{m_1^2}{m_1^2-c_1^2 l_1^2},\quad \frac{1}{c^2}.$

---

**IV. Argumentum $z$ per primam (classis $B$.) transformationem, atque argumenta $y$ per sextam (classis $A$.) transformantur.**

**Formulae:**

$$-\frac{1-(1-m_1)y_1}{1-(1+m_1)y_1} = \frac{1}{k}\sqrt{\left(\frac{(k^2-\lambda^2\mu^2)-k^2(k^2-\lambda^2\mu^2)-\lambda_k^2\mu_k^2 z}{z[(k^2-\lambda^2\mu^2+\lambda_1^2\mu_1^2)-(k^2-\lambda^2\mu^2)z]}\right)} = \frac{1-(1-m_1)y_2}{1-(1+m_1)y_2}.$$

**Moduli:**

$$c_1^2 = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)\left(\frac{k-\lambda\mu}{k+\lambda\mu}\right)\left(\frac{k\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k}{k\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k}\right),$$

$$l_1^2 = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)\left(\frac{k-\lambda\mu}{k+\lambda\mu}\right)\left(\frac{k\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k}{k\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k}\right),$$

$$m^2 = \left(\frac{k-\lambda\mu}{k+\lambda\mu}\right)^2.$$

**Limites:**

Interv. $z$: $\infty,\quad 0,\quad 1,\quad \frac{\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k}{k^2\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k},\quad \frac{1}{k^2},\quad \frac{\lambda_1^2\mu^2-\lambda_k^2\mu_k^2}{\lambda_1^2\mu^2+\lambda_k^2\mu_k^2},\quad \frac{k^2\lambda_1^2\mu_1^2-\lambda_k^2\mu_k^2}{k^2\lambda_1^2\mu_1^2-\lambda_k^2\mu_k^2},\quad \frac{1}{\lambda^2},\quad \frac{\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k}{k^2\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k},\quad \frac{1}{\mu^2}.$

- - $y_1$: $\frac{1}{1-m_1}$ im. $\frac{1}{1+m},\quad 1,\quad \frac{1}{c^2}\quad 1,\quad \frac{1}{1+m_1},\quad$ im. $\frac{1}{1-m_1},\quad \frac{1}{m^2},\quad \frac{1}{l^2},\quad \frac{1}{m^2}.$

- - $y_2$: $\frac{1}{1-m_1}$ im. $\frac{1}{1+m_1},\quad 0,\quad -\frac{c_1^2}{c^2-m^2},\quad 0,\quad \frac{1}{1+m_1},\quad$ im. $\frac{1}{1-m_1},\quad \infty,\quad -\frac{l_1^2}{l^2-\mu^2},\quad \infty$

---

**V.** **Argumentum $z$ per sextam transformationem classis $B.$, atque argumenta $y$ per primam classis $A.$ transformantur.**

**Formulae:**

$$\frac{1-lmy_1}{1+lmy_1} = \sqrt{\left(\frac{(1-\mu^2 z)\left(1-\frac{\mu_1^2-k_1^2\lambda_1^2}{\mu_1^2}z\right)}{[1-(1-k_1^2\lambda_1^2)z]}\right)} = -\frac{1-lmy_2}{1+lmy_2}.$$

**Moduli:**

$$c^2 = \left(\frac{\mu_1-k_1\lambda_1}{\mu_1+k_1\lambda_1}\right)^2, \qquad l^2 = \left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)\left(\frac{\mu_1-k_1\lambda_1}{\mu_1+k_1\lambda_1}\right)\left(\frac{\mu_1 k\lambda+\mu_\lambda\mu_k}{\mu_1 k\lambda-\mu_\lambda\mu_k}\right),$$

$$m^2 = \left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)\left(\frac{\mu_1-k_1\lambda_1}{\mu_1+k_1\lambda_1}\right)\left(\frac{\mu_1 k\lambda-\mu_\lambda\mu_k}{\mu_1 k\lambda+\mu_\lambda\mu_k}\right).$$

**Limites:**

$$\begin{array}{llllllllllll}
\text{Interv. } z: & -\infty, & 0, & \frac{1}{1+k_1\lambda_1}, & 1, & \frac{1}{1-k_1^2\lambda_1^2}, & \frac{\mu_1^2}{\mu_1^2-k_1^2\lambda_1^2}, & \frac{1}{k^2}, & \frac{1}{1-k_1\lambda_1}, & \frac{1}{\lambda^2}, & \frac{1}{\mu^2}. & \\
\text{- - } y_1: & -\frac{1}{lm}, & 0, & 1, & 0, & -\frac{1}{lm} \text{ im.} & \frac{1}{lm}, & \frac{1}{l^2}, & \frac{1}{c^2}, & \frac{1}{l^2}, & \frac{1}{lm} & \text{imag.} \\
\text{- - } y_2: & -\frac{1}{lm}, & \infty, & \frac{1}{l^2m^2}, & \infty, & -\frac{1}{lm} \text{ im.} & \frac{1}{lm}, & \frac{1}{m^2}, & \frac{c^2}{l^2m^2}, & \frac{1}{m^2}, & \frac{1}{lm} & \text{imag.}
\end{array}$$

---

**VI.** **Argumentum $z$ per sextam transformationem classis $A.$, atque argumenta $y$ per primam classis $A.$ transmutantur.**

**Formulae:**

$$\frac{1-lmy_1}{1+lmy_1} = \sqrt{\left(\frac{(1-\lambda^2 z)\left(1+\frac{\mu_1^2-\lambda_1^2}{\lambda_1^2}z\right)}{(1-k^2 z)\left(1+\frac{\mu_1^2-k_1^2}{k_1^2}z\right)}\right)} = -\frac{1-lmy_2}{1+lmy_2}.$$

**Moduli:**

$$c^2 = \left(\frac{\mu_1-k_1\lambda_1}{\mu_1+k_1\lambda_1}\right)^2, \qquad l^2 = \left(\frac{\lambda_1-k_1}{\lambda_1+k_1}\right)\left(\frac{\mu_1-k_1\lambda_1}{\mu_1+k_1\lambda_1}\right)\left(\frac{k\lambda_1\mu_k-\lambda k_1\mu_\lambda}{k\lambda_1\mu_k+\lambda k_1\mu_\lambda}\right),$$

$$m^2 = \left(\frac{\lambda_1-k_1}{\lambda_1+k_1}\right)\left(\frac{\mu-k\lambda}{\mu+k\lambda}\right)\left(\frac{k\lambda_1\mu_k-\lambda k_1\mu_\lambda}{k\lambda_1\mu_k+\lambda k_1\mu_\lambda}\right).$$

**Limites:**

$$\begin{array}{lllllllllll}
\text{Interv. } z: & -\infty, & -\frac{\lambda_1^2}{\mu_1^2-\lambda_1^2}, & -\frac{k_1^2}{\mu_1^2-k_1^2}, & 0, & \frac{1}{1+\mu}, & 1, & \frac{1}{k^2}, & \frac{1}{\lambda^2}, & \frac{1}{\mu^2}, & \frac{1}{1-\mu_1}. \\
\text{- - } y_1: & \frac{1}{l^2}, & \frac{1}{lm} \text{ im.} & -\frac{1}{lm}, & 0, & 1, & 0, & -\frac{1}{lm} \text{ im.} & \frac{1}{lm}, & \frac{1}{l^2}, & \frac{1}{c^2}. \\
\text{- - } y_2: & \frac{1}{m^2}, & \frac{1}{lm} \text{ im.} & -\frac{1}{lm}, & \infty, & \frac{1}{l^2m^2}, & \infty, & -\frac{1}{lm} \text{ im.} & \frac{1}{lm}, & \frac{1}{m^2}, & \frac{c^2}{lm}.
\end{array}$$

---

**VII. Argumentum $z$ per sextam transformationem classis $B.$, atque argumenta $y$ per primam classis $B.$ commutantur.**

**Formulae:**

$$\left(\frac{(l_1 m_1 - l_c m_c) - (c^2 l_1 m_1 - l_c m_c) y_1}{(l_1 m_1 + l_c m_c) - (c^2 l_1 m_1 + l_c m_c) y_1}\right) = \sqrt{\left(\frac{(1-\mu^2 z)\left(\frac{1-\mu_1^2-k_1^2\lambda_1^2}{\mu_1^2}\right)}{1-(1-k_1^2\lambda_1^2)z}\right)} = -\left(\frac{(l_1 m_1 - l_c m_c) - (c^2 l_1 m_1 - l_c m_c) y_2}{(l_1 m_1 + l_c m_c) - (c^2 l_1 m_1 + l_c m_c) y_2}\right).$$

**Moduli:**

$$c^2 = \left(\frac{\mu_1 - k_1\lambda_1}{\mu_1 + k_1\lambda_1}\right)^2, \qquad \frac{c^2-m^2}{1-m^2} = \left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)\left(\frac{\mu_1 - k_1\lambda_1}{\mu_1 + k_1\lambda_1}\right)\left(\frac{\mu_1 k\lambda + \mu_\lambda \mu_k}{\mu_1 k\lambda - \mu_\lambda \mu_k}\right),$$

$$\frac{c^2-l^2}{1-l^2} = \left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)\left(\frac{\mu_1 - k_1\lambda_1}{\mu_1 + k_1\lambda_1}\right)\left(\frac{\mu_1 k\lambda - \mu_\lambda \mu_k}{\mu_1 k\lambda - \mu_\lambda \mu_k}\right).$$

**Limites:**

Interv. ips. $z$: $\quad -\infty, \quad 0, \ \frac{1}{1+k_1\lambda_1}, \ 1, \ \frac{1}{1-k_1^2\lambda^2}, \quad \frac{\mu_1^2}{\mu_1^2-k_1^2\lambda_1^2}, \ \frac{1}{k^2}, \quad \frac{1}{1-k_1\lambda_1}, \quad \frac{1}{\lambda^2}, \quad \frac{1}{\mu^2},$

- - - $y_1$: $\frac{m_1 l_1 + l_c m_c}{c^2 m_1 l_1 + l_c m_c}, \ 1, \quad 0, \quad 1, \ \frac{m_1 l_1 + l_c m_c}{c^2 m_1 l_1 + l_c m_c}$ im. $\frac{m_1 l_1 - l_c m_c}{c^2 m_1 l_1 - l_c m_c}, \ \frac{1}{m^2}, \quad \infty \quad \frac{1}{m^2}, \ \frac{m_1 l_1 - l_c m_c}{c^2 m_1 l_1 - l_c m_c}.$

- - - $y_2$: $\frac{m_1 l_1 + l_c m_c}{c^2 m_1 l_1 + l_c m_c}, \ \frac{1}{c^2}, \left(\frac{l_1^2 m_1^2}{c^2 - l^2 m^2} + 1\right), \frac{1}{c^2}, \ \frac{m_1 l_1 + l_c m_c}{c^2 m_1 l_1 - l_c m_c}$ im. $\frac{m_1 l_1 - l_c m_c}{c^2 m_1 l_1 - l_c m_c}, \ \frac{1}{l^2}, \ \frac{c^2 - l^2 m^2}{c^2 - l^2 m^2 - c^2 l^2 m^2}, \ \frac{1}{l^2}, \ \frac{m_1 l_1 - l_c m_c}{c^2 m_1 l_1 - l_c m_c}.$

---

**VIII. Argumentum $z$ per sextam transformationem classis $A.$, atque argumenta $y$ per primam classis $B.$ commutantur.**

**Formulae:**

$$\frac{(l_1 m_1 - l_c m_c) - (c^2 l_1 m_1 - l_c m_c) y_1}{(l_1 m_1 + l_c m_c) - (c^2 l_1 m_1 + l_c m_c) y_1} = \sqrt{\left(\frac{(1-\lambda^2 z)\left(1+\frac{\mu_1^2-\lambda_1^2}{\lambda_1^2} z\right)}{(1-k^2 z)\left(1+\frac{\mu_1^2-k_1^2}{k_1^2} z\right)}\right)} = -\left(\frac{(l_1 m_1 - l_c m_c) - (c^2 l_1 m_1 - l_c m_c) y_2}{(l_1 m_1 - l_c m_c) - (c^2 l_1 m_1 + l_c m_c) y_2}\right).$$

**Moduli:**

$$c^2 = \left(\frac{\mu_1 - k_1\lambda_1}{\mu_1 + k_1\lambda_1}\right)^2, \qquad \frac{c^2-m^2}{1-m^2} = \left(\frac{\lambda_1 - k_1}{\lambda_1 + k_1}\right)\left(\frac{\mu_1 - k_1\lambda_1}{\mu_1 + k_1\lambda_1}\right)\left(\frac{k\lambda_1 \mu_k - \lambda k_1 \mu_\lambda}{k\lambda_1 \mu_k + \lambda k_1 \mu_\lambda}\right),$$

$$\frac{c^2-l^2}{1-l^2} = \left(\frac{\lambda_1 - k_1}{\lambda_1 + k_1}\right)\left(\frac{\mu_1 - k_1\lambda_1}{\mu_1 + k_1\lambda_1}\right)\left(\frac{k\lambda_1 \mu_k - \lambda k_1 \mu_\lambda}{k\lambda_1 \mu_k + \lambda k_1 \mu_\lambda}\right).$$

**Limites:**

Interv. $z$: $-\infty, \ -\frac{\lambda_1^2}{\mu_1^2-\lambda_1^2}, \quad -\frac{k^2}{\mu_1^2-k_1^2}, \ 0, \quad \frac{1}{1+\mu}, \quad 1, \quad \frac{1}{k^2}, \quad \frac{1}{\lambda^2}, \quad \frac{1}{\mu^2}, \ \frac{1}{1-\mu_1}.$

- - $y_1$: $\frac{1}{m^2}, \ \frac{m_1 l_1 - l_c m_c}{c^2 m_1 l_1 - l_c m_c}$, im. $\frac{m_1 l_1 + l_c m_c}{c^2 m_1 l_1 + l_c m_c}, \ 1, \quad 0, \quad 1, \ \frac{m_1 l_1 + l_c m_c}{c^2 m_1 l_1 + l_c m_c}$, im. $\frac{m_1 l_1 - l_c m_c}{c^2 m_1 l_1 - l_c m_c}, \ \frac{1}{m^2}, \ \infty.$

- - $y_2$: $\frac{1}{l^2}, \ \frac{m_1 l_1 - l_c m_c}{c^2 m_1 l_1 - l_c m_c}$, im. $\frac{m_1 l_1 + l_c m_c}{c^2 m_1 l_1 + l_c m_c}, \ \frac{1}{c^2}, \ \frac{l_1^2 m_1^2 - (c^2 - l^2 m^2)}{c^2 - l^2 m^2}, \ \frac{1}{c^2}, \ \frac{m_1 l_1 + l_c m_c}{c^2 m_1 l_1 + l_c m_c}$, im. $\frac{m_1 l_1 - l_c m_c}{c^2 m_1 l_1 - l_c m_c}, \ \frac{1}{l^2},$

$\frac{c^2 - l^2 m^2}{c^2 - l^2 m^2 - c^2 l_1^2 m_1^2}.$

---

## VIII.

### De ceteris transformationibus formae canonicae.

Qaecunque transformationes ex transformationibus fundamentalibus ceteris in transformatione art. IV. introductis, oriuntur, aut ea natura carent, ut utriusque integralis argumenta $z$ et $y$, intra intervallum 0—1 contineantur, aut cum his octo modo expositis prorsus congruunt. Id quod hic adhuc accuratius exponere placet. Ex art. IV. patet, ne ad intervalla imaginaria devehamur, argumenta $v$ et $t_1$ et $t_2$ nonnisi per transformationem I., III., IV., VI. utriusque classis, commutari posse. Ex definitionibus igitur tabulaque (28.) art. II. commentationis supra allatae nanciscimur hanc intervallorum tabulam:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intervalla ipsius $v$: . . . . | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, |
| cohaererent cum interv. ips. $t_1$: . . | 2, | 1, | imag. | 5, | 4, | imag., |
| et . . . . . . . . $t_2$: . . | 6, | 1, | imag. | 5, | 6, | imag., |

Illa intervalla ipsius $v$ fiunt:

| | | intervalla integralis formae canonicae. | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| per primam substitutionem cl. *A*.: . | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6. |
| per tertiam - - - cl. *A*.: . | 5, | 6, | 1, | 2, | 3, | 4, |
| per quartam - - - cl. *A*.: . | 4, | 5, | 6, | 1, | 2, | 3, |
| per sextam - - - cl. *A*.: . | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 1, |
| atque: | | | | | | |
| per primam substitutionem cl. *B*.: . | 3, | 2, | 1, | 6, | 5, | 4, |
| per tertiam - - - cl. *B*.: . | 5, | 4, | 3, | 2, | 1, | 6, |
| per quartam - - - cl. *B*.: . | 6, | 5, | 4, | 3, | 2, | 1, |
| per sextam - - - cl. *B*.: . | 2, | 1, | 6, | 5, | 4, | 3, |

Haec vero intervalla ipsius $t_1$ et $t_2$ respective per respondentes substitutiones ita commutantur, ut fiant, argumentis duobus novis per $y_1$ et $y_2$ designatis:

| | $y_1$, | $y_2$, | $y_1$, | $y_2$, | $y_1$, | $y_2$, | $y_1$, | $y_2$, | $y_1$, | $y_2$, | $y_1$, | $y_2$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| per sextam substitutionem cl. *A*.: | 3, | 1, | 2, | 2, | im., | im., | 6, | 6, | 5, | 1, | im., | im., |
| per quartam - - - cl. *A*.: | 5, | 3, | 4, | 4, | im., | im., | 2, | 2, | 1, | 3, | im., | im., |
| per tertiam - - - cl. *A*.: | 6, | 4, | 5, | 5, | im., | im., | 3, | 3, | 2, | 4, | im., | im., |
| per primam - - - cl. *A*.: | 2, | 6, | 1, | 1, | im., | im., | 5, | 5, | 4, | 6, | im., | im., |
| atque | | | | | | | | | | | | |
| per sextam substitutionem cl. *B*.: | 1, | 3, | 2, | 2, | im., | im., | 4, | 4, | 5, | 3, | im., | im., |
| per quartam - - - cl. *B*.: | 5, | 1, | 6, | 6, | im., | im., | 2, | 2, | 3, | 1, | im., | im., |
| per tertiam - - - cl. *B*.: | 4, | 6, | 5, | 5, | im., | im., | 1, | 1, | 2, | 6, | im., | im., |
| per primam - - - cl. *B*.: | 2, | 4, | 3, | 3, | im., | im., | 5, | 5, | 6, | 4, | im., | im. |

Inde clarum fit, quamque transformationem, quae ex $K$ta classis $A$. et $(7-K)$ta classis $A$. vel $B$. conflatur, congruere cum tali, quae ex $(K\pm 2)$ta classis $B$. atque $(7-K\mp 2)$ta classis $B$. vel classis $A$. conflata fuerit. Ubi superius vel inferius signum adhibendum est, prout ne ad secundam vel quintam utriusque classis transformationem devehamur. Inde clarius fit, ut finem propositum adipiscamur, argumento $v$ per I., III., IV., VI. utriuslibet classis transformato, argumenta $t_1$ et $t_2$ respective per VI., IV., III., I. utriusque classis transformanda esse; atque sedecim has transformationes ad octo diversas revenire. Iam porro adiiciamus, ad easdem transformationes nos pervenire, si in aequat. (15.) art. IV. ponamus:

$$\sqrt{\frac{m}{q}} = \sqrt{\left(\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}\right)}.$$

Quo facto, loco formularum (16.) art. IV. adipiscimur has:

$$3.\quad t^2 = \left(\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}\right).\left(\frac{1-s^2v^2}{1-r^2v^2}\right),$$

$$\Theta t = (1-t^2)\left(1-\frac{a^2-s^2}{a^2-r^2}.\frac{r^2-1}{s^2-1}\right)\left(1-\frac{r}{s}\sqrt{\left(\frac{a^2-s^2}{a^2-r^2}\right)}t\right)\left(1-\sqrt{\left(\frac{a^2-s^2}{a^2-r^2}\right)}t\right),$$

sive posito:

$$\sqrt{\left(\frac{a^2-s^2}{a^2-r^2}\right)}\sqrt{\left(\frac{r^2-1}{s^2-1}\right)} = a_{,,},\quad \frac{r}{s}\sqrt{\left(\frac{a^2-s^2}{a^2-r^2}\right)} = r_{,,},\quad \sqrt{\left(\frac{a^2-s^2}{a^2-r^2}\right)} = s_{,,},$$

hanc seriem

$$4.\quad \frac{1}{a_{,,}} > \frac{1}{r_{,,}} > \frac{1}{s_{,,}} > 1 > -1 > -\frac{1}{a_{,,}},$$

atque

$$\Theta t = (1-t^2)(1-a_{,,}^2 t^2)(1-r_{,,}t)(1-s_{,,}t).$$

Hic vero posito

$$5.\quad Y = \left(\frac{r_{,,}+a_{,,}}{r_{,,}-a_{,,}}\right)\left(\frac{1-a_{,,}t}{1+a_{,,}t}\right)$$

(quae ea duodecim substitutionum, ad seriem (4.) pertinentium, est, ubi, dum $v$ intra 1 et $\frac{1}{r}$ iacet, $Y$ in sexto integralis sui intervallo ab 0 proficiscitur) adipiscimur, cum sit:

$$\frac{r_{,,}-a_{,,}}{r_{,,}+a_{,,}} = \frac{r\sqrt{(s^2-1)}-s\sqrt{(r^2-1)}}{r\sqrt{(s^2-1)}+s\sqrt{(r^2-1)}} = lm,$$

hanc formulam:

$$\left(\frac{1-lmy}{1+lmy}\right)^2 = \left(\frac{r^2-1}{s^2-1}\right)\left(\frac{1-s^2v^2}{1-r^2v^2}\right)$$

quae substituta formula $\frac{r+1}{r-1}$, $\frac{1-v}{1+v} = z$ in formulas (26.) art. IV. transit.

Eodem modo secundus casus aequat. (3.) art. IV., quem illic excepimus, ad easdem transformationes octo ducit.

**Fuit enim hoc casu:**

$$7.\quad \frac{m_{\prime}}{m} = r^2, \quad \text{et} \quad \frac{q_{\prime}}{q} = s^2,$$

**unde adipiscimur ex form. I. art. IV.**

$$8.\quad v^2 = \frac{m-qt^2}{mr^2-qs^2t^2},$$

**atque**

$$9.\quad t^2 = \frac{m}{q}\cdot\frac{1-r^2v^2}{1-s^2v^2}.$$

**Tabula limitum argumentorum erit, posito:**

$$1 > \frac{1}{r} > \frac{1}{s} > \frac{1}{a} > -\frac{1}{a} > -1,$$

$$10.\quad \begin{array}{ll} \text{Limites arg. } v & \text{Limites arg. } t^2 \\ \pm\infty \;\ldots\ldots & \frac{m}{q}\cdot\frac{r^2}{s^2} \\ \pm 1 \;\ldots\ldots & \frac{m}{q}\cdot\frac{r^2-1}{s^2-1} \\ \pm\frac{1}{r} \;\ldots\ldots & 0 \\ \mp\frac{1}{s} \;\ldots\ldots & \infty \\ \pm\frac{1}{a} \;\ldots\ldots & \left(\frac{m}{q}\right)\left(\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}\right) \\ 0 \;\ldots\ldots & \frac{m}{q} \\ \pm i\infty \;\ldots\ldots & \frac{m}{q}\cdot\frac{r^2}{s^2} \end{array}$$

**Radicalis vero novi integralis fit:**

$$\sqrt{\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{s^2-1}{r^2-1}t^2\right)\left(1-\frac{q}{m}\cdot\frac{a^2-s^2}{a^2-r^2}t^2\right)\left(1-\frac{s}{r}\sqrt{\frac{q}{m}}\,t\right)\left(1-\sqrt{\frac{q}{m}}\,t\right)},$$

**quam, ut in formam rursus integralis dati:**

$$\sqrt{[(1-t^2)(1-a_1^2t^2)(1-r_1t)(1-s_1t)]}$$

**commutemus, ponamus necesse est:**

$$11.\quad \begin{cases} \text{aut } \sqrt{\frac{m}{q}} = \sqrt{\left(\frac{a^2-s^2}{a^2-r^2}\right)}, \quad a_1 = \sqrt{\left(\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}\right)}\sqrt{\left(\frac{s^2-1}{r^2-1}\right)}, \quad s_1 = \frac{s}{r}\sqrt{\left(\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}\right)}, \\ \qquad r_1 = \sqrt{\left(\frac{a^2-r^2}{a^2-s^2}\right)}, \\ \text{aut } \sqrt{\frac{m}{q}} = \sqrt{\left(\frac{s^2-1}{r^2-1}\right)}, \quad a_1 = \sqrt{\left(\frac{r^2-1}{s^2-1}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{a^2-s^2}{a^2-r^2}\right)}, \quad s_1 = \frac{s}{r}\sqrt{\left(\frac{r^2-1}{s^2-1}\right)}, \\ \qquad r_1 = \sqrt{\left(\frac{r^2-1}{s^2-1}\right)}; \end{cases}$$

illic erit:

$$12.\quad \begin{cases} & 1>\frac{1}{r_1}>\frac{1}{s_1}>\frac{1}{a_1}>-\frac{1}{a_1}>-1, \\ \text{hic} & \\ & \frac{1}{a_1}>\frac{1}{r_1}>\frac{1}{s_1}>1>-1>-\frac{1}{a_1}. \end{cases}$$

Praeferamus rursus priorem seriem, cum altera ad easdem transformationes ducit, atque ponamus:

$$13.\quad \alpha_1=1,\quad \alpha_2=\frac{1}{r},\quad \alpha_3=\frac{1}{s},\quad \alpha_4=\frac{1}{a},\quad \alpha_5=-\frac{1}{a},\quad \alpha_6=-1.$$

Iam porro eam duodecim substitutionum fundamentalium advocemus, ubi, dum argumentum $v$: ab 1 ad $\frac{1}{r}$, vel $t^2$: ab $\frac{1}{a_1^2}$ ad 0 pergit, argumentum $y$: in intervallo sexto ab 0 proficiscitur. Ea vero erit tertia classis $B.$, ergo ex (13.) habemus:

$$14.\quad y=\left(\frac{a_1+s_1}{a_1-s_1}\right)\cdot\frac{a_1t-1}{a_1t+1},$$

$$c^2=\frac{a_1-s_1}{a_1+s_1}\cdot\frac{a_1+r_1}{a_1-r_1},\quad l^2=\frac{a_1-s_1}{a_1+s_1}\cdot\frac{a_1+1}{a_1-1},\quad m^2=\frac{a_1-s_1}{a_1+s_1}\cdot\frac{a_1-1}{a_1+1},$$

unde sequitur, formulis (12.) attractis:

$$\frac{a_1-s_1}{a_1+s_1}=\frac{r\sqrt{(s^2-1)}-s\sqrt{(r^2-1)}}{r\sqrt{(s^2-1)}+s\sqrt{(r^2-1)}}=lm,$$

nec non ex formula (9.):

$$\left(\frac{lmy+1}{lmy-1}\right)^2=\frac{r^2-1}{s^2-1}\left(\frac{1-s^2v^2}{1-r^2v^2}\right),$$

quae rursus posito:

$$z=\frac{r+1}{r-1}\cdot\frac{1-v}{1+v},$$

in formulis (26.) art. IV. transit.

Easdem denique substitutiones etiam tertia via adipisceremur, si a permutatione (25.) art. I.

$$\frac{1}{a}>\frac{1}{r}>\frac{1}{s}>1>-1>-\frac{1}{a},$$

in art. IV. aequat. (11.) profecti essemus. De natura vero ceterarum transformationum secundi ordinis, quae simili ratione ex generali theoria sequuntur, alia triginti permutationum supposita, alio loco agemus.

## IX.

### De duobus transformationibus principalibus integralium Abelianorum primae speciei.

E numero transformationum inventarum in eas, quae ad computationem integralium propositorum maxime idoneae sunt, accuratius inquirere

placet. Iam vero hic nonnisi primum integralium Abelianorum primi ordinis genus, quod in commentatione allata art. VI. vocavimus, hac forma gaudens:

$$1. \quad \frac{(M+Nz)\,dz}{\sqrt{[z(1-z)(1-k^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)]}}$$

tractare velimus, quamvis utrumque aliud genus prorsus simili ratione transformari posse, ex antecedentibus eluceat. Hoc enim in simplicissimo casu vera totius transformationis natura maxime illustrabitur, atque exemplis haud difficilioribus confirmabitur.

Ponamus igitur in aequat. (5.) et (6.) art. IV.

$$F_1 v^2 = A, \qquad F_2 v^2 = B,$$

unde fit eodem loco:

$$\Pi_1 t^2 = A, \qquad \Pi_2 t^2 = B,$$

atque formulae (20.) art. IV. transeunt in has:

$$P_1 t^2 = sA + B = A_0, \qquad P_2 t^2 = -\sqrt{\left(\frac{s^2-1}{r^2-1}\right)}(rA+B) = B_0,$$

ubi signa $A_0$ et $B_0$ brevitatis gratia introduxi.

Quibus formulis in tabula nostra art. eiusdem introductis, habemus inde pro his formulis:

$$t_1 = \sqrt{\left(\frac{r^2-1}{s^2-1}\right)}\sqrt{\left(\frac{1-s^2 v^2}{1-r^2 v^2}\right)} = -t_2,$$

has aequationes integrales:

I. Limites ipsius $v$: $-1 \ldots\ldots -\infty$, $\quad \infty \ldots\ldots 1$,

- - - - $t_1$: $1 \ldots\ldots \frac{1}{r_1}$, $\quad \frac{1}{r_1} \ldots\ldots 1$,

- - - - $t_2$: $-1 \ldots\ldots -\frac{1}{r}$, $\quad -\frac{1}{r} \ldots\ldots -1$,

$$4. \quad \int \frac{(A+Bv)\,dv}{\sqrt{[(1-v)(1-a^2 v^2)(1-rv)(1-sv)]}}$$

$$= \mp\sqrt{\left(\frac{(s+r)}{2s(r^2-1)(a^2-s^2)}\right)}\left\{\int \frac{(A_0+B_0 t_1)\,dt_1}{\sqrt{[-(1-t_1^2)(1-a_1^2 t_1^2)(1-r_1 t_1)(1-s_1 t_1)]}}\right.$$

$$\left.\pm\int \frac{(A_0+B_0 t_2)\,dt_2}{\sqrt{[-(1-t_2^2)(1-a^2 t_2^2)(1-r_1 t_2)(1-s_1 t_2)]}}\right\}.$$

II. Limites ipsius $v$: $1 \ldots\ldots \frac{1}{r}$, $\quad -\frac{1}{r} \ldots\ldots -1$,

- - - - $t_1$: $1 \ldots\ldots \infty$, $\quad +\infty \ldots\ldots 1$,

- - - - $t_2$: $-1 \ldots\ldots -\infty$, $\quad -\infty \ldots\ldots -1$,

$$5.\quad \int \frac{(A+Bv)\,dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-a^2v^2)(1-rv)(1-sv)]}}$$
$$= \mp \sqrt{\left(\frac{(s+r)}{2s(r^2-1)(a^2-s^2)}\right)} \left\{ \int \frac{(A_0+B_0t_1)\,dt_1}{\sqrt{[-(1-t_1^2)(1-a_1^2t_1^2)(1-r_1t_1)(1-s_1t_1)]}} \right.$$
$$\left. \mp \int \frac{(A_0+B_0t_2)\,dt_2}{\sqrt{[1(1-t_2^2)(1-a_1^2t_2^2)(1-r_1t_2)(1-s_1t_2)]}} \right\}.$$

Ubi in utraque aequatione integrali superiora signa pro prioribus inferiora pro posterioribus limitibus appositis valent. Iam vero ad art. VI. transeuntes, integralia utriusque harum aequationum termini in canonicam formam reducemus. Habemus igitur ex aequat. (7.) etc. art. VI. substitutionibus idoneis factis:

$$v = \frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z},$$
$$(\psi z)(1+\lambda\mu z) = A(1+\lambda\mu z)+B(1-\lambda\mu z).$$

Ex formula (13.) art. VI. sequitur signum $e$ fore pro intervallis:

$$\left\{\begin{matrix} \text{ipsius } v: & -1 \ldots\ldots -\infty, & \infty \ldots\ldots 1, & 1 \ldots\ldots \frac{1}{r}, \ldots\ldots -\frac{1}{r} & \ldots\ldots -1 \\ \text{ipsius } z: & -\infty \ldots\ldots -\frac{1}{\lambda\mu}, & -\frac{1}{\lambda\mu} \ldots\ldots 0, & 0 \ldots\ldots 1, & \frac{1}{\lambda^2\mu^2} \ldots\ldots & \infty \end{matrix}\right\} = +1.$$

Eodem modo erit ex formula (21.) et art. VI.:

$$t = \frac{1-lmy}{1+lmy},$$
$$\psi_1 y(1+lmy) = A_0(1+lmy)+B_0(1-lmy),$$

sive formula (3.) advocata:

$$6.\quad \psi_1 y(1+lmy) = (sA+B)(1+lmy) - \sqrt{\left(\frac{s^2-1}{r^2-1}\right)}(rA+B)(1-lmy).$$

Ex formula (25.) art. VI. rursus sequitur signum $e$, fore pro intervallis:

$$\left\{\begin{matrix} \text{ipsius } t: & -1 \ldots\ldots -\infty, & \infty \ldots\ldots 1, & 1 \ldots\ldots \frac{1}{r}, \ldots\ldots \frac{1}{r} & \ldots\ldots -1 \\ \text{ipsius } y: & -\infty \ldots\ldots -\frac{1}{lm}, & -\frac{1}{lm} \ldots\ldots 0, & 0 \ldots\ldots 1, & \frac{1}{l^2m^2} \ldots\ldots & \infty \end{matrix}\right\} = +1.$$

Ex eodem art. VI. valores ipsorum $r, s, a, k, \lambda, \mu, r_1, s_1, a_1, c, l, m$ desumuntur, formulis (5.), (6.), (15.), (18.), (19.) expressi. Ad quos adiicimus has formulas ex art. (11.), (23.), (26.), (28.) art. VI., et ex formula (6.) huius art. repetitas:

$$7.\quad M = \frac{(\lambda-\mu)(k^2-\lambda\mu)}{k\lambda\mu.\lambda_k.\mu_k}\sqrt{\left(\frac{(1-\lambda\mu)(k^2-\lambda^2\mu^2)}{k^2+\lambda\mu}\right)}$$
$$= \frac{l_c m_c(c^2-lm)}{cc_1^2(l-m)}\sqrt{\left(\frac{c^2+lm}{(1-lm)(c^2-l^2m^2)}\right)},$$

$$8.\quad N = \frac{\lambda-\mu}{4\lambda\mu}\sqrt{(1-\lambda\mu)(k^2-\lambda\mu)} = \frac{l_c m_c}{c_1^2(c+lm)}\sqrt{\left(\frac{c^4-l^2m^2}{c^2-l^2m^2}\right)},$$

$$9.\quad N_1 = \frac{\lambda_k\mu_k}{k_1^2(k+\lambda\mu)}\sqrt{\left(\frac{k^4-\lambda^2\mu^2}{k^2-\lambda^2\mu^2}\right)} = \frac{l-m}{4lm}\sqrt{[(1-lm)(c^2-lm)]},$$

$$10.\quad \frac{1-lmy_1}{1+lmy_1} = \sqrt{\left(\frac{(1-k^2z)\left(1-\frac{\lambda^2\mu^2}{k^2}\right)z}{(1-z)(1-\lambda^2\mu^2z)}\right)} = -\left(\frac{1-lmy_2}{1+lmy^2}\right),$$

$$11.\quad A_0 = \frac{(k^2+\lambda\mu)A+(k^2-\lambda\mu)B}{k^2-\lambda\mu} = \frac{c(1-lm)A+(c^2-lm)B}{c^2-lm},$$

$$12.\quad B_0 = -\left[\frac{k(1+\lambda\mu)A+k(1-\lambda\mu)B}{k^2-\lambda\mu}\right] = -\left[\frac{c(1+lm)A+(c^2+lm)B}{c^2-lm}\right].$$

**Inde sequitur, fore:**

$$13.\quad \frac{MN_1}{N} = \frac{k^2-\lambda\mu}{(1-k^2)(k+\lambda\mu)} = \frac{(c+lm)(c^2-lm)}{4cl'm}.$$

**Quibus omnibus formulis collatis, atque in aequationibus integralibus (4.) et (5.) substitutis, adipiscimur has aequationes integrales:**

$$14.\quad \frac{[A(1+\lambda\mu z)+B(1-\lambda\mu z)]\,dz}{\sqrt{[-z(1-z)(1-k^2z)(1-\lambda^2z)(1-\mu^2z)]}}$$

$$= \pm\frac{1}{(1-k^2)(k+\lambda\mu)}\left\{\int\frac{[((k^2+\lambda\mu)A+(k^2-\lambda\mu)B)(1+lmy_1)-(k(1-\lambda\mu)A+k(1-\lambda\mu)B)(1-lmy_1)]\,dy_1}{\sqrt{[y(1-y)(1-c^2y)(1-l^2y)(1-m^2y)]}}\right.$$

$$\left.\pm\int\frac{[((k^2+\lambda\mu)A+(k^2-\lambda\mu)B)(1+lmy_2)-(k(1+\lambda\mu)A+k(1-\lambda\mu)B)(1-lmy_2)]\,dy_2}{\sqrt{[y(1-y)(1-c^2y)(1-l^2y)(1-m^2y)]}}\right\},$$

**sive:**

$$= \pm\frac{(c+lm)}{4clm}\left\{\int\frac{[(c(1-lm)A+(c^2-lm)B)(1+lmy)-(c(1+lm)A+(c^2+lm)B)(1-lmy)]\,dy_1}{\sqrt{[y(1-y)(1-c^2y)(1-l^2y)(1-m^2y)]}}\right.$$

$$\left.\pm\int\frac{[(c(1-lm)A+(c^2-lm)B)(1+lmy_2)-(c(1+lm)A+(c^2+lm)B)(1-lmy_2)]\,dy_2}{\sqrt{[y(1-y)(1-c^2y)(1-l^2y)(1-m^2y)]}}\right\}.$$

**Brevitatis gratia ponamus:**

$$15.\quad A+B = \alpha,\qquad (A-B)\lambda\mu = -\beta,$$

$$16.\quad \begin{cases}\dfrac{k\alpha+\beta}{(1+k)(k+\lambda\mu)} = a = \dfrac{1+c}{4c}\cdot\dfrac{c+lm}{c-lm}[\alpha(c-lm)+\beta(c+lm)],\\[2ex] \dfrac{(k\alpha-\beta)(k-\lambda\mu)}{(1+k)(k+\lambda\mu)^2} = b = \dfrac{1+c}{4}\cdot\dfrac{c+lm}{c-lm}[\alpha(c-lm)-\beta(c+lm)],\end{cases}$$

$$17.\quad \begin{cases}\sqrt{[z(1-z)(1-k^2z)(1-\lambda^2z)(1-\mu^2z)]} = \sqrt{(\Delta z)},\\ \sqrt{[y(1-y)(1-c^2y)(1-l^2y)(1-m^2y)]} = \sqrt{(Dy)}.\end{cases}$$

**Quibus denotationibus adhibitis, nanciscimur hanc tabulam, pro substitutione hac: (26. art. IV.)**

$$\left[\frac{1-lmy_1}{1+lmy_1}\right] = \sqrt{\left(\frac{(1-k^2z)\left(1-\frac{\lambda^2\mu^2}{k^2}z\right)}{(1-z)(1-\lambda^2\mu^2z)}\right)} = -\left[\frac{1-lmy_2}{1+lmy_2}\right],$$

I.

$$18.\quad \int\frac{(\alpha-\beta z)\,dz}{\sqrt{(-\Delta z)}} = \mp\left\{\int\frac{(a-by_1)\,dy_1}{\sqrt{(Dy_1)}} \pm \int\frac{(a-by_2)\,dy_2}{\sqrt{(Dy_2)}}\right\},$$

Limites ipsius $z$: $-\infty \ldots\ldots -\frac{1}{\lambda\mu}$, ipsius $y_1$: $0 \ldots\ldots 1$, ipsius $y_2$: $\infty \ldots\ldots \frac{1}{\lambda^2 m^2}$.

- - - - $z$: $-\frac{1}{\lambda\mu} \ldots\ldots 0$, - - $y_1$: $1 \ldots\ldots 0$, - - $y_2$: $\frac{1}{\lambda^2\mu^2} \ldots\ldots \infty$.

II.

$$19.\quad \int\frac{(\alpha-\beta z)\,dz}{\sqrt{(\Delta z)}} = \pm\left\{\int\frac{(a-by_1)\,dy_1}{\sqrt{(-Dy_1)}} \mp \int\frac{(a-by_2)\,dy_2}{\sqrt{(-Dy_2)}}\right\},$$

Limites ipsius $z$: $0 \ldots\ldots 1$, ipsius $y_1$: $0 \ldots\ldots \frac{1}{lm}$, ipsius $y_2$: $-\infty \ldots\ldots -\frac{1}{lm}$.

- - - - $z$: $\frac{1}{\lambda^2\mu^2} \ldots\ldots \infty$, - - $y_1$: $-\frac{1}{lm} \ldots\ldots 0$, - - $y_2$: $-\frac{1}{lm} \ldots\ldots -\infty$.

Superiora signa pro prioribus, inferiora pro posterioribus limitibus praeponenda sunt.

Inde hae inter integralia definita aequationes prodeunt:

$$20.\quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{0}\frac{(\alpha-\beta z)\,dz}{\sqrt{(-\Delta z)}} = -2\int_0^1\frac{(a-by_1)\,dy_1}{\sqrt{(Dy_1)}}, \\ \int_0^1\frac{(\alpha-\beta z)\,dz}{\sqrt{(-\Delta z)}} = -\int_0^{-\infty}\frac{(a-by_1)\,dy_1}{\sqrt{(Dy_1)}}. \end{cases}$$

Adiiciatur adhuc, modulos $c$, $l$, $m$ easdem functiones modulorum $k$, $\lambda$, $\mu$ esse, quae moduli $k$, $\lambda$, $\mu$ modulorum $c$, $l$, $m$, ut ex art. VI. eluoet; ex aequatione (16.) sequitur, fore:

$$21.\quad \begin{cases} \frac{2}{(1+c)(c+lm)}[ac+b] = \alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+k)(k+\lambda\mu)}{k(k-\lambda\mu)}[a(k-\lambda\mu)+b(k+\lambda\mu)], \\ \frac{2(c-lm)}{(1+c)(c+lm)^2}[ac-b] = \beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+k)(k+\lambda\mu)}{(k-\lambda\mu)}[a(k-\lambda\mu)+b(k+\lambda\mu)], \end{cases}$$

quibus aequationibus adhibitis, relationes integralium (20.) duae in unam et eandem transeunt.

Nihil restat, nisi ut per transformationes fundamentales integralia ad talia reducamus, quorum argumenta inter: 0 et 1 continentur, quo facto computatio ipsa integralium demum introduci potest.

Quem ad finem in aequat. (19.) argumenta $y_1$ et $y_2$ per sextam classis $B.$, transformare velimus:

$$y = \frac{Y}{Y-1}$$

atque (videas art. III. comm. iam allatae) intra limites ipsius $Y$; $0 \ldots\ldots 1$ habebimus:

$$22.\quad \int\frac{(a-by)\,dy}{\sqrt{[-y(1-y)(1-c^2y)(1-l^2y)(1-m^2y)]}} = \int\frac{(a-(a-b)Y)\,dY}{\sqrt{[Y(1-Y)(1-m_1^2Y)(1-l_1^2Y)(1-c_1^2Y)}}.$$

Si igitur introducimus has quantitates:

$$k',\ \lambda',\ \mu',\ \alpha',\ \beta',$$

loco quantitatum:

$$m_1,\ l_1,\ c_1,\ a,\ a-b,$$

habemus denique hoc **theorema**:

„Integralia indefinita Abeliana primi ordinis hanc comparationem admittunt:

$$„23.\quad \int_0^z \frac{(\alpha-\beta z)\,dz}{\sqrt{(\Delta z)}} = \int_0^{y_1} \frac{(\alpha'-\beta' y_1)\,dy_1}{\sqrt{(\Delta' y_1)}} - \int_1^{y_2} \frac{(\alpha'-\beta' y_2)\,dy_2}{\sqrt{(\Delta' y_2)}},$$

„ubi signa $\Delta z$ et $\Delta' y$ his aequationibus,

$$„\Delta z = z(1-z)(1-k^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z),$$

$$„\Delta' y = y(1-y)(1-k'^2)(1-\lambda'^2)(1-\mu'^2),$$

„et argumenta $y_1$ et $y_2$ his formulis dantur:

$$„\left[\frac{1-(1-k'_1\lambda'_1)y_1}{1-(1+k'_1\lambda'_1)y_1}\right] = \sqrt{\left(\frac{(1-k^2 z)\left(1-\frac{\lambda^2\mu^2}{k^2}\right)z}{(1-z)(1-\lambda^2\mu^2 z)}\right)} = -\left[\frac{1-(1-k'_1\lambda'_1)y_2}{1-(1+k'_1\lambda'_2)y_2}\right].$$

„Limites erunt ipsius $z$: $0\ldots.1$, ips. $y_1$: $0\ldots.\frac{1}{1+k_1\lambda_1}$, ips. $y_2$: $1\ldots.\frac{1}{1+k_1\lambda_1}$;

„moduli novi his formulis dantur:

$$„k'^2_1 = 1-k'^2 = \frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{k-\lambda\mu}{k+\lambda\mu}\cdot\frac{k\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k}{k\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k},$$

$$„\lambda'^2_1 = 1-\lambda'^2 = \frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{k-\lambda\mu}{k+\lambda\mu}\cdot\frac{k\lambda_1\mu_1+\lambda_k\mu_k}{k\lambda_1\mu_1-\lambda_k\mu_k},$$

$$„\mu'^2_1 = 1-\mu'^2 = \left(\frac{k-\lambda\mu}{k+\lambda\mu}\right)^2.$$

„Nominatoris denique coefficientes his dantur formulis:

$$„24.\ \begin{cases} \alpha' = \dfrac{k\alpha+\beta}{(1+k)(k+\lambda\mu)} = \dfrac{1+\mu'_1}{4\mu'_1}\cdot\dfrac{\mu'_1+k'_1\lambda'_1}{\mu'_1-k'_1\lambda'_1}\,[\alpha(\mu'_1-k'_1\lambda'_1)+\beta(\mu'_1+k'_1\lambda'_1)], \\ \beta' = \dfrac{2k}{k+\lambda\mu}\cdot\dfrac{\lambda\mu\alpha+\beta}{(1+k)(k+\lambda\mu)} = \dfrac{1+\mu'_1}{4\mu'_1}\cdot\dfrac{\mu'_1+k'_1\lambda'_1}{\mu'_1-k'_1\lambda'_1}\,[\alpha(\mu'_1-k'_1\lambda'_1)(1-\mu'_1)+\beta(\mu'_1+k'_1\lambda'_1)(1+\mu'_1)]. \end{cases}$$

Iam adnotare velim, si nominatores ad formam $a(1-z)+bz$ atque $a'(1-y)+b'y$ applicamus, fore:

$$\alpha = a,\quad \beta = a-b,\quad \alpha' = a',\quad \beta' = a'-b'.$$

unde sequuntur hae formulae:

$$25.\quad \begin{cases} a' = \dfrac{(1+k).a-b}{(1+k)(k+\lambda\mu)} = \dfrac{1+\mu'_1}{4\mu'_1}\cdot\dfrac{\mu'_1+k'_1\lambda'_1}{\mu'_1-k'_1\lambda'_1}\,[2\mu'_1 a-(\mu'_1+k'_1\lambda'_1)b], \\ b' = \left(\dfrac{b-(1-k)a}{(1+k)(k+\lambda\mu)}\right)\left(\dfrac{k-\lambda\mu}{k+\lambda\mu}\right) = \dfrac{1+\mu'_1}{4}\cdot\dfrac{\mu'_1+k'_1\lambda'_1}{\mu'_1-k'_1\lambda'_1}\,[(\mu'_1+k'_1\lambda'_1)b-2k'_1\lambda'_1 a], \end{cases}$$

pro integralium relatione hac:

$$26. \quad \int_0^z \frac{(a(1-z)+bz)}{\sqrt{(\Delta z)}} = \int_0^{y_1} \frac{(a'(1-y)+b'y)\,dy}{\sqrt{(\Delta' y)}} - \int_1^{y_2} \frac{(a'(1-y)+b'y)\,dy}{\sqrt{(\Delta' y)}}.$$

Inde ex theoremate proposito integralium definitorum relatio haec sequitur:

$$27. \quad \int_0^1 \frac{(\alpha-\beta z)\,dz}{\sqrt{(\Delta z)}} = \int_0^1 \frac{(\alpha'-\beta' y)\,dy}{\sqrt{(\Delta' y)}},$$

sive:

$$28. \quad \int_0^1 \frac{(a(1-z)+bz}{\sqrt{(\Delta z)}} = \int_0^1 \frac{(a'(1-y)+b'y)\,dy}{\sqrt{(\Delta' y)}}.$$

Iam patet transformationem modo expositam cum prima octo earum prorsus convenire, quarum formulas et modulos in tabula art. VI. dedimus. Ut vero alteram respondentem adipiscamur transformationem, quae, per inversionem antecedentis orta, quinta est eiusdem tabulae allatae, in aequat. (18.) argumentum $z$ per formulam $z = \frac{z}{z-1}$ commutemus, unde intra limites ipsius $z$: $0 \ldots . 1$ adipiscimur:

$$29. \quad \int \frac{(a-\beta z)\,dz}{\sqrt{(-\Delta z)}} = \int \frac{(\alpha(1-Z)+\beta Z)\,dZ}{\sqrt{[Z(1-Z)(1-\mu_1^2 Z)(1-\lambda_1^2 Z)(1-k_1^2 Z)]}}.$$

Hic vero introductis quantitatibus:

$$k, \quad \lambda, \quad \mu,$$

respective loco quantitatum:

$$\mu_1, \quad \lambda_1, \quad k_1,$$

nec non in aequatione (18.)

$$k^0, \quad \lambda^0, \quad \mu^0, \quad \alpha^0. \quad \beta^0,$$

loco quantitatum:

$$c, \quad l, \quad m, \quad a^0, \quad a^0-b^0,$$

habemus hoc alterum

theorema:

„Integralia Abeliana primi ordinis hanc alteram comparationem admittunt:

$$„30. \quad \int_0^x \frac{(\alpha(1-z)+\beta z)\,dz}{\sqrt{(\Delta z)}}$$

$$= \pm\left\{\int_0^{y_1} \frac{(\alpha^0(1-y)+\beta^0 y)\,dy}{\sqrt{(\Delta^0 y)}} \pm \int_\infty^{y_2} \frac{(\alpha^0(1-y)+\beta^0 y)\,dy}{\sqrt{(\Delta^0 y)}}\right\},$$

„ubi hae denotationes introductae sunt:

$$„\Delta z = z(1-z)(1-k^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z),$$

$$„\Delta^0 z = z(1-z)(1-k^{02} z)(1-\lambda^{02} z)(1-\mu^{02} z),$$

„argumenta his formulis dantur:

$$„\frac{1-\lambda^0\mu^0 y_1}{1+\lambda^0\mu^0 y_1} = \sqrt{\left(\frac{(1-\mu^2 z)\left(1-\frac{\mu_1^2-k_1^2\lambda_1^2}{\mu_1^2} z\right)}{1-(1-k_1^2\lambda_1^2) z}\right)} = \frac{1-\lambda^0\mu^0 y_2}{1+\lambda^0\mu^0 y_2};$$

„limites erunt:

„pro superioribus signis, $z$: $0 \ldots\ldots \frac{1}{1+k_1\lambda_1}$, $y_1$: $0\ldots\ldots 1$, $y_2$: $\infty \ldots\ldots \frac{1}{\lambda^{0^2}\mu^{0^2}}$,

„pro inferioribus signis, $z$: $\frac{1}{1+k_1\lambda_1} \ldots\ldots 1$, $y_1$: $1\ldots\ldots 0$, $y_2$: $\frac{1}{\lambda^{0^2}\mu^{0^2}} \ldots\ldots \infty$,

„moduli novi his formulis dantur:

$$„k^{0^2} = \left(\frac{\mu_1 - k_1\lambda_1}{\mu_1 + k_1\lambda_1}\right),$$

$$„\lambda^{0^2} = \left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)\left(\frac{\mu_1 - k_1\lambda_1}{\mu_1 + k_1\lambda_1}\right)\left(\frac{\mu_1 k\lambda + \mu_k\mu_\lambda}{\mu_1 k\lambda - \mu_k\mu_\lambda}\right),$$

$$„\mu^{0^2} = \left(\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}\right)\left(\frac{\mu_1 - k_1\lambda_1}{\mu_1 + k_1\lambda_1}\right)\left(\frac{\mu_1 k\lambda - \mu_k\mu_\lambda}{\mu_1 k\lambda + \mu_k\mu_\lambda}\right).$$

„Numeratoris denique coefficientes ita determinantur:

$$„31.\ \begin{cases} \alpha^0 = \dfrac{\mu_1\alpha+\beta}{(1+\mu_1)(\mu_1+k_1\lambda_1)} = \dfrac{1+k^0}{4k^0}\cdot\dfrac{k^0+\lambda^0\mu^0}{k^0-\lambda^0\mu^0}[\alpha(k^0-\lambda^0\mu^0)+\beta(k^0+\lambda^0\mu^0)], \\ \beta^0 = \dfrac{2\mu_1}{\mu_1+k_1\lambda_1}\cdot\dfrac{k_1\lambda_1\alpha+\beta}{(1+\mu_1)(\mu_1+k_1\lambda_1)} = \dfrac{1+k^0}{4k^0}\cdot\dfrac{k^0+\lambda^0\mu^0}{k^0-\lambda^0\mu^0}[\alpha(k^0-\lambda^0\mu^0)(1-k^0)+\beta(k^0+\lambda^0\mu^0)(1+k^0)]. \end{cases}$$

Adiiciamus rursus, si nominatores ad formam $a - bz$, atque $a^0 - b^0 y$ applicare malimus, fore:

$$\alpha = a,\quad \beta = a - b,\quad \alpha^0 = a^0,\quad \beta^0 = a^0 - b^0,$$

unde sequuntur hae formulae:

$$32.\ \begin{cases} a^0 = \dfrac{(1+\mu_1)a - b}{(1+\mu_1)(\mu_1+k_1\lambda_1)} = \dfrac{1+k^0}{4k^0}\cdot\dfrac{k^0+\lambda^0\mu^0}{k^0-\lambda^0\mu^0}[2k^0 a - (k^0+\lambda^0\mu^0)b], \\ b^0 = \left(\dfrac{b-(1-\mu_1)a}{(1+\mu_1)(\mu_1+k_1\lambda_1)}\right)\left(\dfrac{\mu_1-k_1\lambda_1}{\mu_1+k_1\lambda_1}\right) = \dfrac{1+k^0}{4}\cdot\dfrac{k^0+\lambda^0\mu^0}{k^0-\lambda^0\mu^0}[(k^0+\lambda^0\mu^0)b - 2\lambda^0\mu^0 a]. \end{cases}$$

pro hac relatione integralium:

$$33.\ \int_0^z \frac{(a-bz)\,dz}{\sqrt{(\Delta z)}} = \pm\left\{\int_0^{y_1} \frac{(a^0(1-y)+b^0 y)\,dy}{\sqrt{(\Delta^0 y)}} \pm \int_\infty^{y_2} \frac{(a^0(1-y)+b^0 y)\,dy}{\sqrt{(\Delta^0 y)}}\right\}.$$

Postremo vero has relationes inter integralia definita ex aequat. (30.) et (33.) nanciscimur:

$$34.\ \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{(\alpha(1-z)+\beta z)\,dz}{\sqrt{(\Delta z)}} = 2\int_0^1 \frac{(\alpha^0(1-y)+\beta^0 y)\,dy}{\sqrt{(\Delta^0 y)}}, \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{(a-bz)\,dz}{\sqrt{(\Delta z)}} = 2\int_0^1 \frac{(a^0-b^0 y)\,dy}{\sqrt{(\Delta^0 y)}}. \end{cases}$$

## X.

### Directa transformationum duarum principalium demonstratio.

Quamquam in antecedentibus transformationes nostras ex vero ipsarum fonte deduximus, atque planissime exposuimus, tamen erit, priusquam

eas ad computationem integralium applicamus, haud supervacaneum, si brevem earum demonstrationem directam adiiciamus. Id quod in sequentibus fecimus. Ponamus has formulas:

$$11.\quad \left[\frac{(1+k)(k+\lambda\mu)(1-y_1)+(1-k)(k-\lambda\mu)y_1}{(1+k)(k+\lambda\mu)(1-y_1)-(1-k)(k-\lambda\mu)y_1}\right] = -\left[\frac{(1+k)(k+\lambda\mu)(1-y_2)+(1-k)(k-\lambda\mu)y_2}{(1+k)(k+\lambda\mu)(1-y_2)-(1-k)(k-\lambda\mu)y_2}\right]$$

$$= \frac{1}{k}\sqrt{\left(\frac{[(k^2-\lambda\mu)^2(1+\lambda\mu z)^2-(k^2+\lambda\mu)^2(1-\lambda\mu z)^2]}{[(1-\lambda\mu)^2(1+\lambda\mu z)^2-(1+\lambda\mu)^2(1-\lambda\mu z)^2]}\right)} = \frac{1}{k}\sqrt{\left(\frac{(1-k^2 z)(k^2-\lambda^2\mu^2 z)}{(1-z)(1-\lambda^2\mu^2 z)}\right)},$$

unde duas quantitates $y_1$ et $y_2$ radices huius aequationis quadraticae esse, facile derivamus

$$2.\quad \begin{cases} k^2[(1+k)(k+\lambda\mu)(1-y_1)+(1-k)(k-\lambda\mu)y]^2[(1-\lambda\mu)^2(1+\lambda\mu z)^2-(1+\lambda\mu)^2(1-\lambda\mu z)^2] \\ = [(1+k)(k+\lambda\mu)(1-y)-(1-k)(k-\lambda\mu)y]^2[(k^2-\lambda\mu)^2(1+\lambda\mu z)^2-(k^2+\lambda\mu)^2(1-\lambda\mu z)^2), \end{cases}$$

quae, quia ut functio rationalis ipsius $\left(\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\right)^2$ considerari potest, loco ipsius $z$ posito: $\frac{1}{\lambda^2\mu^2 z}$ haud commutatur, atque secundum potestates ipsius $y$ ordinata, erit:

$$3.\quad \begin{cases} y^2 - \left[4[k+\lambda\mu)^2+\lambda\mu(1+k)^2] - \frac{(1+\lambda\mu)(k^2+\lambda\mu)}{4k\lambda\mu}\left(\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\right)^2\right]y \\ \qquad + \frac{(1+k)^2(k+\lambda\mu)^2}{16k^2\lambda\mu}\left[1-\left(\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\right)^2\right] = 0, \\ \text{sive:} \\ y^2 - \left[1+\frac{(1+\lambda\mu)(k^2+\lambda\mu)}{k}\cdot\frac{z}{(1+\lambda\mu z)^2}\right]y + \frac{(1+k)^2(k+\lambda\mu)^2}{4k^2}\cdot\frac{z}{(1+\lambda\mu z)^2} = 0. \end{cases}$$

Introductis quantitatibus $m$, $l$, $c$, per has aequationes:

$$m_1 = \frac{k-\lambda\mu}{k+\lambda\mu},\qquad c_1 l_1 = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)\left(\frac{k-\lambda\mu}{1+\lambda\mu}\right),\qquad \frac{c_1}{l_1} = \frac{k\lambda_1\mu_1-\lambda k\mu k}{k\lambda_1\mu_1+\lambda k\mu k},$$

ubi signa $c_1$, $l_1$, $m_1$, $k_1$, $\lambda_1$, $\mu_1$, etc. ut antea adhibentur, facile ex formulis (1.) hanc tabulam valorum argumentorum $z$, $y_1$, $y_2$ cohaerentium derivavimus:

4.

| Valores ipsius $z$. | Valores ipsius $y_1$. | Valores ipsius $y_2$. |
|---|---|---|
| $-\frac{1}{\lambda\mu}$, | $\pm\infty$, | $\frac{1}{1-l_1^2 c_1^2}$, |
| $0$ vel $\pm\infty$, | $0$ | $1$, |
| $1$ vel $\frac{1}{\lambda^2\mu^2}$, | $\frac{1}{1+l_1 c_1}$, | $\frac{1}{1+l_1 c_1}$, |
| $\frac{1}{k^2}$ vel $\frac{k^2}{\lambda^2\mu^2}$, | $\frac{1}{1-l_1 c_1}$, | $\frac{1}{1-l_1 c_1}$, |
| $\frac{1}{\lambda^2}$ vel $\frac{1}{\mu^2}$, | $\frac{1}{l^2}$, | $\frac{1}{c^2}$, |
| $\frac{1}{\lambda\mu}$, | $\frac{1}{m^2}$, | $\frac{m_1^2}{m_1^2-c_1^2 l_1^2}$. |

Inde ex hac tabula ad functiones rationales symmetricas radicum $y_1$ et $y_2$ pervenire licet, quae integrae sunt, nec primum ordinem argumenti: $y_1$ vel $y_2$ superant. Tales enim functiones per functiones fractas ipsius $z$, nec in numeratore, nec in nominatore secundum ordinem superantes, exprimi posse, ex aequatione (3.) clarum fit. Habemus igitur cum functio symmetrica $y_1 y_2$ pro $z=0$ et $z=\infty$ evanescat, nonnisi pro: $z=-\frac{1}{\lambda\mu}$, in infinitum abeat, atque pro: $z=\frac{1}{\lambda\mu}$, fiat $=\frac{m_1^2}{(1-m_1^2)(m_1^2-c_1^2 l_1^2)}$:

$$5.\quad y_1 y_2 = \frac{4m_1^2}{(m_1+c_1 l_1)^2(1+m_1)^2}\cdot\frac{z}{(1+\lambda\mu z)^2}.$$

Cum functio:

$$(1-y_1)(1-y_2):$$

pro $z=0$ et $z=\infty$ evanescat, nonnisi pro: $z=-\frac{1}{\lambda\mu}$ in infinitum abeat, et pro: $z=\frac{1}{\lambda^2\mu^2}$, fiat: $=\frac{m_1^2 l_1^2 c_1^2}{(1-m_1^2)(m_1^2-c_1^2 l_1^2)}$, erit:

$$6.\quad (1-y_1)(1-y_2) = \frac{4m_1^2 l_1^2 c_1^2}{(m_1+c_1 l_1)^2(1+m_1)^2}$$

Cum functiones:

$$(1-c^2 y_1)(1-c^2 y_2),\qquad (1-l^2 y_1)(1-l^2 y_2)$$

pro

$$z=\frac{1}{\lambda^2}\quad\text{et}\quad z=\frac{1}{\mu}$$

evanescant, nonnisi pro $z=-\frac{1}{\lambda\mu}$ in infinitum abeant, atque pro $z=0$ illa $=c_1^2$, haec $=l_1^2$ fiat, erit:

$$7.\quad (1-c^2 y_1)(1-c^2 y_2) = c_1^2\frac{(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)}{(1+\lambda\mu z)^2},$$

$$8.\quad (1-l^2 y_1)(1-l^2 y_2) = l_1^2\frac{(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)}{(1+\lambda\mu z)^2}.$$

Similiter invenimus:

$$9.\quad (1-m^2 y_1)(1-m^2 y_2) = m_1^2\left(\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\right)^2,$$

$$10.\quad \left(1-\frac{m_1^2-c_1 l_1^2}{m_1^2}y_1\right)\left(1-\frac{m_1^2-c_1 l_1^2}{m_1^2}y_2\right) = \frac{c_1 l_1^2}{m_1^2}\left(\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\right)^2,$$

$$11.\quad (1-(1-l_1 c_1)y_1)(1-(1-l_1 c_1)y_2) = l_1 c_1\frac{(1-k^2 z)\left(1-\frac{\lambda^2\mu^2}{k^2}z\right)}{(1+\lambda\mu z)^2},$$

$$12.\quad (1-(1+l_1 c_1)y_1)(1-(1+l_1 c_1)y_2) = -l_1 c_1\frac{(1-z)(1-\lambda^2\mu^2 z)}{(1+\lambda\mu z)},$$

$$13.\quad (1-(1-c_1^2 l_1^2)y_1)(1-(1-c_1 l_1^2)y_2) = l_1^2 c_1^2.$$

Ope formulae ultimae argumentum $y_2$ per $y_1$, et inverse exprimitur, ita ut fiat:

$$y_2 = \frac{1-y_1}{1-(1-c_1^2 l_1^2)y_1}, \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{1-y_2}{1-(1-c_1^2 l_1^2)y_2},$$

quarum formularum utralibet in antecedentibus substituta, nanciscimur has, in quibus $y$ et $y_1$ et $y_2$ significare potest:

$$15. \quad \frac{(1-c^2y)(1-l^2y)}{1-(1-c_1^2 l_1^2)y} = \frac{(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)}{(1+\lambda\mu z)^2},$$

$$16. \quad \frac{(1-m^2y)\left(1-\frac{m_1^2-c_1^2 l_1^2}{m_1^2}y\right)}{1-(1-c_1^2 l_1^2)y} = \left(\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\right)^2,$$

$$17. \quad \frac{(1-(1-c_1 l_1)y)^2}{1-(1-c_1^2 l_1^2)y} = \frac{(1-k^2 z)\left(1-\frac{\lambda^2\mu^2}{k^2}z\right)}{(1+\lambda\mu z)^2},$$

$$18. \quad \frac{(1-(1+c_1 l_1)y)^2}{1-(1-c_1^2 l_1^2)y} = \frac{(1-z)(1-\lambda^2\mu^2 z)}{(1+\lambda\mu z)^2},$$

$$19. \quad \frac{y(1-y)}{1-(1-c_1^2 l_1^2)y} = \frac{4m_1^2}{(m_1+c_1 l_1)^2(1+m_1)^2}\cdot\frac{z}{(1+\lambda\mu z)^2}.$$

Aequationibus (5.) et (6.) ita differentiatis, ut argumenta $y_1$ et $y_2$ ut functiones ipsius $z$ considerentur, habemus:

$$y_1 dy_2 + y_2 dy_1 = \frac{4m_1^2}{(1+m_1)^2(m_1+c_1 l_1)^2}\cdot\frac{1-\lambda\mu z}{(1+\lambda\mu z)^3},$$

$$(1-y_1)dy_2 + (1-y_2)dy_2 = -\frac{4m_1^2 l_1^2 c_1^2}{(1+m_1)^2(m_1+c_1 l_1)^2}\cdot\frac{1-\lambda\mu z}{(1+\lambda\mu z)^3}\cdot dz,$$

unde fluunt haec differentialia:

$$20. \quad \begin{cases} dy_1 = \dfrac{4m_1^2}{(1+m_1)^2(m_1+c_1 l_1)^2}\cdot\dfrac{(1-(1-c_1^2 l_1^2)y_1)}{y_2-y_1}\cdot\dfrac{1-\lambda\mu z}{(1-\lambda\mu z)^3}, \\ dy_2 = -\dfrac{4m_1^2}{(1+m_1)^2(m_1+c_1 l_1)^2}\cdot\dfrac{(1-(1-c_1^2 l_1^2)y_2)}{y_2-y_1}\cdot\dfrac{1-\lambda\mu z}{(1+\lambda\mu z)^3}\,dz. \end{cases}$$

Ex formula (9.) sequitur fore:

$$21. \quad \sqrt{((1-m^2y_1)(1-m^2y_2))} = \varepsilon\left(\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\right),$$

ubi quantitas $\varepsilon = \pm 1$ est. Iam vero, quia $z$ cum: $\frac{1}{\lambda^2\mu^2 z}$ commutato, radices $y_1$ et $y_2$ haud transmutantur, nec non expressiones:

$$(1-m^2y_1) \quad \text{et} \quad (1-m^2y_2)$$

semper positivo pro omnibus ipsius $z$ valoribus realibus gaudent valore, contra eadem commentatione facta, expressio:

$$\left(\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\right),$$

transit in hanc:

$$-\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z},$$

quantitas: $s$ pro valoribus ipsius: $z$, qui sunt $>\frac{1}{\lambda\mu}$ et $<\frac{1}{\lambda\mu}$ opposito signo, quam pro valoribus eiusdem argumenti, qui $<\frac{1}{\lambda\mu}$ et $>\frac{1}{\lambda\mu}$ sunt, gaudebit. Inde sequitur expressionem functionis:

$$[\sqrt{(1-m^2y_1)}-\sqrt{(1-m^2y_2)}]^2$$

per argumentum $z$ intra *illa* intervalla eandem esse, ac expressionem functionis:

$$[\sqrt{(1-m^2y_1)}+\sqrt{(1-m^2y_2)}]^2$$

intra *haec* intervalla argumenti $z$, atque inverse.

Functio rursus symmetrica irrationalis haec:

$$[\sqrt{(1-m^2y_1)}-\sqrt{(1-m^2y_2)}]^2$$

per rationalem ipsius $z$ functionem secundum ordinem in numeratore et denumeratore haud superantem ope formulae (21.) exprimi potest. Quae functio pro: $z=-\frac{1}{\lambda\mu}$ in infinitum abeunt, pro: $z=0$ fit: $=(1-m_1)^2$, pro: $z=1$ et $z=\frac{1}{k^2}$ evanescens, pro $z=\frac{1}{\lambda^2}$ fit

$$=\left[\frac{\sqrt{(l^2-m^2)}}{l}-\frac{\sqrt{(c^2-m^2)}}{c}\right]^2=\frac{4\mu^2\lambda_1^2\lambda_k^2}{(k+\lambda\mu)^2(\lambda+\mu)^2},$$

atque pro: $z=\frac{1}{\lambda\mu}$

$$=\frac{m_1^4-c_1^2l_1^2}{m_1^2-c_1^2l_1^2}=\frac{(1-\lambda\mu)(k^2-\lambda\mu)}{(k+\lambda\mu)^2}.$$

Ergo erit pro limitibus ipsius $z$: $-\frac{1}{\lambda\mu}\ldots.0\ldots.1\ldots.\frac{1}{k^2}\ldots.\frac{1}{\lambda^2}\ldots.\frac{1}{\lambda\mu}$:

$$22.\quad\left[\frac{\sqrt{(1-m^2y_1)}-\sqrt{(1-m^2y_2)}}{(1-m_1)}\right]^2=\frac{(1-z)(1-k^2z)}{(1+\lambda\mu z)^2}.$$

Eodem modo invenitur pro intervallis ipsius $z$:

$$\frac{1}{\lambda\mu}\ldots.\frac{1}{\mu^2}\ldots.\frac{k^2}{\lambda^2\mu^2}\ldots.\frac{1}{\lambda^2\mu^2}\quad\pm\infty\ldots.-\frac{1}{\lambda\mu},$$

fore:

$$23.\quad\left[\frac{\sqrt{(1-m^2y_1)}-\sqrt{(1-m^2y_2)}}{(1+m_1)}\right]^2=\frac{(1-\lambda^2\mu^2z)\left(1-\frac{\lambda^2\mu^2}{k^2}z\right)}{(1+\lambda\mu z)^2}.$$

Functio symmetrica:

$$(y_2-y_1)^2,$$

per functionem quarti ordinis ipsius $z$ in nominatore numeratoreque ex-

primitur, pro $z=1$, $z=\frac{1}{k^2}$, $z=\frac{k^2}{\lambda^2\mu^2}$, $z=\frac{1}{\lambda^2\mu^2}$ evanescit, atque pro $z=0$ unitati par est, unde fit:

$$24.\quad (y_2-y_1)^2 = \frac{(1-z)(1-k^2 z)(1-\lambda^2\mu^2 z)\left(1-\frac{\lambda^2\mu^2}{k^2}z\right)}{(1+\lambda\mu z)^4}.$$

Cum vero sit

$$(y_2-y_1)^2 = \left[\frac{(1-m^2 y_1)-(1-m^2 y_2)}{(1-m_1^2)}\right]^2,$$

pro prioribus limitibus ipsius $z$ habemus:

$$25.\quad \left[\frac{\sqrt{(1-m^2 y_1)}+\sqrt{(1-m^2 y_2)}}{(1+m_1)}\right]^2 = \frac{(1-\lambda^2\mu^2 z)\left(1-\frac{\lambda^2\mu^2}{k^2}\right)z}{(1+\lambda\mu z)^2},$$

et pro posterioribus:

$$26.\quad \left[\frac{\sqrt{(1-m^2 y_1)}+\sqrt{(1-m^2 y_2)}}{1-m_1}\right]^2 = \frac{(1-z)(1-k^2 z)}{(1+\lambda\mu z)^2}.$$

Inde ex formulis antecedentibus colliguntur hae:

$$27.\quad \begin{cases} \sqrt{[(1-m^2 y_1)(1-m^2 y_2)]} = \pm m_1\left(\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\right), \\ \sqrt{[(1-m^2 y_1)\mp(1-m^2 y_2)]} = \pm(1-m_1)\frac{\sqrt{[(1-z)(1-k^2 z)]}}{(1+\lambda\mu z)}, \\ \sqrt{\left[\frac{(1-c^2 y_1)(1-l^2 y_1)}{(1-(1-c_1^2 l_1^2)y_1)}\right]} = \frac{\sqrt{[(1-c^2 y_2)(1-l^2 y_2)]}}{(1-(1-c_1^2 l_1^2)y_2)} = \pm\frac{\sqrt{[(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)]}}{(1+\lambda\mu z)}, \\ \sqrt{\left[\frac{y_1(1-y_1)}{(1-(1-c_1^2 l_1^2)y_1)}\right]} = \sqrt{\left[\frac{y_2(1-y_2)}{(1-(1-c_1^2 l_1^2)y_2)}\right]} = \frac{2m_1}{(1+m_1)(m_1+c_1 l_1)}\cdot\frac{\sqrt{z}}{(1+\lambda\mu z)}, \end{cases}$$

superioribus signis dum $z$ intra 0 et 1, inferioribus dum intra $\infty$ et $\frac{1}{\lambda^2\mu^2}$ continetur valentibus. Quam signorum determinationem, cum intra limites assignatos quantitas:

$$\sqrt{(1-m^2 y_1)},$$

quantitate:

$$\sqrt{(1-m^2 y_2)}$$

maior sit, nec non $(1-c^2 y_1)$, $(1-l^2 y_1)$, $(1-(1-c_1 l_1^2)y_1)$, $(1-c^2 y_2)$, $(1-l^2 y_2)$, $(1-(1-c_1^2 l_1^2)y_2)$, positivis valoribus gaudeant, veram esse clarum est. Quibus adhibitis formulis habebimus:

$$28.\quad \frac{dy_1}{\sqrt{[y_1(1-y_1)(1-c^2 y_1)(1-l^2 y_1)(1-m^2 y)]}} \mp \frac{dy_2}{\sqrt{[y_2(1-y_2)(1-c^2 y_2)(1-l^2 y_2)(1-m^2 y_2)]}}$$

$$= \pm\frac{2}{(1+m_1)(m_1+c_1 l_1)}\cdot\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\cdot\frac{dz}{\sqrt{[z(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)]}}\cdot\frac{1}{y_2-y_1}\cdot\frac{\sqrt{(1-m^2 y_2)}\pm\sqrt{(1-m^2 y_1)}}{\sqrt{[1-m^2 y_1)(1-m^2 y_2)]}}$$

$$= \frac{2}{m_1+c_1 l_1}\cdot\frac{(1+\lambda\mu z)dz}{\sqrt{[z(1-z)(1-k^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)]}},$$

$$\frac{(1-m^2 y_1)\,dy_1}{\sqrt{[y_1(1-y_1)(1-c^2 y)(1-l^2 y)(1-m^2 y)]}} \mp \frac{(1-m^2 y_2)\,dy_2}{\sqrt{[y_2(1-y_2)(1-c^2 y_2)(1-l^2 y_2)(1-m^2 y_2)]}}$$

$$= \pm\frac{2m}{(1+m_1)(m_1+c_1 l_1)}\cdot\frac{1-\lambda\mu z}{1+\lambda\mu z}\cdot\frac{dz}{\sqrt{[z(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)]}}\cdot\frac{\sqrt{(1-m^2 y_1)}\pm\sqrt{(1-m^2 y_2)}}{\sqrt{(y_2-y_1)}}$$

$$= +\frac{2m_1}{(2m_1+c_1 l_1)}\cdot\frac{(1-\lambda\mu z)\,dz}{\sqrt{[z(1-z)(1-k^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)]}}.$$

Ubi rursus superiora signa valent pro his limitibus:

$$z:\ \ldots.0\ldots\ldots1,\qquad y_1:\ \ldots.0\ldots.\frac{1}{1+l_1 c_1},\qquad y_2:\ \ldots.1\ldots.\frac{1}{1+l_1 c_1},$$

inferiora vero pro his limitibus:

$$z:\ \ldots.\infty\ldots.\frac{1}{\lambda^2\mu^2},\qquad y_1:\ \ldots.0\ldots.\frac{1}{1+l_1 c_1},\qquad y_2:\ \ldots.1\ldots.\frac{1}{1+l_1 c_1}.$$

Aequationes (28.) et (29.) signis theorematis (23.) art. IX. adhibitis, fiunt:

$$30.\quad \frac{2}{\mu_1'+k_1'\lambda_1'}\cdot\frac{(1+\lambda\mu z)\,dz}{\sqrt{(\Delta z)}} = \frac{dy_1}{\sqrt{(\Delta' y_1)}} \mp \frac{dy_2}{\sqrt{(\Delta' y_2)}},$$

$$31.\quad \frac{2\mu_1'}{\mu_1'+k_1'\lambda_1'}\cdot\frac{(1-\lambda\mu z)\,dz}{\sqrt{(\Delta z)}} = \frac{(1-\mu'^2 y_1)\,dy_1}{\sqrt{(\Delta' y_1)}} \mp \frac{(1-\mu'^2 y_2)\,dy_2}{\sqrt{(\Delta' y_2)}},$$

quarum priori per $\mu_1'\alpha$, atque posteriori per $\alpha$ aucta, atque utraque addita, fit:

$$32.\quad \frac{\alpha\,dz}{\sqrt{(\Delta z)}} = \left[\frac{(1+\mu_1')(\mu_1'+\lambda_1'k_1')}{4\mu_1'}\right]\left(\frac{\alpha(1-(1-\mu_1')y_1)\,dy}{\sqrt{(\Delta' y_1)}} - \frac{\alpha(1-(1-\mu_1')y)\,dy}{\sqrt{(\Delta' y_2)}}\right).$$

Eodem modo fit, prima per $-\beta\mu_1'$, secundaque per $\beta$

$$33.\quad \frac{\beta z\,dz}{\sqrt{(\Delta z)}} = \frac{(1+\mu_1')(\mu_1'+k_1'\lambda_1')}{4\mu_1'(\mu_1'-k_1'\lambda_1')}\left(\frac{\beta(1-(1+\mu_1')y_1)\,dy_1}{\sqrt{(\Delta' y_1)}} - \frac{\beta(1-(1+\mu_1')y_2)\,dy_2}{\sqrt{(\Delta' y_2)}}\right).$$

Aequationibus (32.) et (33.) additis, integrationeque facta, adipiscimur aequationem (23.) art. IX. quaesitam. Aequationibus porro, quae in (28.) et (29.) comprehenduntur, additis, locoque $m_1$, $c_1$, $l_1$, valoribus suis introductis habemus:

$$34.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{y_1}\frac{dy_1}{\sqrt{(\Delta' y_1)}} = \frac{(k+\lambda\mu)(1+k)}{2(k-\lambda\mu)}\left(\int_0^{z_1}\frac{(1+\lambda\mu z_1)\,dz_1}{\sqrt{(\Delta z_1)}} + \int_\infty^{z_2}\frac{(1+\lambda\mu z_2)\,dz_2}{\sqrt{(\Delta z_2)}}\right), \\[2ex] \displaystyle\int_1^{y_2}\frac{dy_2}{\sqrt{(\Delta' y_2)}} = -\frac{(k+\lambda\mu)(1+k)}{3(k-\lambda\mu)}\left(\int_0^{z_1}\frac{(1+\lambda\mu z_1)\,dz_1}{\sqrt{(\Delta z_1)}} - \int_\infty^{z_2}\frac{(1+\lambda\mu z_2)\,dz_2}{\sqrt{(\Delta z_2)}}\right), \\[2ex] \displaystyle\int_0^{y_1}\frac{(1-m^2 y_1)\,dy_1}{\sqrt{(\Delta' y_1)}} = \frac{(1+k)}{2}\left(\int_0^{z_1}\frac{(1-\lambda\mu z_1)\,dz_1}{\sqrt{(\Delta z_1)}} + \int_\infty^{z_2}\frac{(1-\lambda\mu z_2)\,dz_2}{\sqrt{(\Delta z_2)}}\right), \\[2ex] \displaystyle\int_0^{y_2}\frac{(1-m^2 y_2)\,dy_2}{\sqrt{(\Delta' y_2)}} = -\frac{(1+k)}{2}\left(\int_0^{z_1}\frac{(1-\lambda\mu z_1)\,dz_1}{\sqrt{(\Delta z)}} - \int_\infty^{z_2}\frac{(1-\lambda\mu z_2)\,dz_2}{\sqrt{(\Delta z_2)}}\right). \end{cases}$$

Prima et tertia aequatio integralis pro limitibus valet his:

$$z_1:\ \ldots.0\ldots.1,\quad z_2:\ \ldots.\infty\ldots.\frac{1}{\lambda^2\mu^2},\quad y_1:\ \ldots.0\ldots.\frac{1}{1+c_1 l_1},$$

secunda vero atque quarta pro limitibus:

$$z_1:\quad 0\ldots.1,\quad z_2:\ \ldots.\infty\ldots.\frac{1}{\lambda^2\mu^2},\quad y_2:\ \ldots.1\ldots.\frac{1}{1+c_1 l_1}.$$

Inde ex aequationibus (34.) rursus integratione facta facillime deducuntur aequationes (30.) art. IX. quaesitae. Argumenta enim $z_1$ et $z_2$, quia aequationi quadraticae (3.) satisfacere debent, per aequationem $z_2=\frac{1}{\lambda^2\mu^2 z_1}$, inter se coniuncta, ex argumentis $y$ per aequationem quadraticam, quippe cuius radices ipsa sunt, inveniuntur; haec aequatio, modulis $c$, $l$, $m$, loco ipsorum $k$, $\lambda$, $\mu$ introductis, erit:

$$z^2+z\left(\frac{2(m_1^2-c_1^2 l_1^2)(1-m_1^2)y(1-y)-4m_1^2(1-(1-c_1 l_1^2)y)}{y(1-y)(m_1-c_1 l_1)^2(1-m_1)^2}\right)+\left(\frac{m_1+c_1 l_1)(1+m)}{m_1-c_1 l_1)(1-m)}\right)^2=0.$$

Facillime invenimus inde, fore, quia $z$, simul cum $y$ evanescit,

$$35.\quad \frac{1-\lambda\mu z_1}{1+\lambda\mu z_1}=\sqrt{\left(\frac{(1-m^2 y)\left(1-\frac{m_1^2-c_1^2 l_1^2}{m_1^2}y\right)}{(1-(1-c_1 l_1^2)y)}\right)}=-\left[\frac{1-\lambda\mu z_2}{1+\lambda\mu z_2}\right].$$

Praeterea pro utraque radice $z$ formulae (15.), (16.) etc. valent, unde in termino secundo partim loco $z=z_1$, et partim $=\frac{1}{\lambda^2\mu^2 z_2}$ introductis, sequuntur hae:

$$36.\quad\begin{cases}(1+\lambda\mu z_1)(1+\lambda\mu z_2)= \left(\frac{(k+\lambda\mu)^2(1+k)^2}{4k^2\lambda\mu}\right)\left(\frac{1-(1-c_1^2 l_1^2)y}{y(1-y)}\right),\\ (1-\lambda^2 z_1)(1-\lambda^2 z_2)=-\frac{(k+\lambda\mu)^2(1+k)^2}{4k^2\mu^2}\cdot\frac{(1-c^2 y)(1-l^2 y)}{y(1-y)},\\ (1-\mu^2 z_1)(1-\mu^2 z_2)=-\frac{(k+\lambda\mu)^2(1+k)^2}{4k^2\lambda^2}\cdot\frac{(1-c^2 y)(1-l^2 y)}{y(1-y)},\\ (1-k^2 z_1)(1-k^2 z_2)=-\frac{(k+\lambda\mu)^2(1+k)^2}{4\lambda^2\mu^2}\cdot\frac{(1-(1-c_1 l_1)y)^2}{y(1-y)},\end{cases}$$

$$37.\quad (1-z_1)(1-z_2)=-\frac{(k+\lambda\mu)^2(1+k)^2}{4k^2\lambda^2\mu^2}\cdot\frac{(1-(1+c_1 l_1)y)^2}{y(1-y)},$$

$$28.\quad z_1.z_2=\frac{1}{\lambda^2\mu^2},$$

$$39.\quad (1-\lambda\mu z_1)(1-\lambda\mu z_2)=-\frac{(k+\lambda\mu)^2(1+k)^2}{4k^2\lambda\mu}\cdot\frac{(1-m^2 y)\left(1-\frac{m_1^2-c_1^2 l_1^2}{m_1^2}y\right)}{y(1-y)}.$$

Ex formulis denique (22.), (23.) etc. sequuntur hae:

$$40.\quad \frac{\sqrt{[(1-z_1)(1-k^2 z_1)]}}{(1+\lambda\mu z_1)} - \frac{\sqrt{[(1-z_2)(1-k^2 z_2)]}}{1+\lambda\mu z_2} = \frac{2}{1-m_1}\sqrt{(1-m^2 y_1)},$$

$$41.\quad \frac{\sqrt{[(1-z_1)(1-k^2 z_1)]}}{(1+\lambda\mu z_1)} + \frac{\sqrt{[(1-z_2)(1-k^2 z_2)]}}{(1+\lambda\mu z_2)} = -\frac{2}{(1-m_1)}\sqrt{(1-m^2 y_2)}.$$

Quas omnes formulas etiam a priori ex tabula 4. derivare licet, dummodo eam ita proposuimus:

42.

| Valores ipsius $y$. | | Valores ipsius $z$. | |
|---|---|---|---|
| $y_1$ | $y_2$ | $z_1$ | $z_2$ |
| $-\infty$, | $\frac{1}{1-l_1^2 c_1^2}$, | $-\frac{1}{\lambda\mu}$, | $-\frac{1}{\lambda\mu}$, |
| 0, | 1, | 0, | $\infty$, |
| $\frac{1}{1+l_1 c_1}$, | $\frac{1}{1+l_1 c_1}$, | 1, | $\frac{1}{\lambda^2\mu^2}$, |
| $\frac{1}{1-l_1 c_1}$, | $\frac{1}{1-l_1 c_1}$, | $\frac{1}{k^2}$, | $\frac{k^2}{\lambda^2\mu^2}$, |
| $\frac{1}{l^2}$, | $\frac{1}{c^2}$, | $\frac{1}{\lambda^2}$, | $\frac{1}{\mu^2}$, |
| $\frac{1}{m^2}$, | $\frac{m_1^2}{m_1^2-l_1^2 c_1^2}$, | $\frac{1}{\lambda\mu}$, | $\frac{1}{\lambda\mu}$. |

Postremo e formulis antecedentibus adhuc has memorabiles inter argumenta $y_1$, $y_2$, $z_1$ et $z_2$ valentes derivamus:

$$43.\quad y_1 y_2 = \frac{4m_1^2}{(m_1^2-c_1^2 l_1^2)(1-m_1^2)}\cdot\frac{1}{(1+\lambda\mu z_1)(1+\lambda\mu z_2)},$$

$$= \frac{(k+\lambda\mu)^2(1+k)^2}{4k^2\lambda\mu}\cdot\frac{1}{(1+\lambda\mu z_1)(1+\lambda\mu z_2)},$$

$$44.\quad (1-y_1)(1-y_2) = \frac{4m_1^2 l_1^2 c_1^2}{(m_1^2-c_1^2 l_1^2)(1-m_1^2)}\cdot\frac{1}{(1+\lambda\mu z_1)(1+\lambda\mu z_2)},$$

$$= \frac{(k-\lambda\mu)^2(1-k)^2}{4k^2\lambda\mu}\cdot\frac{1}{(1+\lambda\mu z_1)(1+\lambda\mu z_2)},$$

$$45.\quad (1-c^2 y_1)(1-c^2 y_2) = -\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{(1-\lambda^2 z_1)(1-\lambda^2 z_2)}{(1+\lambda\mu z_1)(1+\lambda\mu z_2)}.$$

$$46.\quad = \frac{(1-l^2 y_1)(1-l^2 y_2)}{l_1^2} = -\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{(1-\mu^2 z_1)(1-\mu^2 z_2)}{(1+\lambda\mu z_1)(1+\lambda\mu z_2)},$$

47. $$\frac{(1-m^2 y_1)(1-m^2 y_2)}{m_1^2} = -\left(\frac{1-\lambda\mu z_1}{1+\lambda\mu z_1}\right)\left(\frac{1-\lambda\mu z_2}{1+\lambda\mu z_2}\right) =$$

48. $$\frac{m_1^2\left(1-\frac{m_1^2-c_1^2 l_1^2}{m_1^2}y_1\right)\left(1-\frac{m_1^2-c_1^2 l_1^2}{m_1^2}y_2\right)}{c_1^2 l_1^2} = -\left(\frac{(1-\lambda\mu z_1)(1-\lambda\mu z_2)}{(1+\lambda\mu z_1)(1+\lambda\mu z_2)}\right),$$

49. $$\frac{(1-(1-l_1 c_1)y_1)(1-(1-l_1 c_1)y_2)}{l_1 c_1} = -\left(\frac{\lambda\mu}{k^2}\cdot\frac{(1-k^2 z_1)(1-k^2 z_2)}{(1+\lambda\mu z_1)(1+\lambda\mu z_2)}\right),$$

50. $$\frac{(1-(1+l_1 c_1)y_1)(1-(1+l_1 c_1)y_2)}{l_1 c_1} = \lambda\mu\cdot\frac{(1-z_1)(1-z_2)}{(1+\lambda\mu z_1)(1+\lambda\mu z_2)}.$$

---

Iam vero nunc ad computationem integralium propositorum ex transformationibus nostris emergentem aggrediamur quam in altera parte commentationis absolvere nobis in animo est.

(Cont. seq.)

# 22.
# De transformatione integralium Abelianorum primi ordinis commentatio.

(Auctore *Fried. Jul. Richelot,* prof. in Academia Albertina Regiom.)

(Cont. diss. No. 21.)

---

## Caput secundum.
## De computatione integralium Abelianorum primi ordinis.

---

### XI.
#### Quomodo integralia proposita indefinita et definita per transformationes repetitas determinentur.

Transformationes in prioribus capitibus ex vero ipsarum fonte derivatae, et in articulo praecedente directe demonstratae facilem algorithmum computationis integralium Abelianorum primi ordinis et definitorum et indefinitorum suppeditant. Id quod, quomodo fiat, hic exponendum est.

Dum integralia definita, quippe quorum argumenta inter limites 0 et 1 continebantur, semper ad similia singula reduci vidimus, integralium indefinitorum singulum quodque ab 0 usque ad $z$ integratum ad bina revenit, quorum argumentum alterum ab 0, alterum vero ab alio limite proficiscitur, et adeo in secunda transformatione non in primo, sed in quinto integralis novi intervallo continetur. Ut igitur integralia indefinita, aeque ac definita ad transformationem symmetricam reducamus, ante omnia secundum integrale per idoneam transformationem fundamentalem ita transformandum erit, ut ipsius argumentum in intervallo $0 \dots 1$, simul cum argumento dato $z$, ab 0 progrediatur.

Quem ad finem in prima transformatione ex art. IX. revocemus theorema prius, quod hac aequat. integrali (23.) exhibetur:

$$1. \quad \int_0^z \frac{(\alpha-\beta z)dz}{\sqrt{(\Delta z)}} = \int_0^{y_1} \frac{(\alpha'-\beta' y_1)dy_1}{\sqrt{(\Delta' y_1)}} - \int_1^{y_2} \frac{(\alpha'-\beta' y_2)dy_2}{\sqrt{(\Delta' y_2)}},$$

ubi moduli et formulae eodem loco leguntur. Argumentum $y_2$, argumento $z$ ab 0 crescente, ab unitate in primo intervallo decrescit, quam ob causam integrale secundum per primam transformationem fundamentalem classis (*B.*) transformare velimus. Ponamus igitur:

$$y_2 = \frac{1-x}{1-k'^2 x},$$

qua formula introducta, erit, (vid. commentationis allatae art. III.)

$$2. \quad \int_1^{y_2} \frac{(\alpha'-\beta' y_2)\,dy_2}{\sqrt{[y_2(1-y_2)(1-k'^2y_2)(1-\lambda'^2y_2)(1-\mu'^2y_2)]}}$$
$$= -\left(\frac{1}{\lambda'_1\mu'_1}\right)\int_0^x \frac{[(\alpha'-\beta')-(\alpha'k'^2-\beta')x]\,dx}{\sqrt{[x(1-x)(1-k'^2x)(1-\lambda'^2x)(1-\mu'^2x)]}}.$$

Ut igitur argumentum $x$ ex argumento $z$ directe inveniamus, formulam antecedentem in formulam transformationis:

$$3. \quad \frac{1-(1-k'_1\lambda'_1)y_2}{1-(1+k_1\lambda'_1)y_2} = -\sqrt{\left(\frac{(1-k^2z)\left(1-\frac{\lambda^2\mu^2}{k^2}z\right)}{(1-z)(1-\lambda^2\mu^2 z)}\right)}$$

introducamus; unde fit:

$$4. \quad \frac{\lambda'_1-(\lambda'_1-k'_1)x}{\lambda'_1-(\lambda'_1+k'_1)x} = \sqrt{\left(\frac{(1-k^2z)\left(1-\frac{\lambda^2\mu^2}{k^2}z\right)}{(1-z)(1-\lambda^2\mu^2 z)}\right)}.$$

Ut vero totam transformationem uno in conspectu videamus, his denotationibus uti placet. Sit:

$$z = \sin^2\varphi, \qquad y_1 = \sin^2\varphi'_1, \qquad x = \sin^2\varphi'_2,$$

$$5. \begin{cases} \mu = m, & \lambda = l, & k = c, & \sqrt{\left(\frac{k^2-\mu^2}{1-\mu^2}\right)} = L, & \sqrt{\left(\frac{k^2-\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)} = M, \\ \mu' = m', & \lambda' = l', & k' = c', & \sqrt{\left(\frac{k'^2-\mu'^2}{1-\mu'^2}\right)} = L', & \sqrt{\left(\frac{k'^2-\lambda'^2}{1-\lambda'^2}\right)} = M', \\ \sqrt{(1-\mu^2)} = m_1, & \sqrt{(1-\lambda^2)} = l_1, & \sqrt{(1-k^2)} = c_1, & \frac{k_1}{\mu_1} = L_1, & \frac{k_1}{\lambda_1} = M_1, \\ \sqrt{(1-\mu'^2)} = m'_1, & \sqrt{(1-\lambda'^2)} = l'_1, & \sqrt{(1-k'^2)} = c'_1, & \sqrt{\left(\frac{1-k'^2}{1-\mu'^2}\right)} = L'_1, & \sqrt{\left(\frac{1-k'^2}{1-\lambda'^2}\right)} = M'_1. \end{cases}$$

Deinde ponamus:

$$\alpha = P_1, \quad \beta = Q_1, \quad \frac{\alpha-\beta}{\lambda_1\mu_1} = P_2, \quad \frac{\alpha k^2-\beta}{\lambda_1\mu_1} = Q_2;$$

unde sequuntur quatuor hae aequationes inter quantitates $P$ et $Q$:

$$6. \quad \begin{cases} P_1-Q_1 = P_2 l_1 m_1, \quad P_2-Q_2 = P_1 L_1 M_1, \\ P_1 c^2-Q_1 = Q_2 l_1 m_1, \quad P_2 c^2-Q_2 = Q_1 L_1 M_1, \end{cases}$$

quae docent, quantitates $P_2$ et $Q_2$ eodem modo compositas esse ex quantitatibus $P_1$, $Q_1$, $c$, $l$, $m$, ac quantitates $P_1$ et $Q_1$ ex quantitatibus $P_2$, $Q_2$, $L$, $M$.

Deinde ponamus:

$$\alpha' = P'_1, \quad \beta' = Q'_1, \quad \frac{\alpha'-\beta'}{\lambda'_1\mu'_1} = P'_2, \quad \frac{\alpha'k'^2-\beta'}{\lambda'_1\mu'_1} = Q'_2;$$

unde prorsus similes rationes inter novas quantitates $P'_1$, $Q'_1$, $P'_2$, $Q'_2$ oriuntur, ac antea, nimirum hae:

$$7.\quad \begin{cases} P'_1 - Q'_1 = P'_2 l_1 m'_1, & P'_2 - Q'_2 = P'_1 L'_1 M'_1, \\ P'_1 c'^2 - Q'_1 = Q'_2 l_1 m'_1, & P'_2 c'^2 - Q'_2 = Q'_1 L'_1 M'_1. \end{cases}$$

His denotationibus adhibitis, ex aequationibus (1.) et (2.) hanc nanciscimur:

$$8.\quad \int_0^{\varphi} \frac{(P_1 - Q_1 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c^2\sin^2\varphi)(1-l^2\sin^2\varphi)(1-m^2\sin^2\varphi)]}}$$

$$= \int_0^{\varphi'_1} \frac{(P'_1 - Q'_1 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c'^2\sin^2\varphi)(1-l'^2\sin^2\varphi)(1-m'^2\sin^2\varphi)]}}$$

$$+ \int_0^{\varphi'_2} \frac{(P'_2 - Q'_2 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c'^2\sin\varphi)(1-L'^2\sin^2\varphi)(1-M'^2\sin^2\varphi)]}}.$$

Moduli novi per has aequationes determinantur, quae ex formula (23.) mutatis mutandis sequuntur:

$$9.\quad \begin{cases} m_1'^2 = \left(\frac{c-lm}{c+lm}\right)^2, \\ l_1'^2 = \left(\frac{1-c}{1+c}\right)\left(\frac{c-lm}{c+lm}\right)\left(\frac{c+LM}{c-LM}\right), \\ c_1'^2 = \left(\frac{1-c}{1+c}\right)\left(\frac{c-lm}{c+lm}\right)\left(\frac{c-LM}{c+LM}\right), \\ L_1'^2 = \left(\frac{1-c}{1+c}\right)\left(\frac{c+lm}{c-lm}\right)\left(\frac{c-LM}{c+LM}\right), \\ M_1'^2 = \left(\frac{c-LM}{c+LM}\right)^2. \end{cases}$$

Coefficientes vero novi $P'$, $Q'$ ex coefficientibus $P$, $Q$, determinantur ope formularum:

$$10.\quad \begin{cases} P'_1 = \frac{1}{(c+lm)(1+c)}\,(P_1 c + Q_1), \\ Q'_1 = \frac{2c}{(c+lm)^2(1+c)}\,(P_1 lm + Q_1), \\ P'_2 = \frac{1}{(c+LM)(1+c)}\,(P_2 c + Q_2), \\ Q'_2 = \frac{2c}{(c+LM)^2(1+c)}\,(P_2 LM + Q_2). \end{cases}$$

Quarum priores ex formulis (24.) art. IX. mutatis mutandis sponte prodeunt, et posteriores ita eruuntur. Habemus ex aequationibus (7.)

$$P'_2 = \frac{P'_1 - Q'_1}{l'_1 m'_1}, \quad Q'_2 = \frac{P'_1 c'^2 - Q'_1}{l'_1 m'_1},$$

unde nanciscimur, valoribus ipsorum $P'_1$ et $Q'_1$ (formul. 10.) substitutis:

$$11.\quad \begin{cases} P'_2 = \frac{1}{(c+lm)(1+c)} \cdot \frac{(P_1 c - Q_1)}{l'_1}, \\ Q'_2 = \frac{2c}{(c+lm)(1+c)^2(c+LM)}\left[\frac{P_1(c^2+LM) - Q_1(1+LM)}{l'_1}\right]. \end{cases}$$

Hic valoribus ipsorum $P_1$, $Q_1$, ex formul. (6.) introductis, erit:

$$12.\quad \begin{cases} P'_2 = \dfrac{L'_1}{(c+lm)_{L_1M_1}}(P_2c+Q_2), \\ Q'_2 = \dfrac{2L'_1c}{(c+lm)(c+LM)_{L_1M_1}}(P_2LM+Q_2). \end{cases}$$

Iam vero habemus ex aequat. (5.)

$$L_1M_1 = \frac{c_1^2}{l_1m_1}$$

atque:

$$l_1^2m_1^2(c^2-L^2M^2) = (1-c^2)(c^2-l^2m^2),$$

quibus aequationibus in valore ipsius $L'_1$ adhibitis, sequitur:

$$P'_2 = \frac{1}{(c+LM)(1+c)}(P_2c+Q_2),\quad Q'_2 = \frac{2c}{(c+LM)^2(1+c)}(P_2LM+Q_2).$$

Iam vero magis arridet quantitates $P'$, $Q'$ per modulos novos exprimere. Quo facto habemus:

$$13.\quad \begin{cases} P'_1 = \left[\dfrac{1+m'_1}{4}\cdot\dfrac{m'_1+c'_1l'_1}{m'_1-c'_1l'_1}\right]\left[P_1\left(1-\dfrac{c'_1l'_1}{m'_1}\right)+Q_1\left(1+\dfrac{c'_1l'_1}{m'_1}\right)\right], \\ Q'_1 = \left[\dfrac{1+m'_1}{4}\cdot\dfrac{m'_1+c'_1l'_1}{m'_1-c'_1l'_1}\right]\left[P_1\left(1-\dfrac{c'_1l'_1}{m'_1}\right)(1-m'_1)+Q_1\left(1+\dfrac{c'_1l'_1}{m'_1}\right)(1+m'_1)\right], \\ P'_2 = \left[\dfrac{1+M'_1}{4}\cdot\dfrac{M'_1+c'_1L'_1}{M'_1-c'_1L'_1}\right]\left[P_2\left(1-\dfrac{c'_1L'_1}{M'_1}\right)+Q_2\left(1+\dfrac{c'_1L'_1}{M'_1}\right)\right], \\ Q'_2 = \left[\dfrac{1+M'_1}{4}\cdot\dfrac{M'_1+c'_1L'_1}{M'_1-c'_1L'_1}\right]\left[P_2\left(1-\dfrac{c'_1L'_1}{M'_1}\right)(1-M'_1)+Q_2\left(1+\dfrac{c'_1L'_1}{M'_1}\right)(1+M'_1)\right]. \end{cases}$$

Sive si $P'_2$ et $Q'_2$ per $P_1$, $Q_1$, $c'$, $l'$, $m'$ exprimere malimus:

$$14.\quad \begin{cases} P'_2 = \left[\dfrac{1+m'_1}{4l'_1}\cdot\dfrac{m'_1+c'_1l'_1}{m'_1-c'_1l'_1}\right]\left[P_1\left(1-\dfrac{c'_1l'_1}{m'_1}\right)-Q_1\left(1+\dfrac{c'_1l'_1}{m'_1}\right)\right], \\ Q'_2 = \left[\dfrac{1+m'_1}{4l'_1}\cdot\dfrac{m'_1+c'_1l'_1}{m'_1-c'_1l'_1}\right]\left[P_1\left(1-\dfrac{c'_1l'_1}{m'_1}\right)\left(1-\dfrac{c'^2_1}{m'_1}\right)-Q_1\left(1+\dfrac{c'_1l'_1}{m'_1}\right)\left(1+\dfrac{c'^2_1}{m'_1}\right)\right]. \end{cases}$$

Anguli $\varphi'_1$, $\varphi'_2$, minimo positivo valore gaudentes e numero eorum erunt, quorum sinus dantur hac formula:

$$15.\quad \frac{1-(1-l'_1c'_1)\sin^2\varphi'_1}{1-(1+l'_1c'_1)\sin^2\varphi'_1} = \frac{\sqrt{\left[(1-c^2\sin^2\varphi)\left(1-\dfrac{l^2m^2}{c^2}\sin^2\varphi\right)\right]}}{\cos\varphi\sqrt{(1-l^2m^2\sin^2\varphi)}} = \frac{1-(1-M'_1)\sin^2\varphi'_2}{1-(1+M'_1)\sin^2\varphi'_2},$$

atque inter argumenta $\varphi'_1$ et $\varphi'_2$, quae ambo per argumentum $\varphi$ exprimuntur, haec aequatio datur:

$$16.\quad \operatorname{tang}\varphi'_2 = l_1\operatorname{tang}\varphi'_1.$$

Adnotemus adhuc, ex hac transformatione integralium indefinitorum duplicem integralis definiti determinationem oriri. Nimirum habemus, iisdem

denotationibus adhibitis, has formulas:

$$17.\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P_1 - Q_1 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c^2\sin^2\varphi)(1-l^2\sin^2\varphi)(1-m^2\sin^2\varphi)]}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P_2 - Q_2 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c^2\sin^2\varphi)(1-\mathrm{L}^2\sin^2\varphi)(1-\mathrm{M}^2\sin^2\varphi)]}}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P'_1 - Q'_1 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c'^2\sin^2\varphi)(1-l'^2\sin^2\varphi)(1-m'^2\sin^2\varphi)]}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P'_2 - Q'_2 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c'^2\sin^2\varphi)(1-l'^2\sin^2\varphi)(1-m'^2\sin^2\varphi)]}}.\end{aligned}\right.$$

Sed etiam tertio modo integrale definitum exprimere licet. Nimirum in transformatione generali posito $\varphi = \frac{\pi}{2}$, nanciscimur hos valores argumentorum $\varphi'_1$ et $\varphi'_2$:

$$\sin\varphi'_1 = \frac{1}{\sqrt{(1+c'_1 l'_1)}}, \quad \sin\varphi'_2 = \frac{1}{\sqrt{(1+\mathrm{M}'_1)}},$$

sive:

$$\operatorname{tang}\varphi'_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{c'_1 l'_1}\right)}, \quad \operatorname{tang}\varphi'_2 = \sqrt{\frac{l'_1}{c'_1}} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{M}'_1}}.$$

Aequatio vero integralis fit:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P_1 - Q_1 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c^2\sin^2\varphi)(1-l^2\sin^2\varphi)(1-m^2\sin^2\varphi)]}}$$

$$= \int_0^{\operatorname{arctang} = \sqrt{\left(\frac{1}{c'_1 l'_1}\right)}} \frac{(P'_1 - Q'_1 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c'^2\sin^2\varphi)(1-l'^2\sin^2\varphi)(1-m'^2\sin^2\varphi)]}}$$

$$+ \int_0^{\operatorname{arctang} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{M}'_1}}} \frac{(P'_2 - Q'_2 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c'^2\sin^2\varphi)(1-\mathrm{L}'^2\sin^2\varphi)(1-\mathrm{M}'^2\sin^2\varphi)]}}.$$

Si vero numeratores ad hanc formam:

$$(R\cos^2\varphi + S\sin^2\varphi)$$

applicare velimus, ponamus necesse est:

$$18.\quad \left\{\begin{aligned}&P_1 = R_1, \quad Q_1 = R_1 - S_1, \quad P_2 = R_2, \quad Q_2 = R_2 - S_2,\\ &P'_1 = R'_1, \quad Q'_1 = R'_1 - S'_1, \quad P'_2 = R'_2, \quad Q'_2 = R'_2 - S'_2,\end{aligned}\right.$$

quibus valoribus in formulis (6.), (7.), (10.), (11.), (13.) et (14.) substitutis, hae prodibunt aequationes:

$$19.\quad \left\{\begin{aligned}&S_1 = R_2\, l_1 m_1, \quad S'_1 = R'_2 l'_1 m'_1,\\ &S_2 = R_1 \mathrm{L}_1 \mathrm{M}_1, \quad S'_2 = R'_2 \mathrm{L}'_1 \mathrm{M}'_1,\end{aligned}\right.$$

$$20.\quad \left\{\begin{aligned}R'_1 &= \frac{(1+c)R_1 - S_1}{(1+c)(c+lm)} = \left(\frac{1+m'_1}{4m'_1}\right)\left(\frac{m'_1 + c'_1 l'_1}{m'_1 - c'_1 l'_1}\right)[2m'_1 R_1 - (m'_1 + c'_1 l'_1) S_1],\\ S'_1 &= \left[\frac{S_1 - (1-c)R_1}{(1+c)(c+lm)}\right] m'_1 = \left(\frac{1+m'_1}{4}\right)\left(\frac{m'_1 + c'_1 l'_1}{m'_1 - c'_1 l'_1}\right)[(m'_1 + c'_1 l'_1) S_1 - 2c'_1 l'_1 R_1],\\ R'_2 &= \frac{(1+c)R_2 - S_2}{(1+c)(c+\mathrm{LM})} = \frac{1+\mathrm{M}'_1}{4\mathrm{M}'_1} \cdot \frac{\mathrm{M}'_1 + c'_1 \mathrm{L}'_1}{\mathrm{M}'_1 - c'_1 \mathrm{L}'_1}\,[2\mathrm{M}'_1 R_2 - (\mathrm{M}'_1 + c'_1 \mathrm{L}'_1) S_2],\\ S'_2 &= \frac{S_2 - (1-c)R_2}{(1+c)(c+\mathrm{LM})}\, \mathrm{M}'_1 = \frac{1+\mathrm{M}'_1}{4} \cdot \frac{\mathrm{M}'_1 + c'_1 \mathrm{L}'_1}{\mathrm{M}'_1 - c'_1 \mathrm{L}'_1}\,[(\mathrm{M}'_1 + c'_1 \mathrm{L}'_1) S_2 - 2c'_1 \mathrm{L}'_1 R_2],\end{aligned}\right.$$

vel si coefficientes $R_2'$ et $S_2'$ per $R_1 S_1$ exprimere malimus:

$$21.\quad \begin{cases} R_2' = \dfrac{S_1-(1-c)R_1}{(c+LM)l_1 m_1} = \dfrac{1+m_1'}{4l_1'm_1'}\cdot\dfrac{m_1'+c_1'l_1'}{m_1'-c_1'l_1'}\left[(m_1'+c_1'l_1')S_1-2c_1'l_1R_1\right], \\ S_2' = \dfrac{R_1(1+c)-S_1}{(c+LM)l_1 m_1}\cdot\dfrac{1-c}{1+c}\cdot\dfrac{c-LM}{c+LM} = \dfrac{1+m_1'}{4m_1'}\cdot\dfrac{m_1'+c_1'l_1'}{m_1'-c_1'l_1'}L_1'M_1'\left[2m_1'R_1-(m_1'+c_1'l_1')\delta\right]. \end{cases}$$

Aequationes vero integrales (8.) et (17.), brevitatis gratia posito:

$$\triangle(c,l,m) = \sqrt{[(1-c^2\sin^2\varphi)(1-l^2\sin^2\varphi)(1-m^2\sin^2\varphi)]},$$

in has abeunt:

$$22.\quad \int_0^{\varphi}\frac{(R_1\cos^2\varphi+S_1\sin^2\varphi)}{\triangle(c,l,m)}$$

$$= \int_0^{\varphi_1'}\frac{(R_1'\cos^2\varphi+S_1'\sin^2\varphi)d\varphi}{\triangle(c',l',m')}+\int_0^{\varphi_2'}\frac{(R_2'\cos^2\varphi+S_2'\sin^2\varphi)d\varphi}{\triangle(c',L',M')},$$

$$23.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(R_1\cos^2\varphi+S_1\sin^2\varphi)d\varphi}{\triangle(c,l,m)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(R_2\cos^2\varphi+S_2\sin^2\varphi)d\varphi}{\triangle(c,L,M)} \\ \displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(R_1'\cos^2\varphi+S_1'\sin^2\varphi)d\varphi}{\triangle(c',l',m')} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(R_2'\cos^2\varphi+S_2'\sin^2\varphi)d\varphi}{\triangle(c',L',M')}. \end{cases}$$

Denotationes nostrae iam ita praeparatae sunt, ut transformatio per eundem algorithmum continuata facillime hic proponi possit. Utrumque integrale indefinitum, ad quod in aequat. (8.) vel (22.) per primam transformationem devecti sumus, in duo nova integralia eadem ratione discerpitur, quorum argumenta coefficientes et moduli per easdem litteras, duplici virgula supra adiecta, designantur.

Primum igitur integrale termini secundi aequat. (8.)

$$\int_0^{\varphi_1}\frac{(P_1'-Q_1'\sin^2\varphi)d\varphi}{\sqrt{[(1-c'^2\sin^2\varphi)(1-l'^2\sin^2\varphi)(1-m'^2\sin^2\varphi)]}},$$

in haec duo nova transit:

$$24.\quad = \int_0^{\varphi_{1,1}''}\frac{(P_1''-Q_1''\sin^2\varphi)d\varphi}{\triangle(c'',l'',m'')}+\int_0^{\varphi_{1,2}''}\frac{(P_2''-Q_2''\sin^2\varphi)d\varphi}{\triangle(c'',L'',M'')},$$

ubi has aequationes ponimus:

$$25.\quad \begin{cases} P_1'' = \dfrac{1}{(c'+l'm')(1+c')}(P_1'c'+Q_1'), \\ Q_1'' = \dfrac{2c'}{(c'+l'm')^2(1+c')}(P_1'l'm'+Q_1'), \\ P_2'' = \dfrac{1}{(c'+L'M')(1+c')}(P_2'c'+Q_2'), \\ Q_2'' = \dfrac{2c'}{(c'+L'M')^2(1+c')}(P_2'l'm'+Q_2'). \end{cases}$$

$$26. \quad \begin{cases} m_1''^2 = \left(\frac{c'-l'm'}{c'+l'm'}\right)^2, \\ l_1''^2 = \left(\frac{1-c'}{1+c'}\right)\left(\frac{c'-l'm'}{c'+l'm'}\right)\left(\frac{c'+L'M'}{c'-L'M'}\right), \\ c_1''^2 = \left(\frac{1-c'}{1+c'}\right)\left(\frac{c'-l'm'}{c'+l'm'}\right)\left(\frac{c'-L'M'}{c'+L'M'}\right), \\ L_1''^2 = \left(\frac{1-c'}{1+c'}\right)\left(\frac{c'+l'm'}{c'-l'm'}\right)\left(\frac{c'-L'M'}{c'+L'M'}\right), \\ M_1''^2 = \left(\frac{c'-L'M'}{c'+L'M'}\right)^2, \end{cases}$$

$$27. \quad \left(\frac{1-(1-l_1''c_1'')\sin^2\varphi_{1,1}''}{1-(1+l_1''c_1'')\sin^2\varphi_{1,1}''}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\left[(1-c'^2\sin^2\varphi_1')\left(1-\frac{l'^2m'^2}{c'^2}\sin^2\varphi_1'\right)\right]}}{\cos\varphi_1'\sqrt{(1-l'^2m'^2\sin^2\varphi_1')}} = \left(\frac{1-(1-M_1'')\sin^2\varphi_{1,2}''}{1-(1+M_1'')\sin^2\varphi_{1,2}''}\right),$$

unde fluit haec rursus aequatio:

$$28. \quad \operatorname{tang}\varphi_{1,2}'' = l_1''\operatorname{tang}\varphi_{1,1}''.$$

Secundum vero integrale termini secundi aequat. (8.):

$$\int_0^{\varphi_2} \frac{(P_2'-Q_2'\sin^2\varphi)d\varphi}{\sqrt{[(1-c'^2\sin^2\varphi)(1-l'^2\sin^2\varphi)(1-m'^2\sin^2\varphi)]}}$$

in has transit:

$$29. \quad = \int_0^{\varphi_{2,1}''} \frac{(P_2''-Q_2''\sin^2\varphi)d\varphi}{\triangle(c'', L'', M'')} + \int_0^{\varphi_{2,2}''} \frac{(P_1''-Q_1''\sin^2\varphi)d\varphi}{\triangle(c'', l'', m'')},$$

ita ut nec ad duos novos numeratores, nec ad alios perveniamus modulos, sed eadem duo integralia, nonnisi limite superiori mutato, adipiscamur. Quippe quae similitudo memorabiles eo demonstratur, ut formulae (25.) doceant, quantitates $P_2''$, $Q_2''$, $m''$, $l''$, $c''$, $L''$, $M''$ eodem modo ex quantitatibus, $P_2'$, $Q_2'$, $m'$, $l'$, $c'$, $L'M'$ componi, ac $P_1''$, $Q_1''$, $M''$, $L''$, $c''$, $l''$, $m''$, ex $P_1'$, $Q_1'$, $M'$, $L'$, $c'$, $l'$, $m'$ componuntur.

Argumenta vero $\varphi_{2,1}''$ et $\varphi_{2,2}''$ nova sunt, atque ex his aequat. emanant, aeque ac in formulis (15.):

$$30. \quad \left(\frac{1-(1-L_1''c_1'')\sin^2\varphi_{2,1}''}{1-(1+L_1''c_1'')\sin^2\varphi_{2,1}''}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\left[(1-c'^2\sin^2\varphi_2')\left(1-\frac{L'^2M'^2}{c'^2}\sin^2\varphi_2'\right)\right]}}{\cos\varphi_2'\sqrt{(1-L'^2M'^2\sin^2\varphi_2')}} = \left(\frac{1-(1-m_1'')\sin^2\varphi_{2,2}''}{1-(1+m_1'')\sin^2\varphi_{2,2}''}\right),$$

unde haec aequatio prodit:

$$31. \quad \operatorname{tang}\varphi_{2,2}'' = L_1''\operatorname{tang}\varphi_{2,1}''.$$

Omnibus collectis hanc habemus integralis indefiniti transformationem:

$$32.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{(P_1 - Q_1 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c,\, l,\, m)} \\ \displaystyle = \int_0^{\varphi'_1} \frac{(P'_1 - Q'_1 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c',\, l',\, m')} + \int_0^{\varphi'_2} \frac{(P'_2 - Q'_2 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c',\, L',\, M')} \\ \displaystyle = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\varphi''_{1,1}} \frac{(P''_1 - Q''_1 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c'',\, l'',\, m'')} + \int_0^{\varphi''_{1,2}} \frac{(P''_2 - Q''_2 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c'',\, L'',\, M'')} \\ \displaystyle + \int_0^{\varphi''_{2,2}} \frac{(P''_1 - Q''_1 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c'',\, l'',\, m'')} + \int_0^{\varphi''_{2,1}} \frac{(P''_2 - Q''_2 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c'',\, L'',\, M'')} \end{array} \right\}. \end{cases}$$

Neminem fugere potest in quaque sequente transformatione, nonnisi duo diversa integralia prodire, sed diversis argumentorum limitibus gaudentia. Adhibito vero theoremate fundamentali Abeliano, quippe per quod quatuor integralium, quae iisdem modulis atque numeratoribus gaudent, aggregatum, ad duorum talium aggregatum reducitur, evictum est memorabilissimum hoc theorema:

„Integrale Abelianum primi ordinis indefinitum continuo transfor„mari potest in aggregata quaternorum prorsus novorum integralium eius„dem generis, quorum bina iisdem modulis atque numeratore, sed diversis „limitibus gaudent." Id quod theorema iam ante quatuor annos a nobis inventum ante annum et quod excurrit geometris praedicavimus.

Prior methodus transformationis definiti integralis continuata haud ad quaterna, sed ad singulum integrale definitum perducit. Nimirum habebimus:

$$33.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P_1 - Q_1 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c,\, l,\, m)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P'_1 - Q'_1 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c',\, l',\, m')} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P''_1 - Q''_1 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c'',\, l'',\, m'')} \text{ etc.} \\ \text{sive} \\ \displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P_2 - Q_2 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c,\, L,\, M)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P'_2 - Q'_2 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c',\, L',\, M')} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P''_2 - Q''_2 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c'',\, L'',\, M'')} \text{ etc.} \end{cases}$$

Altera vero methodus, ubi primum integrale definitum in duo discerpitur integralia definita, ad quaterna ducit integralia definita.

Similí ratione alteram transformationem in capitibus antecedentibus inventam atque demonstratam tractare licet, quippe quae in aequatione integrali (30.) art. IX. continetur, nimirum fuit aequatio haec:

$$34.\quad \int_0^{z} \frac{(\alpha(1-z)+\beta z)\,dz}{\sqrt{(\Delta z)}} = \pm \int_0^{y_1} \frac{\alpha^0(1-y)+\beta^0 y}{\sqrt{(\Delta^0 y)}} \pm \int_0^{y_2} \left[\frac{(\alpha^0(1-y)+\beta^0 y)\,dy}{\sqrt{(\Delta^0 y)}}\right],$$

cuius modulos, formulas limitesque argumentorum eodem loco invenis.

Duplex igitur hic discrimen ab antecedente transformatione observatur; primum integrale datum, argumento $z$ limitem $\frac{1}{1+k_1\lambda_1}$ transgresso, in duas partes dividendum erit: quarum prior in summam, posterior in differentiam duorum novorum integralium transit, deinde argumentum secundi novi integralis non in intervallo $0 \ldots\ldots 1$, sed in intervallo $\infty \ldots\ldots \frac{1}{\mu^{02}}$ versatur. Hanc ob causam, si integralis utriusque argumenta, simul cum argumento $z$, ab $0$ proficisci velimus, secundum integrale per quintam transformationem fundamentalem classis ($B$.) mutandum est. Itaque ponamus:

$$y_2 = \frac{1}{\mu^{02}x},$$

qua formula introducta, erit (vid. commentationis allatae art. III.)

$$35.\quad \int_{\infty}^{y_2} \frac{(\alpha^0(1-y)+\beta^0 y)\,dy}{\sqrt{[y(1-y)(1-k^{02}y)(1-\lambda^{02}y)(1-\mu^{02}y)]}}$$

$$= \frac{1}{k^0\lambda^0}\int_0^x \frac{((\alpha^0-\beta^0)(1-x)+(\alpha^0\mu_1^{02}-\beta^0)x)\,dx}{\sqrt{\left[x(1-x)\left(1-\left(\frac{\mu^{02}}{\lambda^{02}}\right)x\right)\left(1-\frac{\mu^{02}}{\lambda^{02}}x\right)(1-\mu^{02}x)\right]}}.$$

Ut argumentum $x$ ex dato argumento $z$ directe definiamus, formulam praecedentem in formulam transformationis argumenti $y_2$

$$\frac{1-\lambda^0\mu^0 y_2}{1+\lambda^0\mu^0 y_2} = -\sqrt{\left(\frac{(1-\mu^2 z)\left(1-\frac{\mu_1^2-k_1^2\lambda_1^2}{\mu_1^2}z\right)}{(1-(1-k_1^2\lambda_1^2)z)}\right)}$$

introducamus; quo facto habemus:

$$36.\quad \sqrt{\left(\frac{(1-\mu^2 z)\left(1-\frac{\mu_1^2-k_1^2\lambda_1^2}{\mu_1^2}z\right)}{(1-(1-k_1^2\lambda_1^2)z)}\right)} = \frac{1-\frac{\mu^0}{\lambda^0}x}{1+\frac{\mu^0}{\lambda^0}x}.$$

Etiam hic denotationes novas, ad analogiam perspiciendam aptissimas introducere placet. Sit:

$z = \sin^2\varphi,\quad y_1 = \sin^2\varphi_1^0,\quad x = \sin^2\varphi_2^0$ (pro superioribus signis aequat. 34.),

$z = \sin^2\psi,\quad y_1 = \sin^2\psi_1^0,\quad x = \sin^2\psi_2^0$ (pro inferioribus signis aequat. 34.),

$$37.\quad \begin{cases} k = c, & \lambda = l, & \mu = m, & \frac{\mu}{k} = \mathfrak{l}, & \frac{\mu}{\lambda} = \mathfrak{t}, \\ k^0 = c^0, & \lambda^0 = l^0, & \mu^0 = m^0, & \frac{\mu^0}{k^0} = \mathfrak{l}^0, & \frac{\mu^0}{\lambda^0} = \mathfrak{t}^0, \\ \sqrt{(1-k^2)} = c_1, & \sqrt{(1-\lambda^2)} = l_1, & \sqrt{(1-\mu^2)} = m_1, & \sqrt{\left(\frac{k^2-\mu^2}{k^2}\right)} = \mathfrak{l}_1, & \sqrt{\left(\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2}\right)} = \mathfrak{t}_1, \\ \sqrt{(1-k^{02})} = c_1^0, & \sqrt{(1-\lambda^{02})} = \lambda_1^0, & \sqrt{(1-\mu^{02})} = \mu_1^0, & \sqrt{\left(\frac{k^{02}-\mu^{\prime 2}}{\mu^{02}}\right)} = \mathfrak{l}_1^0, & \sqrt{\left(\frac{\lambda^{02}-\mu^{02}}{\lambda^{02}}\right)} = \mathfrak{t}_1^0. \end{cases}$$

Deinde ponamus:

$$38.\quad \begin{cases} \alpha = \Pi_1, \quad \beta = \mathrm{K}_1, \quad \dfrac{\alpha-\beta}{k\lambda} = \Pi_2, \quad \dfrac{\alpha\mu_1^2-\beta}{k\lambda} = \mathrm{K}_2, \\ \alpha^0 = \Pi_1^0, \quad \beta^0 = \mathrm{K}_1^0, \quad \dfrac{\alpha^0-\beta^0}{k^0\lambda^0} = \Pi_2^0, \quad \dfrac{\alpha^0\mu_1^{0\,2}-\beta^0}{k^0\lambda^0} = \mathrm{K}_2^0, \end{cases}$$

ita ut habeamus aequationes symmetricas has:

$$39.\quad \begin{cases} \Pi_1-\mathrm{K}_1 = c\,l\,\Pi_2, & \Pi_2-\mathrm{K}_2 = \mathfrak{k}\,\mathfrak{l}\,\Pi_1, \\ \Pi_1 m_1^2-\mathrm{K}_1 = c\,l\,\mathrm{K}_2, & \Pi_2 m_1^2-\mathrm{K}_2 = \mathfrak{k}\,\mathfrak{l}\,\mathrm{K}_1, \\ \Pi_1^0-\mathrm{K}_1^0 = c^0 l^0 \Pi_2^0, & \Pi_2^0-\mathrm{K}_2^0 = \mathfrak{k}^0\mathfrak{l}^0\Pi_1^0, \\ \Pi_1^0 m_1^{0\,2}-\mathrm{K}_1^0 = c^0 l^0 \mathrm{K}_2^0, & \Pi_2^0 m_1^{0\,2} - \mathrm{K}_2^0 = \mathfrak{k}^0\mathfrak{l}^0\mathrm{K}_1^0. \end{cases}$$

His denotationibus introductis ex aequationibus (34.) et (35.) adipiscimur has:

$$40.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{(\Pi_1\cos^2\varphi+\mathrm{K}_1\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(c,l,m)} \\ \displaystyle = \int_0^{\varphi_1^0} \frac{(\Pi_1^0\cos^2\varphi+\mathrm{K}_1^0\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(c^0,l^0,m^0)} + \int_0^{\varphi_2^0} \frac{(\Pi_2^0\cos^2\varphi+\mathrm{K}_2^0\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(\mathfrak{k}^0,\mathfrak{l}^0,m^0)}, \\ \displaystyle\int_{\arcsin=\frac{1}{\sqrt{(1+c_1l_1)}}}^{\psi} \frac{(\Pi_1\cos^2\varphi+\mathrm{K}_1\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(c,l,m)} \\ \displaystyle = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi_1^0} \frac{(\Pi_1^0\cos^2\psi+\mathrm{K}_1^0\sin^2\psi)d\psi}{\Delta(c^0,l^0,m)} + \int_{\arcsin=\mathfrak{l}^0}^{\psi_2^0} \frac{(\Pi_2^0\cos^2\psi+\mathrm{K}_2^0\sin^2\psi)d\psi}{\Delta(\mathfrak{k}^0,\mathfrak{l}^0,m^0)}. \end{cases}$$

Moduli novi his aequat. dantur:

$$41.\quad \begin{cases} c^{0\,2} = \left(\dfrac{m_1-c_1l_1}{m_1+c_1l_1}\right)^2, \\ l^{0\,2} = \left(\dfrac{1-m_1}{1+m_1}\right)\left(\dfrac{m_1-c_1l_1}{m_1+c_1l_1}\right)\left(\dfrac{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1-\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}\right), \\ m^{0\,2} = \left(\dfrac{1-m_1}{1+m_1}\right)\left(\dfrac{m_1-c_1l_1}{m_1+c_1l_1}\right)\left(\dfrac{m_1-\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}\right), \\ \mathfrak{l}^{0\,2} = \left(\dfrac{1-m_1}{1+m_1}\right)\left(\dfrac{m_1+c_1l_1}{m_1-c_1l_1}\right)\left(\dfrac{m_1-\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}\right), \\ \mathfrak{k}^{0\,2} = \left(\dfrac{m_1-\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}\right)^2. \end{cases}$$

Numeratorum coefficientes ex his aequat. determinantur:

$$42.\quad \begin{cases} \Pi_1^0 = \dfrac{1}{(m_1+c_1l_1)(1+m_1)}(\Pi_1 m_1+\mathrm{K}_1), \\ \mathrm{K}_1^0 = \dfrac{2m_1}{(m_1+c_1l_1)^2(1+m_1)}(\Pi_1 c_1 l_1+\mathrm{K}_1), \\ \Pi_2^0 = \dfrac{1}{(m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1)(1+m_1)}(\Pi_2 m_1+\mathrm{K}_2), \\ \mathrm{K}_2^0 = \dfrac{2m_1}{(m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1)^2(1+m_1)}(\Pi_2\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1+\mathrm{K}_2). \end{cases}$$

Sive si hos coefficientes per novos modulos praeferamus exprimere:

$$43.\quad\begin{cases} \Pi_1^0 = \left(\frac{1+c^0}{4}\cdot\frac{c^0+l^0m^0}{c^0-l^0m^0}\right)\left(\Pi_1\left(1-\frac{m^0l^0}{c^0}\right)+\mathrm{K}_1\left(1+\frac{m^0l^0}{c^0}\right)\right), \\ \mathrm{K}_1^0 = \left(\frac{1+c^0}{4}\cdot\frac{c^0+l^0m^0}{c^0-l^0m^0}\right)\left(\Pi_1\left(1-\frac{m^0l^0}{c^0}\right)(1-c^0)+\mathrm{K}_1\left(1+\frac{m^0l^0}{c^0}\right)(1+c^0)\right), \\ \Pi_2^0 = \left(\frac{1+\mathfrak{k}^0}{4}\cdot\frac{\mathfrak{k}^0+\mathfrak{l}^0m^0}{\mathfrak{k}^0-\mathfrak{l}^0m^0}\right)\left(\Pi_2\left(1-\frac{m^0\mathfrak{l}^0}{\mathfrak{k}^0}\right)+\mathrm{K}_2\left(1+\frac{m^0\mathfrak{l}^0}{\mathfrak{k}^0}\right)\right), \\ \mathrm{K}_2^0 = \left(\frac{1+\mathfrak{k}^0}{4}\cdot\frac{\mathfrak{k}^0+\mathfrak{l}^0m^0}{\mathfrak{k}^0-\mathfrak{l}^0m^0}\right)\left(\Pi_2\left(1-\frac{m^0\mathfrak{l}^0}{\mathfrak{k}^0}\right)(1-\mathfrak{k}^0)+\mathrm{K}_2\left(1+\frac{m^0\mathfrak{l}^0}{\mathfrak{k}^0}\right)(1+\mathfrak{k}^0)\right). \end{cases}$$

Anguli $\varphi_1^0$ et $\varphi_2^0$, $\psi_1^0$ et $\psi_2^0$, minimi positivi sunt, quorum sinus ex his formulis deducuntur:

$$44.\quad\begin{cases} \left(\frac{1-l^0m^0\sin^2\varphi_1^0}{1+l^0m^0\sin^2\varphi_1^0}\right) = \sqrt{\left(\frac{(1-m^2\sin^2\varphi)\left(1-\frac{m_1^2-c_1^2l_1^2}{m_1^2}\sin^2\varphi\right)}{(1-(1-c_1^2l_1^2)\sin^2\varphi)}\right)} = \frac{1-\mathfrak{k}^0\sin^2\varphi_2^0}{1+\mathfrak{k}^0\sin^2\varphi_2^0}, \\ \left(\frac{1-l^0m^0\sin^2\psi_1^0}{1+l^0m^0\sin^2\psi_1^0}\right) = \sqrt{\left(\frac{(1-m^2\sin^2\psi)\left(1-\frac{m_1^2-c_1^2l_1^2}{m_1^2}\sin^2\psi\right)}{(1-(1-c_1^2l_1^2)\sin^2\varphi)}\right)} = \frac{1-\mathfrak{k}^0\sin^2\psi_2^0}{1+\mathfrak{k}^0\sin^2\psi_2^0}, \end{cases}$$

ubi argumentum $\varphi$ ab 0 usque ad $\arcsin = \frac{1}{\sqrt{(1+c_1l_1)}}$, argumentum vero $\psi$ ab $\arcsin\frac{1}{\sqrt{(1+c_1l_1)}}$ usque ad $\frac{\pi}{2}$ pergit. Inter argumenta denique nova regnat haec aequatio:

$$45.\quad \sin\varphi_2^0 = l^0\sin\varphi_1^0,\quad \sin\psi_2^0 = l^0\sin\psi_1^0.$$

Quod attinet ad integralium definitorum transformationem inde ex hac theoria sequentem, facile relationes deducimus has:

$$46.\quad\begin{cases} \int_0^{\arcsin=\frac{1}{\sqrt{(1+c_1l_1)}}}\frac{(\Pi_1\cos^2\varphi+\mathrm{K}_1\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(c,l,m)} \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\Pi_1^0\cos^2\varphi+\mathrm{K}_1^0\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(c^0,l^0,m^0)}+\int_0^{\arcsin=\frac{m^0}{\mathfrak{k}^0}}\frac{(\Pi_2^0\cos^2\varphi+\mathrm{K}_2\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(\mathfrak{k}^0,\mathfrak{l}^0,m^0)}, \\ \int_{\arcsin=\frac{1}{\sqrt{(1+c_1l_1)}}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\Pi_1\cos^2\varphi+\mathrm{K}\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(c,l,m)} \\ = +\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\Pi_1^0\cos^2\varphi+\mathrm{K}_1^0\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(c^0,l^0,m^0)}-\int_0^{\arcsin=\frac{m^0}{\mathfrak{k}^0}}\frac{(\Pi_2^0\cos^2\varphi+\mathrm{K}_1^0\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(\mathfrak{k}^0,\mathfrak{l}^0,m^0)}, \end{cases}$$

unde sequitur:

$$47.\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\Pi_1\cos^2\varphi+\mathrm{K}_1\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(c,l,m)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\Pi_1^0\cos^2\varphi+\mathrm{K}_1^0\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(c^0,l^0,m^0)}.$$

Si numeratoribus formam:

$$(\mathrm{P}-\Sigma\sin^2\varphi)$$

tribuere velimus, ponamus necesse est:

$$\Pi_1=\mathrm{P}_1,\quad \mathrm{K}_1=\mathrm{P}_1-\Sigma_1,\quad \Pi_2=\mathrm{P}_2,\quad \mathrm{K}_2=\mathrm{P}_2-\Sigma_2,$$
$$\Pi_1^0=\mathrm{P}_1^0,\quad \mathrm{K}_1^0=\mathrm{P}_1^0-\Sigma_1^0,\quad \Pi_2^0=\mathrm{P}_2^0,\quad \mathrm{K}_2^0=\mathrm{P}_2^0-\Sigma_2^0,$$

quibus valoribus in form. (39.), (40.), (42.), (43.), (47.) substitutis, habemus has aequationes et formulas:

$$48.\ \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\varphi}\frac{(\mathrm{P}_1-\Sigma_1\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(clm)} \\ \displaystyle= \int_0^{\varphi_1^0}\frac{(\mathrm{P}_1^0-\Sigma_1^0\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(c^0,l^0,m^0)}+\int_0^{\varphi_2^0}\frac{(\mathrm{P}_2^0-\Sigma_2^0\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(\mathfrak{k}^0,\mathfrak{l}^0,m^0)}, \\ \displaystyle\int_{\arcsin=\frac{1}{\sqrt{(1+c_1l_1)}}}^{\psi}\frac{(\mathrm{P}_1-\Sigma_1\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(clm)} \\ \displaystyle= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi_1^0}\frac{(\mathrm{P}_1^0-\Sigma_1^0\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(c^0,l^0,m^0)}+\int_{\arcsin=l^0}^{\psi_2^0}\frac{(\mathrm{P}_2^0-\Sigma_2^0\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(\mathfrak{k}^0,\mathfrak{l}^0,m^0)}, \end{cases}$$

$$49.\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\mathrm{P}_1-\Sigma_1\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(c,l,m)}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\mathrm{P}_1^0-\Sigma_1^0\sin^2\varphi)d\varphi}{\Delta(c^0,l^0,m^0)},$$

$$50.\quad \begin{cases}\Sigma_1=\mathrm{P}_2cl, & \Sigma_1^0=\mathrm{P}_2^0c^0l^0,\\ \Sigma_2=\mathrm{P}_1\mathfrak{k}\mathfrak{l}, & \Sigma_2^0=\mathrm{P}_1\mathfrak{k}^0\mathfrak{l}^0,\end{cases}$$

$$51.\quad \begin{cases}\mathrm{P}_1^0=\dfrac{(1+m_1)\mathrm{P}_1-\Sigma_1}{(1+m_1)(m_1+c_1l_1)},\\ \Sigma_1^0=\Big(\dfrac{\Sigma_1-(1-m_1)\mathrm{P}_1}{(1+m_1)(m_1+c_1l_1)}\Big)\Big(\dfrac{m_1-c_1l_1}{m_1+c_1l_1}\Big),\\ \mathrm{P}_2^0=\dfrac{(1+m_1)\mathrm{P}_2-\Sigma_2}{(1+m_1)(m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1)},\\ \Sigma_2^0=\Big(\dfrac{\Sigma_2-(1-m_1)\mathrm{P}_2}{(1+m_1)(m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1)}\Big)\Big(\dfrac{m_1-\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}\Big).\end{cases}$$

Primo adspectu apparet, quantitates in hac transformatione adhibitas:

$$m^0,\ l^0,\ c^0,\ \mathfrak{l}^0,\ \mathfrak{k}^0,\ \Pi_1^0,\ \mathrm{K}_1^0,\ \Pi_2^0,\ \mathrm{K}_2^0,$$

ex similibus in ordinem prioris transformationis:

$$c_1',\ l_1',\ m_1',\ L_1',\ M_1',\ P_1',\ Q_1',\ P_2',\ Q_2',$$

protinus emergere, ubique loco quantitatum:

$$m,\ l,\ c,\ \mathfrak{l},\ \mathfrak{k},\ \Pi_1,\ \mathrm{K}_1,\ \Pi_2,\ \mathrm{K}_2\ \text{etc.}$$

positis in ordinem:

$$c_1,\ l_1,\ m_1,\ L_1,\ M_1,\ \mathrm{P}_1,\ Q_1,\ P_2,\ Q_2,\ \text{etc.}$$

Id quod ex natura ipsa utriusque transformationis sponte prodit. Formulae enim transformationis posterioris ex formulis prioris extemplo oriuntur, posito:

$$\sin\varphi = i\tang\varphi,\quad \sin\varphi_1^0 = i\tang\varphi_1',\quad \sin\varphi_2^0 = i\tang\varphi_2',$$

sive quod idem est, in utroque termino sexta classis *B*. transformatione fundamentali adhibita. Iam vero haec transformatio integrale

$$\int^{\cdot}\frac{(P_1 - Q_1\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\triangle(clm)}$$

commutat in integrale:

$$(\sqrt{-1})\int^{\cdot}\frac{(P_1\cos^{2\prime}\varphi + Q_1\sin^{2\prime}\varphi)\,d'\varphi}{\triangle(m_1,\, l_1,\, c_1)}$$

unde illa quantitatum commutatio antea observata sponte oritur. Formulae transformationis, illa mutatione facta, una ex altera, prodeunt; nimirum sit:

$$\frac{1-(1-l_1'c_1')\sin^2\varphi_1'}{1-(1+l_1'c_1')\sin^2\varphi_1'} = \frac{1-l^0m^0\sin^2\varphi_1^0}{1+l^0m^0\sin^2\varphi_1^0},$$

$$\frac{1-(1-\varkappa_1')\sin^2\varphi_2'}{1-(1+\varkappa_1')\sin^2\varphi_2'} = \frac{1-\mathfrak{f}^0\sin^2\varphi_2^0}{1+\mathfrak{f}^0\sin^2\varphi_2^0},$$

$$\frac{(1-c^2\sin^2\varphi)\left(1-\frac{l^2m^2}{c^2}\sin^2\varphi\right)}{\cos^2\varphi(1-m^2l^2)\sin^2\varphi} = \frac{(1-m^2\sin^{2\prime}\varphi)\left(1-\frac{m_1^2-c_1^2l_1^2}{m_1^2}\sin^{2\prime}\varphi\right)}{(1-(1-c_1^2l_1^2)\sin^{2\prime}\varphi)}.$$

Etiam haec secunda transformatio continuata ad integralia definita integraliaque indefinita adhibetur determinanda. Quaterni rursus nonnisi numeratoris coefficientes, quinternique moduli computandi sunt; nimirum in sequenti transformatione hae quantitates:

$$\Pi_1^{(00)},\quad \mathrm{K}_1^{(00)},\quad \Pi_2^{(00)},\quad \mathrm{K}_2^{(00)},\quad c^{(00)},\quad l^{(00)},\quad m^{(00)},\quad \mathfrak{l}^{(00)},\quad \mathfrak{f}^{(00)},$$

quae aeque ex quantitatibus:

$$\Pi_1^0,\quad \mathrm{K}_1^0,\quad \Pi_2^0,\quad \mathrm{K}_2^0,\quad c^0,\quad l^0,\quad m^0,\quad \mathfrak{l}^0,\quad \mathfrak{f}^0,$$

ac hae ex quantitatibus:

$$\Pi_1,\quad \mathrm{K}_1,\quad \Pi_2,\quad \mathrm{K}_2,\quad c,\quad l,\quad m,\quad \mathfrak{l},\quad \mathfrak{f}$$

computantur. Argumenta nova $\varphi_{1,1}^{(00)}$, $\varphi_{1,2}^{(00)}$, $\varphi_{2,1}^{(00)}$, $\varphi_{2,2}^{(00)}$ ex formulis

$$\frac{1-l^{00}m^{00}\sin^2\varphi_{1,1}^{00}}{1+l^{00}m^{00}\sin^2\varphi_{1,1}^{00}} = \sqrt{\left(\frac{(1-m_1^{(0)2}\sin^2\varphi_1^0)\left(1-\frac{m_1^{(0)2}-c_1^{(0)2}l_1^{(0)2}}{m_1^{(0)2}}\sin^2\varphi_1^0\right)}{(1-(1-c_1^{(0)2}l_1^{(0)2})\sin^2\varphi_1^0)}\right)} = \frac{1-\mathfrak{f}^{00}\sin^2\varphi_{1,2}^{00}}{1+\mathfrak{f}^{00}\sin^2\varphi_{1,2}^{00}},$$

$$\frac{1-l^{00}m^{00}\sin^2\varphi_{2,1}^{00}}{1+l^{00}m^{00}\sin^2\varphi_{2,1}^{00}} = \sqrt{\left(\frac{(1-m_1^{(0)2}\sin^2\varphi_2^0)\left(1-\frac{m_1^{(0)2}-\mathfrak{f}_1^{(0)2}\mathfrak{l}_1^{(0)2}}{m_1^{(0)2}}\sin^2\varphi_2^0\right)}{(1-(1-\mathfrak{f}_1^{(0)2}\mathfrak{l}_1^{(0)2})\sin^2\varphi_2^0)}\right)} = \frac{1-c^{00}\sin^2\varphi_{2,2}^{00}}{1+c^{00}\sin^2\varphi_{2,2}^{00}},$$

determinantur. Aequationes vero integrales, quia singulum quodque inte-

grale, cuius argumentum limitem $\arcsin = \frac{1}{\sqrt{(1+c_1 l_1)}}$ superat, non in summam sed in differentiam duorum novorum integralium commutatur, formam magis contortam assumere videntur, quam, quum primum de modulis disseruimus, simpliciorem reddemus, nec non alio loco rursus ope theorematis fundamentalis Abeliani semper ad quatuor summum integralium indefinitorum aggregatum reducemus. Contra rursus integrale definitum ita continuo transformari potest, ut habeamus:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\Pi_1 \cos^2\varphi + \mathrm{K}_1 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c, l, m)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\Pi_1^0 \cos^2\varphi + \mathrm{K}_1^0 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c^0, l^0, m^0)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\Pi_1^{00} \cos^2\varphi + \mathrm{K}_1^{00} \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c^{00}, l^{00}, m^{00})} \quad \text{etc.}$$

## XII.

### De modulorum utriusque transformationis natura.

Iam saepius nobis animadversum est, transformationes nostras ad convergentem integralium Abelianorum computationis algorithmum viam sternere, quam rem in sequentibus adhuc exponere velimus. Hunc ad finem in naturam modulorum penetrare, qualemque sequantur legem moduli in ordinem alterius ex altera transformatione derivatae transformationis perscrutari debemus, adeo ut, quantopere, perpetuo transformationibus repetitis, crescant vel decrescant, strenue iudicari possit. Praemittamus vero plures utriusque transformationis modulorum relationes, quae facillime ex antecedentibus emergunt nec non ad finem propositum perducent. Series in laeva parte paginae, ab serie in dextera eo deducitur, ut ponamus loco ipsorum:

$$c,\quad l,\quad m,\quad \mathfrak{l},\quad \mathfrak{k}\quad \text{etc.}$$
$$m_1,\quad l_1,\quad c_1,\quad L_1,\quad M_1\quad \text{etc.}$$

1. $c^0 = \frac{m_1 - c_1 l_1}{m_1 + c_1 l_1}$, $\qquad m_1' = \frac{c - lm}{c + lm}$,

2. $l^0 = \left(\frac{lc}{1+m}\right)\left(\frac{m_1 + \mathfrak{l}\mathfrak{k}}{m_1 + c_1 l_1}\right) = \left(\frac{1-m}{lc}\right)\left(\frac{m_1 - c_1 l_1}{m_1 - \mathfrak{k}_1 \mathfrak{l}_1}\right)$, $\qquad l_1' = \left(\frac{l_1 m_1}{1+c}\right)\left(\frac{c + LM}{c + lm}\right) = \left(\frac{1-c}{l_1 m_1}\right)\left(\frac{c - lm}{c - LM}\right)$,

3. $m^0 = \left(\frac{lc}{1+m}\right)\left(\frac{m_1 - \mathfrak{k}_1 \mathfrak{l}_1}{m_1 + c_1 l_1}\right) = \left(\frac{1-m_1}{lc}\right)\left(\frac{m_1 - c_1 l}{m_1 + \mathfrak{k}_1 \mathfrak{l}_1}\right)$, $\qquad c_1' = \left(\frac{l_1 m_1}{1+c}\right)\left(\frac{c - LM}{c + lm}\right) = \left(\frac{1-c}{l_1 m_1}\right)\left(\frac{c - lm}{c + LM}\right)$,

4. $\mathfrak{l}^0 = \left(\frac{lc}{1+m_1}\right)\left(\frac{m_1 - \mathfrak{l}_1 \mathfrak{k}_1}{m_1 - l_1 c_1}\right) = \left(\frac{1-m_1}{lc}\right)\left(\frac{m_1 + c_1 l_1}{m_1 + \mathfrak{k}_1 \mathfrak{l}_1}\right)$, $\qquad L_1' = \left(\frac{l_1 m_1}{1+c}\right)\left(\frac{c - LM}{c - lm}\right) = \left(\frac{1-c}{l_1 m_1}\right)\left(\frac{c + lm}{c + LM}\right)$,

5. $\mathfrak{k}^0 = \left(\frac{m_1 - \mathfrak{k}_1 \mathfrak{l}_1}{m_1 + \mathfrak{k}_1 \mathfrak{l}_1}\right)$, $\qquad M_1' = \frac{c - LM}{c + LM}$,

$$6.\quad \frac{l^0m^0}{c^0}=\frac{1-m_1}{1+m_1}=\frac{\mathfrak{l}^0m^0}{\mathfrak{k}^0},\qquad \frac{l'_1c'_1}{m'_1}=\frac{1-c}{1+c}=\frac{L'_1c'_1}{M'_1},$$

$$7.\quad l^0m^0=\Big(\frac{1-m_1}{1+m_1}\Big)\Big(\frac{m_1-c_1l_1}{m_1+c_1l_1}\Big),\qquad l'_1c'_1=\Big(\frac{1-c}{1+c}\Big)\Big(\frac{c-lm}{c+lm}\Big),$$

$$8.\quad \mathfrak{l}^0m^0=\Big(\frac{1-m_1}{1+m_1}\Big)\Big(\frac{m_1-\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}\Big),\qquad L'_1c'_1=\Big(\frac{1-c}{1+c}\Big)\Big(\frac{c-LM}{c+LM}\Big),$$

$$9.\quad \frac{1-l^0m^0}{1+l^0m^0}=\frac{m_1^2-c_1l_1}{m_1(1+c_1l_1)}=\frac{\mathfrak{k}^0-m^{02}}{\mathfrak{k}^0+m^{02}},\qquad \frac{1-l'_1c'_1}{1+l'_1c'_1}=\frac{c^2+lm}{c(1+lm)}=\frac{M'_1-c'^2_1}{M'_1+c'^2_1},$$

$$10.\quad \frac{1-l^0m^0}{1+l^0m^0}=\frac{m_1^2-\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1(1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1)}=\frac{c^0-m^{02}}{c^0+m^{02}},\qquad \frac{1-L'_1c'_1}{1+L'_1c'_1}=\frac{c^2+LM}{c(1+LM)}=\frac{m'_1-c'^2_1}{m'_1+c'^2_1},$$

$$11.\quad \frac{c^{02}-l^0m^0}{c^{02}+l^0m^0}=\frac{m_1^2-c_1l_1}{m_1(1-c_1l_1)}=\frac{\mathfrak{k}^0-\mathfrak{l}^{02}}{\mathfrak{k}^0+\mathfrak{l}^{02}},\qquad \frac{m'^2_1-c'_1l'_1}{m'^2+c'_1l'_1}=\frac{c^2-lm}{c(1-lm)}=\frac{M'_1-L'^2_1}{M'_1+L'^2_1},$$

$$12.\quad \frac{\mathfrak{k}^{02}-\mathfrak{l}^0m^0}{\mathfrak{k}^{02}+\mathfrak{l}^0m^0}=\frac{m_1^2-\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1(1-\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1)}=\frac{c^0-\mathfrak{l}^{02}}{c^0+\mathfrak{l}^{02}},\qquad \frac{M'^2_1-c'_1L'_1}{M'^2_1+c'_1L'_1}=\frac{c^2-LM}{c(1+LM)}=\frac{m'_1-l'^2_1}{m'_1+l'^2_1},$$

$$13.\quad c_1^0=\frac{2\sqrt{(m,\,l,\,c)}}{m_1+c_1l_1},\qquad m'=\frac{2\sqrt{(clm)}}{(c+lm)},$$

$$14.\quad \mathfrak{k}_1^0=\frac{2\sqrt{(m,\,\mathfrak{l},\,\mathfrak{k})}}{(m_1+\mathfrak{l}_1\mathfrak{k})},\qquad M'=\frac{2\sqrt{(cLM)}}{(c+LM)},$$

$$15.\quad l_1^{02}=\frac{2m_1(c_1+l_1)}{(1+m_1)(m_1+c_1l_1)}\sqrt{\Big[\Big(\frac{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1-\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}\Big)\Big(\frac{(m_1^2+c_1l)-(1+c_1l_1)\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{(m_1^2+c_1l_1)+(1+c_1l_1)\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}\Big)\Big]},$$

$$l'^2=\frac{2c(m+l)}{(1+c)(c+lm)}\sqrt{\Big[\Big(\frac{c+LM}{c-LM}\Big)\Big(\frac{(c^2+lm)-(1+lm)LM}{(c^2+lm)+(1+lm)LM}\Big)\Big]},$$

$$16.\quad \mathfrak{l}_1^{02}=\frac{2m_1(\mathfrak{k}_1+\mathfrak{l}_1)}{(1+m)(m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1)}\sqrt{\Big[\Big(\frac{m_1+c_1l_1}{m_1-c_1l_1}\Big)\Big(\frac{(m_1^2+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1)-(1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1)c_1l_1}{(m_1^2+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1)+(1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1)c_1l_1}\Big)\Big]},$$

$$L'^2=\frac{2c(M+L)}{(1+c)(c+ML)}\sqrt{\Big[\Big(\frac{c+lm}{c-lm}\Big)\Big(\frac{(c^2+LM)-(1+LM)lm}{(c^2+LM)+(1+LM)lm}\Big)\Big]},$$

$$17.\quad m_1^{02}=\frac{2m_1(c_1+l_1)}{(1+m_1)(m_1+c_1l_1)}\sqrt{\Big[\Big(\frac{m_1-\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}\Big)\Big(\frac{(m_1^2+c_1l_1)+(1+c_1l_1)\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{(m_1^2+c_1l_1)-(1+c_1l_1)\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}\Big)\Big]},$$

$$c'^2=\frac{2c(m+l)}{(1+c)(c+lm)}\sqrt{\Big[\Big(\frac{c-LM}{c+LM}\Big)\Big(\frac{(c^2+lm)+(1+lm)LM}{(c^2+lm)-(1+lm)LM}\Big)\Big]},$$

$$18.\quad m_1^0l_1^0=\frac{2m_1(c_1+l_1)}{(1+m_1)(m_1+c_1l_1)},\qquad c'l'=\frac{2c(l+m)}{(1+c)(c+lm)},$$

$$19.\quad \frac{m_1^0}{\Big(\frac{c_1^0}{l_1^0}\Big)}=\frac{\Big(\frac{2\sqrt{m_1}}{1+m_1}\Big)}{\left(\frac{2\sqrt{\frac{c_1}{l_1}}}{1+\frac{c_1}{l_1}}\right)},\qquad \frac{c'}{\Big(\frac{m'}{l'}\Big)}=\frac{\Big(\frac{2\sqrt{c}}{1+c}\Big)}{\left(\frac{2\sqrt{\frac{m}{l}}}{1+\frac{m}{l}}\right)}.$$

$$20.\quad m_1^0\mathfrak{l}_1^0=\frac{2m_1(\mathfrak{k}_1+\mathfrak{l}_1)}{(1+m_1)(m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1)},\qquad c'L'=\frac{2c(L+M)}{(1+c)(c+LM)},$$

$$21. \quad \frac{m_1^0}{\left(\frac{\mathfrak{k}_1^0}{\mathfrak{l}_1^0}\right)} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{m_1}}{1+m_1}\right)}{\left(\frac{2\sqrt{\frac{\mathfrak{k}_1}{\mathfrak{l}_1}}}{1+\frac{\mathfrak{k}_1}{\mathfrak{l}_1}}\right)}, \qquad \frac{c'}{\left(\frac{M'}{L'}\right)} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{c}}{1+c}\right)}{\left(\frac{2\sqrt{\frac{M}{L}}}{1+\frac{M}{L}}\right)},$$

$$22. \quad \frac{c_1^0}{l_1^0} : \frac{\mathfrak{k}_1^0}{\mathfrak{l}_1^0} = \frac{2\sqrt{\frac{c_1}{l_1}}}{\left(1+\frac{c_1}{l_1}\right)} : \frac{2\sqrt{\frac{\mathfrak{k}_1}{\mathfrak{l}_1}}}{\left(1+\frac{\mathfrak{k}_1}{\mathfrak{l}_1}\right)}, \qquad \frac{m'}{l'} : \frac{M'}{L'} = \frac{2\sqrt{\frac{m}{l}}}{\left(1+\frac{m}{l}\right)} : \frac{2\sqrt{\frac{M}{L}}}{\left(1+\frac{M}{L}\right)},$$

$$23. \quad \frac{l_1^0}{\mathfrak{l}_1^0} = \left(\frac{c_1+l_1}{\mathfrak{k}_1+\mathfrak{l}_1}\right)\left(\frac{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1+c_1 l_1}\right), \qquad \frac{l'}{L'} = \left(\frac{l+m}{L+M}\right)\left(\frac{c+LM}{c+lm}\right),$$

$$24. \quad \sqrt{(c^{(I)2}-l^{(I)2})}\ \mathfrak{l}_1^{(I)} = \frac{2m_1(l_1-c_1)}{(1+m_1)(m_1+c_1 l_1)}, \qquad \sqrt{(m_1'^2-l_1'^2)}\,L_1' = \frac{2c(l-m)}{(1+c)(c+lm)},$$

$$25. \quad \sqrt{(\mathfrak{k}^{(I)2}-\mathfrak{l}^{(I)2})}\ \mathfrak{l}_1^{(I)} = \frac{2m_1(\mathfrak{l}_1+\mathfrak{k}_1)}{(1+m_1)(m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1)}, \qquad \sqrt{(M_1'^2-L_1'^2)}\,l_1' = \frac{2c(L-M)}{(1+c)(c+LM)},$$

$$26. \quad \frac{\sqrt{(c^{(I)2}-l^{(I)2})}}{m_1^0}\left(\frac{\mathfrak{l}_1^0}{l_1^0}\right) = \left(\frac{l_1-c_1}{l_1+c_1}\right), \qquad \frac{\sqrt{(m_1'^2-l_1'^2)}}{c'}\cdot\frac{L'}{l'} = \left(\frac{l-m}{l+m}\right),$$

$$27. \quad \left(\frac{\sqrt{(\mathfrak{k}^{(I)2}-\mathfrak{l}^{(I)2})}}{m_1^0}\right)\left(\frac{l_1^0}{\mathfrak{l}_1^0}\right) = \left(\frac{\mathfrak{l}_1-\mathfrak{k}_1}{\mathfrak{l}_1+\mathfrak{k}_1}\right), \qquad \frac{\sqrt{(M_1'^2-L_1'^2)}}{c'}\cdot\frac{l'}{L'} = \left(\frac{L-M}{L+M}\right).$$

Quibus relationibus expositis, ad gradum approximationis modulorum ad nihil vel ad unitatem diiudicandum aggrediamur. Primum clarum est memorabile hoc

theorema:

„Moduli

$$„28. \quad \begin{cases} c, & c^{(I)}, & c^{(II)}, & c^{(III)} & \text{etc.} \\ \mathfrak{k}, & \mathfrak{k}^{(I)}, & \mathfrak{k}^{(II)}, & \mathfrak{k}^{(III)} & \text{etc.} \end{cases}$$

„tam rapide ad nihil convergunt, ut alius a quadrato alius antecedentis „semper superetur, sive semper erit:

$$„c^2 > c^{(I)}, \quad c^{(I)2} > c^{(II)} \quad \text{etc.}$$
$$„\mathfrak{k}^2 > \mathfrak{k}^{(I)}, \quad \mathfrak{k}^{(I)2} > \mathfrak{k}^{(II)} \quad \text{etc.“}$$

Demonstratio.

Habemus relationes per se claras:

$$l_1 > c_1, \quad 1+c^2 > m_1, \quad \mathfrak{l}_1 > \mathfrak{k}_1, \quad 1+\mathfrak{k}^2 > m_1,$$

unde sequuntur hae:

$$l_1(1+c^2) > c_1 m_1, \qquad \mathfrak{l}_1(1+\mathfrak{k}^2) > \mathfrak{k}_1 m_1,$$

sive:

$$\frac{l_1 c_1}{m_1} > \frac{1-c^2}{1+c^2}, \qquad \frac{\mathfrak{l}_1\mathfrak{k}_1}{m_1} > \frac{1-\mathfrak{k}^2}{1+\mathfrak{k}^2},$$

unde sequitur, fore:

$$\frac{m_1 - l_1 c_1}{m_1 + l_1 c_1} = c^{(I)} < c^2, \qquad \frac{m_1 - \mathfrak{l}_1 \mathfrak{k}_1}{m_1 + \mathfrak{l}_1 \mathfrak{k}_1} = \mathfrak{k}^{(I)} < \mathfrak{k}^2;$$

quae demonstratio ad omnes sequentes modulos extendi potest. Prorsus simili ratione demonstratur modulorum complementa in altera transformatione eandem legem sequi. Nimirum habemus

theorema.

„Modulorum complementa

$$29. \quad \begin{cases} m_1, & m_1', & m_1'', & m_1''' & \text{etc.} \\ M_1, & M_1', & M_1'', & M_1''' & \text{etc.} \end{cases}$$

„decrescentem seriem constituunt, cuius terminus quisque ab quadrato termini „antecedentis superatur, sive semper erit:

$$„m_1^2 > m_1', \quad m_1'^2 > m_1'', \quad \text{etc.}$$
$$„M_1^2 > M_1', \quad M_1'^2 > M_1'', \quad \text{etc.“}$$

Iam vero adiiciamus alterum de modulis $c$ et $C$

theorema.

„Semper erit:

$$„30. \quad \begin{cases} c^{(I)} > \dfrac{1-c_1}{1+c_1}, & c^{(II)} > \dfrac{1-c_1^0}{1+c_1^0}, \quad \text{etc.} \\ \mathfrak{k}^{(I)} > \dfrac{1-\mathfrak{k}_1}{1+\mathfrak{k}_1}, & \mathfrak{k}^{(II)} > \dfrac{1-\mathfrak{k}^0}{1+\mathfrak{k}^0}, \quad \text{etc.} \end{cases}$$

„id quod eo demonstratur, ut ex aequat. per se claris:

$$„\frac{m_1}{c_1 l_1} > \frac{1}{c_1}, \qquad \frac{m_1}{\mathfrak{k}_1 \mathfrak{l}_1} > \frac{1}{\mathfrak{k}},$$

„deducamus has:

$$„\frac{m_1 - c_1 l_1}{m_1 + c_1 l_1} > \frac{1-c_1}{1+c_1}, \qquad \frac{m_1 - \mathfrak{k}_1 \mathfrak{l}_1}{m_1 + \mathfrak{k}_1 \mathfrak{l}_1} > \frac{1-\mathfrak{k}_1}{1+\mathfrak{k}_1}.$$

Simile theorema in altera transformatione erit:

$$„31. \quad \begin{cases} m_1' > \dfrac{1-m}{1+m}, & m_1'' > \dfrac{1-m'}{1+m'}, \quad \text{etc.} \\ M_1' > \dfrac{1-M}{1+M}, & M_1'' > \dfrac{1-M'}{1+M'}, \quad \text{etc.“} \end{cases}$$

His quatuor theorematibus collatis, quatuor series modulorum complementorumque composuimus:

$$
32.\quad
\begin{cases}
1 \ldots c'' < c'''^2, \quad c' < c''^2, \quad c < c'^2, \quad c^{(0)} < c^2, \quad c^{(00)} < c^{(0)2} \;\ldots\; 0,\\[4pt]
1 \ldots c'' > \dfrac{1-c_1'''}{1+c_1'''}, \quad c' > \dfrac{1-c_1''}{1+c_1''}, \quad c > \dfrac{1-c_1'}{1+c_1'}, \quad c^{(0)} > \dfrac{1-c_1}{1+c_1}, \quad c^{(00)} > \dfrac{1-c_1^0}{1+c_1^0} \;\ldots\; 0,\\[4pt]
1 \ldots \mathfrak{k}'' < \mathfrak{k}'''^2, \quad \mathfrak{k}' < \mathfrak{k}''^2, \quad \mathfrak{k} < \mathfrak{k}'^2, \quad \mathfrak{k}^{(0)} < \mathfrak{k}^2, \quad \mathfrak{k}^{(00)} < \mathfrak{k}^{(0)2} \;\ldots\; 0,\\[4pt]
1 \ldots \mathfrak{k}'' > \dfrac{1-\mathfrak{k}_1'''}{1+\mathfrak{k}_1'''}, \quad \mathfrak{k}' > \dfrac{1-\mathfrak{k}_1''}{1+\mathfrak{k}_1''}, \quad \mathfrak{k} > \dfrac{1-\mathfrak{k}_1'}{1+\mathfrak{k}_1'}, \quad \mathfrak{k}^{(0)} > \dfrac{1-\mathfrak{k}_1}{1+\mathfrak{k}_1}, \quad \mathfrak{k}^{(00)} > \dfrac{1-\mathfrak{k}_1^0}{1+\mathfrak{k}_1^0} \;\ldots\; 0,\\[4pt]
1 \ldots m_1^{(00)} < m_1^{(000)2}, \quad m_1^{(0)} < m_1^{(00)2}, \quad m_1 < m_1^{(0)2}, \quad m_1' < m_1^2, \quad m_1'' < m_1'^2 \;\ldots\; 0,\\[4pt]
1 \ldots m_1^{(00)} > \dfrac{1-m^{000}}{1+m^{000}}, \quad m_1^{(0)} > \dfrac{1-m^{00}}{1+m^{00}}, \quad m_1 > \dfrac{1-m^0}{1+m^0}, \quad m_1' > \dfrac{1-m}{1+m}, \quad m_1'' > \dfrac{1-m'}{1+m'} \;\ldots\; 0,\\[4pt]
1 \ldots M_1^{(00)} < M_1^{(000)2}, \quad M_1^{(0)} < M_1^{(00)2}, \quad M_1 < M_1^{(0)2}, \quad M_1' < M_1^2, \quad M_1'' < M_1'^2 \;\ldots\; 0,\\[4pt]
1 \ldots M_1^{(00)} > \dfrac{1-M^{000}}{1+M^{000}}, \quad M_1^{(0)} > \dfrac{1-M^{00}}{1+M^{00}}, \quad M_1 > \dfrac{1-M^0}{1+M^0}, \quad M_1' > \dfrac{1-M}{1+M}, \quad M_1'' > \dfrac{1-M'}{1+M'} \;\ldots\; 0.
\end{cases}
$$

Haec tabula docet, quam rapide moduli $c$ et $\mathfrak{k}$ in altera et complementa $m_1$, $M_1$ in altera transformatione ad nihil appropinquent. Exempli gratia posito: $c^2 = 0,5$, habebimus hanc seriem:

$c^2 = 0,5$, $c^{(0)2} < 0,25$, $c^{(00)2} < 0,1025$, $c^{(000)2} < 0,0105063$, $c^{(0000)2} < 0,0001104$, ita ut quantitates $c^{(00000)2}$ in calculo usque ad sex nonnisi decimales appropinquato prorsus negligi possit.

Transeamus vero ad modulos $l^{(0)}$ et $\mathfrak{l}^{(0)}$ in altera cum modulis $c$ et $\mathfrak{k}$ comparandos, dum in altera transformatione complementa $l_1'$ et $L_1'$ cum complementis $m_1$, $M_1$ comparare velimus. Primum formulae priores (24.) et (25.) docent, semper fore

$$c^{(0)} > l^{(0)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{k}^{(0)} > \mathfrak{l}^{(0)}.$$

Inde vero sequitur, quantitates $l^{(0)}$ et $\mathfrak{l}^{(0)}$ semper respective minores esse, quam quadrata primorum modulorum antecedentium $c$ et $\mathfrak{k}$, ita ut his ad nihil convergentibus, ipsae ad nihil appropinquent. Habemus igitur has series modulorum:

$$
33.\quad
\begin{cases}
1 \ldots l'' < c'''^2, \quad l' < c''^2, \quad l < c'^2. \quad l^{(0)} < c^2, \quad l^{(00)} < c^{(0)2}, \;\ldots\; 0,\\
1 \ldots \mathfrak{l}'' < \mathfrak{k}'''^2, \quad \mathfrak{l}' < \mathfrak{k}''^2, \quad \mathfrak{l} < \mathfrak{k}'^2, \quad \mathfrak{l}^{(0)} < \mathfrak{k}^2, \quad \mathfrak{l}^{(00)} < \mathfrak{k}^{(0)2}, \;\ldots\; 0,
\end{cases}
$$

In altera vero transformatione per formulas posteriores (24.) et (25.) demonstratur, fore:

$$l_1 < m_1, \qquad L_1' < M_1'$$

ergo

$$l_1 < m_1^2, \qquad L_1' < M_1^2,$$

ita ut complementa $l_1$ et $L_1$ simul respective cum complementis $m_1$ et $M_1$ ad nihil appropinquent. Habemus hîs has series:

$$
34.\quad
\begin{cases}
1 \ldots l_1^{(00)} < m_1^{(000)2}, \quad l_1^{(0)} < m_1^{(00)2}, \quad l_1 < m_1^{(0)2}, \quad l_1' < m_1^2, \quad l_1'' < m_1'^2 \ldots 0,\\
1 \ldots L_1^{(00)} < M_1^{(000)2}, \quad L_1^{(0)} < M_1^{(00)2}, \quad L_1 < M_1^{(0)2}. \quad L_1' < M_1^2, \quad L_1'' < M_1'^2 \ldots 0.
\end{cases}
$$

Iam vero etiam placet, modulos $l$, $l^0$ etc., $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}^0$ etc. atque complementa $l$, $l_1$ etc., $L$, $L'_1$ etc. inter se ipsa comparare, quamvis lex hîc regnans non tam concinna, quam antea allatae, fiat. Habuimus formulam (2.):

$$l^0 = \left(\frac{lc}{1+m_1}\right)\left(\frac{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1+c_1 l_1}\right),$$

unde sequitur:

$$\frac{l^0}{l} = \left(\frac{c}{1+m_1}\right)\left(\frac{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1+c_1 l_1}\right).$$

Cum vero sit: $\mathfrak{k}_1 < \mathfrak{l}_1$, et $c_1 < l_1$, habemus:

$$\frac{c}{1+m_1}\cdot\frac{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1+c_1 l_1} < \frac{c}{1+m_1}\cdot\frac{m_1+\mathfrak{l}_1^2}{m_1+c_1^2}.$$

Valore vero ipsius $\mathfrak{l}_1^2 = \frac{m_1^2-c_1^2}{c^2}$ substituto, erit:

$$\frac{l^0}{l} = \left(\frac{c}{1+m_1}\right)\left(\frac{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1+c_1 l_1}\right) < \left(\frac{1}{c}\right)\left(\frac{m_1-c_1^2}{m_1+c_1^2}\right).$$

Cum denique sit:

$$(1+c)^2 > m_1,$$

sive

$$\frac{1-c}{1+c} < \frac{c_1^2}{m_1},$$

etiam erit:

$$c > \frac{m_1-c_1^2}{m_1+c_1^2},$$

unde sequitur fore:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{m_1-c_1^2}{m_1+c_1^2} < 1,$$

atque hanc ob rem:

$$l^0 < l.$$

Eodem modo formula (4.):

$$\mathfrak{l}^0 = \frac{1-m}{lc}\cdot\frac{m_1+c_1 l_1}{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1},$$

loco ipsius $lc$ introducto valore aequivalenti $\frac{m^2}{\mathfrak{k}\mathfrak{l}}$, hanc suppeditat:

$$\frac{\mathfrak{l}^0}{\mathfrak{l}} = \left(\frac{\mathfrak{k}}{1+m_1}\right)\left(\frac{m_1+c_1 l_1}{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}\right).$$

Iam vero erit:

$$\frac{\mathfrak{l}^0}{\mathfrak{l}} = \left(\frac{\mathfrak{k}}{1+m_1}\right)\left(\frac{m_1+c_1 l_1}{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}\right) < \left(\frac{\mathfrak{k}}{1+m_1}\right)\left(\frac{m_1+l_1^2}{m_1+\mathfrak{k}_1^2}\right) = \frac{1}{\mathfrak{k}}\left(\frac{m_1-\mathfrak{k}_1^2}{m_1+\mathfrak{k}_1^2}\right).$$

Habemus rursus:

$$(1+\mathfrak{k})^2 > m_1,$$

sive:

$$\mathfrak{k} > \frac{m_1-\mathfrak{k}_1^2}{m_1+\mathfrak{k}_1^2},$$

unde sequitur fore:

$$\mathfrak{l}^0 < \mathfrak{l}.$$

Inde adhuc demonstratum est theorema hoc:

„Moduli

„35. $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$, $\mathfrak{l}'''$ .... atque $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$, $\mathfrak{l}'''$ ....

„iam ab initio seriem decrescentem constituunt, cuius terminus quisque a „quadrato moduli primi cohaerentis antecedentis superatur."

Simile theorema in altera transformatione:

„complementa modulorum secundorum:

$$„36.\quad \begin{cases} \mathfrak{l}_1, & \mathfrak{l}_1', & \mathfrak{l}_1'', & \mathfrak{l}_1''', & \text{etc.} \\ L, & L_1', & L_1'', & L_1''', & \text{etc.} \end{cases}$$

„ita ab initio iam decrescunt, ut quisque a quadrato complementi moduli „tertii cohaerentis superetur, eodem modo ex formulis posterioribus (2.) et „(4.) deducitur." Iam vero denique modulos minimos $m$, $m'$ etc. in altera, et complementa minima $c_1$, $c_1'$ etc. in altera transformatione contemplemur. Habemus formulas ex form. (1.), (3.) et (5.) deductas:

$$m'^2 = \frac{1-m_1}{1+m_1}.c'\mathfrak{k}', \qquad c_1'^2 = \frac{1-c}{1+c}.m_1'M_1',$$

unde sequitur, cum sit:

$$\frac{1-m_1}{1+m_1} < m^2, \quad c' < c^2, \qquad \mathfrak{k}' < \mathfrak{k}^2,$$

$$\frac{1-c}{1+c} < c_1^2, \quad m_1' < m_1^2, \quad M_1' < M_1^2,$$

fore:

$$m' < m.c.\mathfrak{k}, \qquad c_1' < c_1.m_1M_1$$

ita ut „moduli

$$„m, \quad m', \quad m'', \quad ....$$

„atque complementa

$$„37. \quad c_1, \quad c_1', \quad c_1'', \quad ....$$

„seriem decrescentem constituant, eoque magis ad 0 convergentem, quo „minora producta:

$$„c\mathfrak{k}, \quad c'\mathfrak{k}', \quad c''\mathfrak{k}'', \quad \text{etc.}$$

$$„m_1M_1, \quad m_1'M_1', \quad m_1''M_1'', \quad \text{etc.}$$

„fiant." Iam vero haec appropinquatio ad nihil multo arctius determinatur, sequenti consideratione adhibita. Habemus ex formulis (2.) et (3.):

$$m' = \left(\frac{l^0}{c^0}\right)c'\mathfrak{k}', \qquad c_1' = \left(\frac{l_1'}{m_1}\right)m_1'M_1',$$

unde, quia theoremata (28.) et (29.) ostendunt, fore:

$$c'\mathfrak{k}' < c^2\mathfrak{k}^2, \qquad m_1'M_1' < m_1^2M_1^2,$$

atque ex theorematibus (33.) et (34.) sequitur:

$$\frac{l^0}{c^0} < 1, \qquad \frac{l'_1}{m'_1} < 1,$$

prodeunt relationes:

$$38. \qquad m^0 < c^2\mathfrak{f}^2, \qquad c'_1 < m_1^2\mathfrak{M}_1^2,$$

et haec theoremata:

„Moduli

$$„39. \qquad m, \quad m^0, \quad m^{00},$$

„in altera transformatione repetita ita decrescunt, ut quisque ab quadrato „producti utriusque moduli $c$, $\mathfrak{f}$, antecedentis superetur, atque eodem modo in „altera transformatione

„Complementa

$$„40. \qquad c_1, \quad c'_1, \quad c''_1,$$

„ita decrescunt, ut quisque a quadrato producti utriusque moduli tertii $m$, $\mathfrak{M}$ „antecedentis superetur."

Iam vero generalem adhuc legem quinternorum modulorum ad nihil appropinquantium inde deducimus, ut animadvertamus, dum fractiones:

$$\frac{m}{c} = \mathfrak{l}, \quad \frac{m}{l} = \mathfrak{f}, \quad \frac{m}{\mathfrak{f}} = l, \quad \frac{m}{\mathfrak{l}} = c,$$

ad nihil convergant, fractionem:

$$\frac{l}{c} = \frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{f}}$$

mox ad unitatem appropinquaturam esse.

Similemque observationem de fractione $\frac{l_1}{m_1} = \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{M}_1}$ faciamus. Habemus nimirum formulas sponte prodeuntes

$$\frac{l}{c} = \frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{f}}, \qquad \frac{l^0}{c^0} = \frac{\mathfrak{l}^0}{\mathfrak{f}^0}, \quad \text{etc.}$$

nec non ex formulis (26.) et (27.) sequuntur hae:

$$\sqrt{(c^{0\,2} - l^{0\,2})} = \frac{m_1^0 l_1^0}{\mathfrak{l}_1^0} \cdot \frac{c^2 - l^2}{(l_1 + c_1)^2}, \qquad \sqrt{(\mathfrak{f}^{0\,2} - \mathfrak{l}^{0\,2})} = \frac{m_1^0 \mathfrak{l}_1^0}{l_1^0} \cdot \frac{\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{l}^2}{(\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{f}_1)^2},$$

quibus inter se multiplicatis, post faciles reductiones nanciscimur hanc formulam:

$$\sqrt{\left(1 - \frac{l^{0\,2}}{c^{0\,2}}\right)} = \sqrt{\left(\frac{c^2\mathfrak{f}^2}{c^0\mathfrak{f}^0}\right)\left(\frac{m_1^0}{(l_1 + c_1)(\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{f}_1)}\right)\left(1 - \frac{l^2}{c^2}\right)} = \sqrt{\left(1 - \frac{\mathfrak{l}^0}{\mathfrak{f}^0}\right)}.$$

Iam vero ex form. (32.) sequitur, semper fore:

$$c^0 > \frac{1 - c_1}{1 + c_1}, \qquad \mathfrak{f}^0 > \frac{1 - \mathfrak{f}_1}{1 + \mathfrak{f}_1},$$

quibus valoribus substitutis erit:

$$\sqrt{\left(1-\frac{l^{\mu\,2}}{c^{\mu\,2}}\right)} < \frac{(1+c_1)(1+\mathfrak{k}_1)}{(l_1+c_1)(\mathfrak{l}_1+\mathfrak{k}_1)} \cdot m_1^{\prime\prime}\left(1-\frac{l^2}{c^2}\right).$$

Unde colligere possumus, quia, complementis $c_1$, $\mathfrak{k}_1$, $l_1$, $\mathfrak{l}_1$, $m_1^{\prime\prime}$ ad unitatem appropinquantibus, factor $\frac{(1+c_1)(1+\mathfrak{k}_1)}{(l_1+c_1)(\mathfrak{l}_1+\mathfrak{k}_1)} m_1^{\prime\prime}$ ipse ad unitatem accedit, quantitatem $\sqrt{\left(1-\frac{l^{\mu\,2}}{c^{\mu\,2}}\right)}$ per primam transformationem denique ordinis $\left(1-\frac{l^2}{c^2}\right)$ fieri, itaque postremo rapide usque ad nihil decrescere.

Eodem modo in altera transformatione complementa $m_1'$ et $l_1'$ similem legem sequi, ex formulis his demonstratur. Habemus:

$$\frac{l_1}{m_1} = \frac{L_1}{M_1}, \qquad \frac{l_1'}{m_1'} = \frac{L_1'}{M_1'}, \quad \text{etc.}$$

atque ex form. (26.) et (27.)

$$\sqrt{(m_1'^2 - l_1'^2)} = \frac{c'l'}{L'} \cdot \frac{(m_1^2 - l_1^2)}{(l+m)^2}, \qquad \sqrt{(M_1'^2 - L_1'^2)} = \frac{c'L'}{l'} \cdot \frac{(M_1^2 - L_1^2)}{(L+M)^2},$$

quibus aequationibus coniunctis, erit:

$$\sqrt{\left(1-\frac{l_1'^2}{m_1'^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{m_1^2 M_1^2}{m_1' M_1'}\right)}\left(\frac{c'}{(l+m)(L+M)}\right)\left(1-\frac{l_1^2}{m_1^2}\right) = \sqrt{\left(1-\frac{L_1'^2}{M_1'^2}\right)}.$$

Iam vero antea habuimus relationes:

$$m_1' > \frac{1-m}{1+m}, \qquad M_1' > \frac{1-M}{1+M},$$

unde sequitur fore:

$$\sqrt{\left(1-\frac{l_1'^2}{m_1'^2}\right)} < \left(\frac{(1+m)(1+M)}{(l+m)(L+M)}\right) c' . \left(1-\frac{l_1^2}{m_1^2}\right);$$

quae relatio, cum moduli $m$, $M$, $l$, $L$, $c$ in hac transformatione ad unitatem appropinquent, docet denique quantitatem:

$$\sqrt{\left(1-\frac{l_1'^2}{m_1'^2}\right)} = \sqrt{\left(1-\frac{L_1'^2}{M_1'^2}\right)},$$

fieri ordinis:

$$\left(1-\frac{l_1^2}{m_1^2}\right) = \left(1-\frac{L_1^2}{M_1^2}\right).$$

Itaque demonstravimus hoc theorema:

„fractiones

$$„41. \quad \frac{l}{c}, \quad \frac{l^0}{c^0}, \quad \frac{l^{00}}{c^{00}}$$

„et

$$„42. \quad \frac{l_1}{m_1}, \quad \frac{l_1'}{m_1'}, \quad \frac{l_1''}{m_1''}$$

„dum illic moduli:

$$„m, \quad m'', \quad m''''. \quad \ldots .$$

„et hic complementa:

$$„c_1,\quad c_1',\quad c_1'',\quad \ldots.$$

„ad nihil accedunt, mox ad unitatem appropinquant."

Inde ex hoc theoremate de modulis minimis adhuc, atque de complementis minimis in altera transformatione, memorabile deducere licet hoc

theorema:

„Moduli

$$„43.\quad m,\quad m^{()},\quad m^{(\times)},\quad \ldots.$$

„quos per primam transformationem repetitam adipiscimur, ita denique semper „decrescunt, ut quisque a quadrato antecedentis superetur, eamque legem „observant complementa:

$$„44.\quad c_1,\quad c_1',\quad c_1'',\quad \text{etc.}$$

„in altera transformatione repetita."

Demonstratio.

Ex formulis (6.) hae sponte sequuntur:

$$m^{()} = m^2 \frac{c^0}{l^0} \cdot \frac{1}{(1+m_1)^2},\qquad c_1' = c_1^2 \frac{m_1'}{l_1'} \cdot \frac{1}{(1+c)^2}.$$

Iam vero secundum theorema antecedens quantitates:

$$\frac{c^0}{l^0},\quad \frac{c^{00}}{l^{00}},\quad \ldots. \qquad \frac{m_1'}{l_1'},\quad \frac{m_1''}{m_1''},\quad \ldots.$$

ad unitatem appropinquant, dum igitur quantitatibus $m_1$ in altera, et $c$ in altera ad 1 appropinquantibus fractiones

$$\frac{1}{(1+m_1)^2},\quad \frac{1}{(1+m_1^0)^2},\quad \text{etc.}\qquad \frac{1}{(1+c)^2},\quad \frac{1}{(1+c')^2},\quad \text{etc.}$$

ad valores $=\frac{1}{4}$ mox accedunt, sequitur, inde a termino quodam algorithmi, ubi primum $\frac{c^0}{l^0}\cdot\frac{1}{(1+m_1)^2}$ vel $\frac{m_1'}{l_1'}\cdot\frac{1}{(1+c)^2}$ unitate minor fiat, theorema quaesitum verum esse.

Adiiciamus adhuc duo theoremata de iisdem his modulis minimis $m$, $m^{()}$, .... atque de complementis $c_1$, $c_1'$, .... haud supervacanea, quae ex comparatione cum modulis, quos per transformationem secundi ordinis integralium ellipticorum adipiscimur, originem trahunt. Obtinemus enim, „fore in prima „transformatione:

$$„45.\quad \begin{cases} \frac{1-c_1}{1+c_1} > m^{()}, & \frac{1-c_1^0}{1+c_1^0} > m^{(\times)}, & \frac{1-c^{00}}{1+c^{00}} > m^{(\times\times)}, \quad \ldots. \\ \frac{1-\mathfrak{k}_1}{1+\mathfrak{k}_1} > m^{()}, & \frac{1-\mathfrak{k}_1^0}{1+\mathfrak{k}_1^0} > m^{(\times)}, & \frac{1-\mathfrak{k}^{00}}{1+\mathfrak{k}^{00}} > m^{(\times\times)}, \quad \ldots. \\ \frac{1-m_1}{1+m_1} < m^{()}, & \frac{1-m_1^0}{1+m_1^0} < m^{(\times)}, & \frac{1-m_1^{00}}{1+m_1^{00}} < m^{(\times\times)}, \quad \ldots. \end{cases}$$

„sed fractiones:

$$„\frac{\frac{1-m_1}{1+m_1}}{m^0},\qquad \frac{\frac{1-m_1^0}{1+m_1^0}}{m^{00}},\quad \text{etc.}$$

„denique ad unitatem quam proxime accedere, similiterque in altera trans-
„formatione fore:

$$„\frac{1-m}{1+m}>c_1',\quad \frac{1-m'}{1+m'}>c_1'',\quad \frac{1-m''}{1+m''}>c_1''',\quad \dots.$$

$$„\frac{1-M}{1+M}>c_1',\quad \frac{1-M'}{1+M'}>c_1',\quad \frac{1-M_1'}{1+M_1'}>c_1''',\quad \dots.$$

$$„\frac{1-c}{1+c}<c_1',\quad \frac{1-c_1'}{1+c_1'}<c_1'',\quad \frac{1-c_1''}{1+c_1''}<c_1''',\quad \dots.$$

„atque fractiones:

$$„\frac{\frac{1-c}{1+c}}{c_1'},\qquad \frac{\frac{1-c'}{1+c'}}{c_1''}.\quad \text{etc.}$$

„rursus ad unitatem appropinquare."

Demonstratio.

Habemus relationes:

$$(m_1-c_1)(m_1-l_1)>0,\qquad (m_1-\mathfrak{k}_1)(m_1-\mathfrak{l}_1)>0$$

unde post faciles reductiones, sequitur:

$$\left(\frac{1-m_1}{1+m_1}\right)\left(\frac{m_1-c_1l_1}{m_1+c_1l_1}\right)<\left(\frac{1-c_1}{1+c_1}\right)\left(\frac{1-l_1}{1+l_1}\right),\quad \left(\frac{1-m_1}{1+m_1}\right)\left(\frac{m_1-\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}\right)<\left(\frac{1-\mathfrak{k}_1}{1+\mathfrak{k}_1}\right)\left(\frac{1-\mathfrak{l}_1}{1+\mathfrak{l}_1}\right).$$

Iam vero formulis (7.) et (8.):

$$m^0l^0=\left(\frac{1-m_1}{1+m_1}\right)\left(\frac{m_1-c_1l_1}{m_1+c_1l_1}\right),\qquad m^0\mathfrak{l}^0=\left(\frac{1-m_1}{1+m_1}\right)\left(\frac{m_1-\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}\right),$$

adhibitis erit:

$$m^0l^0<\left(\frac{1-c_1}{1+c_1}\right)\left(\frac{1-l_1}{1+l_1}\right),\qquad m^0\mathfrak{l}^0<\left(\frac{1-\mathfrak{k}_1}{1+\mathfrak{k}_1}\right)\left(\frac{1-\mathfrak{l}_1}{1+\mathfrak{l}_1}\right),$$

eoque fortius:

$$m^0<\left(\frac{1-c_1}{1+c_1}\right),\qquad m^0<\left(\frac{1-\mathfrak{k}_1}{1+\mathfrak{k}_1}\right).$$

Deinde habemus ex formulis (6.):

$$\frac{l^0}{c^0}=\frac{\frac{1-m_1}{1+m_1}}{m^0}=\frac{\mathfrak{l}^0}{\mathfrak{k}^0},$$

unde theoremate (41.) adiuti docemur, quantitates fractas:

$$\frac{\frac{1-m_1}{1-m_1}}{m^0},\qquad \frac{\frac{1-m_1^0}{1+m_1^0}}{m^{00}},\quad \text{etc.}$$

simul cum $\frac{l^0}{c^0}$ ad unitatem accedere.

Altera pars theorematis eodem modo demonstratur.

Deinde hoc theorema proponimus:

„Series:

$$„47. \quad \begin{cases} \frac{c}{\mathfrak{k}} = \frac{l}{\mathfrak{l}}, \quad \frac{c^2}{\mathfrak{k}^0} = \frac{l^0}{\mathfrak{l}^0}, \quad \frac{c^{00}}{\mathfrak{k}^{00}} = \frac{l^{00}}{\mathfrak{l}^{00}}, \quad \dots \\ \frac{m_1}{M_1} = \frac{l_1}{L_1}, \quad \frac{m'_1}{M'_1} = \frac{l'_1}{L'_1}, \quad \frac{m''_1}{M''_1} = \frac{l''_1}{L''_1}, \quad \dots \end{cases}$$

„si in illa $c < \mathfrak{k}$, in hac $m_1 < M_1$ fuerit, ita decrescunt, ut quisque termi-„nus a quadrato antecedentis superetur, dum contrario casu quantitates:

$$„48. \quad \frac{\mathfrak{k}}{c}, \quad \frac{\mathfrak{k}^0}{c^0}, \quad \frac{\mathfrak{k}^{00}}{c^{00}}, \text{ etc.} \qquad \frac{M_1}{m_1}, \quad \frac{M'_1}{m'_1}, \quad \frac{M''_1}{m''_1}. \text{ etc.}$$

„eandem legem sequuntur."

Demonstratio.

Ex formula (21.) posteriori, sequitur haec:

$$\frac{c}{\mathfrak{k}} = \frac{\frac{2\sqrt{c^0}}{1+c^0}}{\frac{2\sqrt{\mathfrak{k}^0}}{1+\mathfrak{k}^0}} = \frac{l}{\mathfrak{l}},$$

unde deducimus hanc aequationem:

$$\frac{c^2}{\mathfrak{k}^2} : \frac{c^0}{\mathfrak{k}^0} = \left(\frac{1+\mathfrak{k}^0}{1+c^0}\right)^2,$$

ita ut posito $c^0 < \mathfrak{k}^0$ habeamus:

$$\frac{c^0}{\mathfrak{k}^0} < \frac{c^2}{\mathfrak{k}^2},$$

contra posito, $\mathfrak{k}^0 < c^0$, fiat:

$$\frac{\mathfrak{k}^0}{c^0} < \frac{\mathfrak{k}^2}{c^2}.$$

Iam vero fractio $\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ simul cum argumento $x$ ab nihilo usque ad unitatem crescente, ipsa ab nihilo ad unitatem crescit, ita tamen, ut semper sit:

$$x > \frac{2\sqrt{x}}{1+x},$$

unde clarum fit, prout fuerit:

$$c < \mathfrak{k}, \qquad c = \mathfrak{k}, \qquad c > \mathfrak{k},$$

etiam fore:

$$c^0 < \mathfrak{k}^0, \qquad c^0 = \mathfrak{k}^0, \qquad c^0 > \mathfrak{k}^0.$$

quibus cum antecedentibus collatis, theorematis prior pars demonstrata est. Alteram partem per formulam hanc ex priori (21.) sequentem:

$$\frac{m'_1}{M'_1} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{m_1}}{1+m_1}\right)}{\left(\frac{2\sqrt{M_1}}{1+M_1}\right)}$$

similiter ostendere possumus. Utramque vero etiam per has formulas, ex (1.), (2.), (4.), (5.) sequentes:

$$\frac{c^0}{\mathfrak{f}^0}=\left(\frac{m_1-c_1 l_1}{m_1+c_1 l_1}\right)\left(\frac{m_1+\mathfrak{f}_1\mathfrak{l}_1}{m_1-\mathfrak{f}_1\mathfrak{l}_1}\right)=\frac{m_1^2-c_1^2 l_1^2}{m_1^2-C_1^2 L_1^2}\cdot\frac{m+\mathfrak{f}_1 \mathfrak{l}_1}{m_1+c\,\mathfrak{l}_1}=\frac{c^2}{C^2}\left(\frac{m_1+\mathfrak{f}_1\mathfrak{l}_1}{m_1+c_1 l_1}\right)^2,$$

$$\frac{m'_1}{M'_1}=\left(\frac{c-lm}{c+lm}\right)\left(\frac{c+LM}{c-LM}\right)=\frac{c^2-l^2m^2}{c^2-L^2M^2}\left(\frac{c+LM}{c+lm}\right)^2=\left(\frac{m_1}{M_1}\right)^2\left(\frac{c+LM}{c+lm}\right)^2$$

demonstrare licet.

Adiicere placet adhuc, has aequationes ex (1.) et (5.) sequentes:

$$c_1^0=\frac{\dfrac{2\sqrt{(c_1 l_1)}}{m_1}}{1+\dfrac{c_1 l_1}{m_1}},\qquad \mathfrak{f}_1^0=\frac{\dfrac{2\sqrt{(\mathfrak{f}_1\mathfrak{l}_1)}}{m}}{1+\dfrac{\mathfrak{f}_1\mathfrak{l}_1}{m}},$$

docere, algorithmum, quo moduli $c$ et $\mathfrak{f}$ determinentur, denique ubi $c=l$, $\mathfrak{f}=\mathfrak{l}$, $m_1=1$ posuimus, his formulis concinnis exhiberi:

$$c_1^0=\frac{2c_1}{1+c_1^2},\qquad \mathfrak{f}_1^0=\frac{2\mathfrak{f}_1}{1+\mathfrak{f}_1^2},$$

sive:

$$c^0=\frac{1-c_1^2}{1+c_1^2},\qquad \mathfrak{f}^0=\frac{1-\mathfrak{f}_1^2}{1+\mathfrak{f}_1^2},$$

quae ad algorithmum notissimo medio arithmetico geometrico similem ducunt, dum secundum theorema (45.), sive secundum hanc formulam ex formula (6.) derivatam:

$$\sqrt{\left(1-\frac{l^{0^2}}{c^{0^2}}m^{0^2}\right)}=\frac{2\sqrt{m_1}}{1+m_1},$$

determinatio tertii moduli, dum $\frac{l^0}{c^0}=1$ devenerit, ad illum algorithmum ipsum reducitur. Ad similes observationes formulae:

$$m'=\frac{2\sqrt{\left(\dfrac{ml}{c}\right)}}{1+\dfrac{ml}{c}},\quad M'=\frac{\dfrac{2\sqrt{(ML)}}{c}}{1+\dfrac{ML}{c}},\quad \sqrt{\left(1-\frac{l_1'^2}{m_1'^2}c_1'^2\right)}=\frac{2\sqrt{c}}{1+c}.$$

Priusquam disquisitiones de natura modulorum finiamus nonnullos casus speciales quinternorum modulorum ponere placet. Primum sit $\mathfrak{f}=1$, sive $l=m$, et $M=L$.

Habebimus:

$$c^0=\frac{1-c_1}{1+c_1},\quad l^{0^2}=\left(\frac{1-m_1}{1+m_1}\right)\left(\frac{1-c_1}{1+c_1}\right),\quad m^0=l^0,\quad \mathfrak{l}^{0^2}=\left(\frac{1-m_1}{1+m_1}\right)\left(\frac{1+c_1}{1-c_1}\right),\quad \mathfrak{f}^0=1,$$

$$m'_1=\frac{c-m^2}{c+m^2},\quad l'_1=m'_1,\qquad c'_1=\frac{1-c}{1+c},\quad L'_1=\left(\frac{1-c}{1+c}\right)\left(\frac{c+m^2}{c-m^2}\right),\quad M'_1=L'_1.$$

**Si $c=1$, sive $m=\mathfrak{l}$ fuerit, habemus:**

$$c^0=1,\qquad l^{02}=\left(\frac{1-m_1}{1+m_1}\right)\left(\frac{1+\mathfrak{k}_1}{1-\mathfrak{k}_1}\right),\quad m^0=\mathfrak{l}^0,\quad \mathfrak{l}^{02}=\left(\frac{1-m_1}{1+m_1}\right)\left(\frac{1-\mathfrak{k}_1}{1+\mathfrak{k}_1}\right),\quad \mathfrak{k}^0=\frac{1-\mathfrak{k}_1}{1+\mathfrak{k}_1},$$

$$m'_1=\frac{1-lm}{1+lm},\quad l'_1=\frac{l_1 m_1}{1+lm},\qquad c'_1=0,\quad L'_1=0,\qquad M'_1=0.$$

**Si $M_1=1$ ponitur, sive $c_1=l_1$, habemus:**

$$c^0=\frac{m_1-l_1^2}{m_1+l_1^2},\quad l^0=c^0,\qquad m^0=\frac{1-m_1}{1+m_1},\quad l_0=\frac{1-m_1}{1+m_1}\cdot\frac{m_1+c_1^2}{m_1-c_1^2},\quad \mathfrak{k}^0=\mathfrak{l}_0,$$

$$m'_1=\frac{1-m}{1+m},\quad l'^2_1=\left(\frac{1-c}{1+c}\right)\left(\frac{1-m}{1+m}\right),\quad c'_1=l'_1,\qquad L'_1=\left(\frac{1-c}{1+c}\right)\left(\frac{1+m}{1-m}\right),\quad M'_1=1.$$

**Si $m_1=1$ fuerit, habemus:**

$$c^0=\frac{1-l_1c_1}{1+l_1c_1},\quad l^0=\frac{lc}{1+l_1c_1},\qquad m^0=0,\qquad \mathfrak{l}^0=0,\qquad \mathfrak{k}^0=0,$$

$$m'_1=1,\qquad l'^2_1=\left(\frac{1-c}{1+c}\right)\left(\frac{1+M}{1-M}\right),\quad c'_1=L'_1,\quad L'^2_1=\left(\frac{1-c}{1+c}\right)\left(\frac{1-M}{1+M}\right),\quad M'_1=\frac{1-M}{1+M}.$$

## XIII.

### De computatione modulorum.

**Moduli utriusque transformationis sequenti methodo facillime computantur. Altera in transformatione quantitatibus:**

$$c^0=\frac{m_1-c_1l_1}{m_1+c_1l_1},\qquad \mathfrak{k}^0=\frac{m_1-\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1+\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}$$

**computatis, calculare licet modulos $l^0$, $m^0$, $\mathfrak{l}^0$, .... his formulis (2.), (3.), (4.) art. XII.:**

$$l^0=\sqrt{\left(\frac{1-m_1}{1+m_1}\cdot\frac{c^0}{\mathfrak{k}^0}\right)},\qquad \mathfrak{l}^0=\sqrt{\left(\frac{1-m_1}{1+m_1}\cdot\frac{\mathfrak{k}^0}{c^0}\right)},\qquad m^0=\left(\frac{1-m_1}{1+m_1}\cdot c^0\mathfrak{k}^0\right).$$

**Quem calculum ita trigonometricum faciamus. Ponamus:**

$$1.\ \begin{cases} c=\sin\alpha,\quad l=\sin\beta,\quad m=\sin\gamma,\quad \dfrac{m}{c}=\mathfrak{l}=\sin B,\quad \dfrac{m}{l}=\mathfrak{k}=\sin A,\\ c^0=\sin\alpha^0,\quad l^0=\sin\beta^0,\quad m^0=\sin\gamma^0,\quad \mathfrak{l}^0=\sin B^0,\qquad \mathfrak{k}^0=\sin A^0. \end{cases}$$

**Determinentur anguli $\alpha^0$ et $A^0$ aequationibus:**

$$2.\quad \operatorname{tang}\left(45-\frac{\alpha^0}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\gamma}\right)},\qquad \operatorname{tang}\left(45-\frac{A^0}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{\cos A\cos B}{\cos\gamma}\right)},$$

**aut moduli $c^0$ et $\mathfrak{k}^0$ ipsi angulis auxiliaribus $\varepsilon$ et $E$ introductis talibus, ut sit:**

$$3.\quad \cos\varepsilon=\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\gamma},\qquad \cos E=\frac{\cos A\cos B}{\cos\gamma},$$

**per aequationes:**

$$4.\quad c^0=\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varepsilon,\qquad \mathfrak{k}^0=\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}E.$$

**Quo facto habebimus:**

$$5.\quad \begin{cases} l^0 = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma \;\; \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}E = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma \sqrt{\left(\frac{\sin\alpha^0}{\sin A^0}\right)}, \\ \mathfrak{l}^0 = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma \operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varepsilon \;\; \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma \sqrt{\left(\frac{\sin A^0}{\sin\alpha^0}\right)}, \end{cases}$$

$$6.\quad m^0 = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma \;\; \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varepsilon \;\; \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma \sqrt{(\sin\alpha^0 \sin A^0)}.$$

Si vero formulae (5.) et (6.) angulis $\alpha^0$ vel $A^0$ ad nihil maxime appropinquantibus, haud magis exactos valores appropinquatos adipisci velis, hoc casu hanc aliam methodum trigonometricam adhibere licet. Habemus formulas (7.) et (18.) art. XII.:

$$7.\quad \begin{cases} m^0 l^0 = \dfrac{(1-m_1)(m_1-c_1 l_1)}{(1+m_1)(m_1+c_1 l_1)}, & m^0 \mathfrak{l}^0 = \dfrac{(1-m_1)(m_1-\mathfrak{k}_1 \mathfrak{l}_1)}{(1+m_1)(m+\mathfrak{k}_1 \mathfrak{l}_1)}, \\ m_1^0 l_1^0 = \dfrac{2m_1(c_1+l_1)}{(1+m_1)(m_1+c_1 l_1)}, & m_1^0 \mathfrak{l}_1^0 = \dfrac{2m_1(\mathfrak{k}_1+\mathfrak{l}_1)}{(1+m_1)(m_1+\mathfrak{k}_1 \mathfrak{l}_1)}, \end{cases}$$

unde sequitur formulis (1.) substitutis:

$$\cos(\beta^0 \pm \gamma^0) = \frac{2m_1(c_1+l_1) \mp (1-m_1)(m_1-c_1 l_1)}{(1+m_1)(m_1+c_1 l_1)},$$

$$\cos(B^0 \pm \gamma^0) = \frac{2m_1(\mathfrak{k}_1+\mathfrak{l}_1) \mp (1-m_1)(m_1-\mathfrak{k}_1 \mathfrak{l}_1)}{(1+m_1)(m_1+\mathfrak{k}_1 l_1)};$$

unde facili reductione facta hae formulae emanant:

$$8.\quad \begin{cases} \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(\beta^0+\gamma^0) = \dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}.\sin^2\frac{\beta}{2}.\cos\gamma}{\left(\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}, \\ \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(\beta^0-\gamma^0) = \dfrac{\left(\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\left(\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\left(\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos\gamma}, \\ \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(B^0+\gamma^0) = \dfrac{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\cos\gamma}{\left(\cos\frac{A+\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{A-\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{B+\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{B-\gamma}{2}\right)}, \\ \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(B^0-\gamma^0) = \dfrac{\sin\frac{A+\gamma}{2}\sin\frac{A-\gamma}{2}\sin\frac{B+\gamma}{2}\sin\frac{B-\gamma}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos\gamma}, \end{cases}$$

quarum ope valores angulorum $\beta^0$, $\gamma^0$, vel $B^0$, $\gamma^0$ calculo logarithmico trigonometrico exacto determinantur.

In altera vero transformatione primum quantitatibus $m_1'$ et $\varkappa_1'$ ex formulis:

$$m'_1 = \frac{c - lm}{c + lm}, \qquad \varkappa'_1 = \frac{c - \lambda\varkappa}{c + \lambda\varkappa},$$

computatis, habemus:

$$l'_1 = \sqrt{\left(\frac{1-c}{1+c} \cdot \frac{m'_1}{\varkappa'_1}\right)}, \qquad \lambda'_1 = \sqrt{\left(\frac{1-c}{1+c} \cdot \frac{\varkappa'_1}{m'_1}\right)}, \qquad c'_1 = \sqrt{\left(\frac{1-c}{1+c} m'_1 \varkappa'_1\right)}.$$

Ponamus rursus:

$$9. \begin{cases} m_1 = \sin\alpha, & l_1 = \sin\beta, \quad c_1 = \sin\gamma, \quad \frac{c_1}{m_1} = \lambda_1 = \sin B, \quad \frac{c_1}{l_1} = \varkappa_1 = \sin A, \\ m'_1 = \sin\alpha', & l'_1 = \sin\beta', \quad c'_1 = \sin\gamma', \quad \frac{c'_1}{m'_1} = \lambda'_1 = \sin B', \quad \frac{c'_1}{l'_1} = \varkappa'_1 = \sin A', \end{cases}$$

atque nanciscimur valores angulorum $\alpha'$ et $A'$ ex formulis:

$$10. \quad \operatorname{tang}\left(45 - \frac{\alpha'}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\gamma}\right)}, \qquad \operatorname{tang}\left(45 - \frac{A'}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{\cos A \cos B}{\cos\gamma}\right)},$$

vel complementa $m'_1$ et $\varkappa'_1$ ipsa ex his:

$$11. \quad m'_1 = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad \varkappa'_1 = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} E;$$

ubi anguli auxiliares dantur per formulas:

$$12. \quad \cos\varepsilon = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\gamma}, \qquad \cos E = \frac{\cos A\cos B}{\cos\gamma}.$$

Tum cetera complementa erunt:

$$13. \begin{cases} l'_1 = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma \;\; \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}E = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma \sqrt{\left(\frac{\sin\alpha'}{\sin A'}\right)}, \\ \lambda'_1 = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma \operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varepsilon \;\; \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma \sqrt{\left(\frac{\sin A'}{\sin\alpha'}\right)}, \end{cases}$$

$$14. \quad c'_1 = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma \;\; \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varepsilon \;\; \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma \sqrt{(\sin\alpha' \sin A')}.$$

Tria ultima complementa, si angulus $\alpha$ vel $A$ minimus devenerit, etiam his formulis definiuntur:

$$15. \begin{cases} \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(\beta' + \gamma') = \dfrac{\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha \sin^2\tfrac{1}{2}\beta \cos\gamma}{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}, \\ \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(\beta' - \gamma') = \dfrac{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\cos^2\tfrac{1}{2}\beta\cos\gamma}, \\ \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(B' + \gamma') = \dfrac{\sin^2\tfrac{1}{2}A \sin^2\tfrac{1}{2}B \cos\gamma}{\cos\frac{A+\gamma}{2}\cos\frac{A-\gamma}{2}\cos\frac{B+\gamma}{2}\cos\frac{B-\gamma}{2}}, \\ \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(B' - \gamma') = \dfrac{\sin\frac{A+\gamma}{2}\sin\frac{A-\gamma}{2}\sin\frac{B+\gamma}{2}\sin\frac{B-\gamma}{2}}{\cos^2\tfrac{1}{2}A\cos^2\tfrac{1}{2}B\cos\gamma}, \end{cases}$$

unde anguli $\beta'$ et $\gamma'$ vel $B'$ et $\gamma'$ computari possunt, quibus adhibitis $m'_1$, $l'_1$, $c'_1$, $\lambda'_1$, $\varkappa'_1$ determinantur.

Si anguli in antecedentibus adhibiti ad tam exiguos valores reducti sint, ut calculus logarithmico-trigonometricus haud satis sufficientem praebeat approximationem, alium algorithmum proponamus necesse est, quem in secunda transformatione praecipue adhibeamus necesse erit, quippe in qua exactissimi logarithmorum modulorum valores, ad valorem integralis ipsius computandum, desiderari postea elucebit. Ex theorematibus (47.) et (48.) art. XII. patet, binorum modulorum complementa vel $m'_1$ et $l'_1$ vel $M'_1$ et $L'_1$ denique multo minoribus altera quam altera gavisura esse valoribus, uno excepto casu, si fuerit $cl = m$. Itaque plurimis in casibus, complementis $m'_1$ et $l'_1$ ut ordinis $\delta^{\circ}_1$ tertioque $c'_1$ ut ordinis $\delta$ positis, respective complementa $M'_1$ et $L'_1$ ordinis $\delta$ fiunt, et inverse. Quam ob rem ponamus illa maiora complementa fore $m'_1$ et $l'_1$, ipsaque ad aequalitatem appropinquare, atque quia anguli $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $B$, $A$ ultimi parvis valoribus gaudeant, nec per primam nec per secundam computationem logarithmico-trigonometricam logarithmos complementorum usque ad quaesitum decimalium numerum exacte computari posse. His statutis hac nova via ad computationem exactam modulorum progredi licet.

Primum complementum $m'_1 = \sin\alpha'$ per formulam veterem:

$$\operatorname{tang}\left(45-\frac{\alpha'}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{ml}{c}\right)}$$

computetur, cetera vero per formulas:

$$16.\quad \begin{cases} l'_1 = \dfrac{l_1 m_1}{1+c}\cdot\dfrac{c+LM}{c+lm}, \\ c'_1 = \dfrac{c_1^2}{(1+c)^2}\cdot\dfrac{m'_1}{l'_1}, \\ L'_1 = \dfrac{L_1 M_1}{1+c}\cdot\dfrac{c+lm}{c+LM} = \dfrac{c'_1}{m'_1}, \\ M'_1 = \dfrac{c'_1}{l'_1}, \end{cases}$$

quae formulae ex form. (2.), (3.), (4.), (5.) art. XII. sponte emanant. Logarithmi enim horum modulorum facillime et quam exactissime hoc modo computantur. Inventis quantitatibus:

$$\log\frac{lm}{c},\quad \log\frac{LM}{c},\quad \log c,\quad \log l_1 m_1,\quad 2\log c_1$$

indeque computatis logarithmis:

$$\log\left(1+\frac{lm}{c}\right),\qquad \log\left(1+\frac{LM}{c}\right),\qquad \log(1+c)$$

habemus:

$$17. \begin{cases} \log l'_1 = \log l_1 m_1 + \log\left(1+\frac{LM}{c}\right) + \log\operatorname{com}(1+c) + \log\operatorname{com}\left(1+\frac{lm}{c}\right), \\ \log c'_1 = 2\log c_1 + 2\log\operatorname{com}(1+c) + \log\left(\frac{m'_1}{l'_1}\right), \\ \log L'_1 = \log L_1 M_1 + \log\left(1+\frac{lm}{c}\right) + \log\operatorname{com}(1+c) + \log\operatorname{com}\left(1+\frac{LM}{c}\right), \\ \log M'_1 = \log c'_1 + \log\operatorname{com} l'_1. \end{cases}$$

Sed etiam logarithmi $\log m'_1$ et $\log M'_1$ ipsi, ad qualescunque valores decreverint, tamen haud minus exacte computari possunt per has formulas:

$$18. \begin{cases} m'_1 = \frac{l_1^2}{c^2} \cdot \frac{\left(1+L^2\frac{m_1^2}{l_1^2}\right)}{\left(1+\frac{lm}{c}\right)^2} \left(1 - \frac{m_1^2}{\left(1+L^2\frac{m_1^2}{l_1^2}\right)}\right), \\ M'_1 = \frac{L_1^2}{c^2} \cdot \frac{\left(1+l^2\frac{m_1^2}{l_1^2}\right)}{\left(1+\frac{lm}{c}\right)^2} \left(1 - \frac{M_1^2}{\left(1+l^2\frac{m_1^2}{l_1^2}\right)^2}\right), \end{cases}$$

quia logarithmi singulorum factorum exactissime semper inveni possunt. Error ultimi decimalis, per additionem quinque logarithmorum ortus, ob exiguitatem complementorum nullius momenti fit; formulae vero illae ex formulis (1.) art. XII. facile deducuntur, atque, si $m'_1$ et $M'_1$ trigonometrice non amplius computari possunt ad computationem totius schematis adhibeantur necesse est. Transformatione eatenus continuata, ut quantitates $M_1^2$ et postea $m_1^2$ pro quaesito decimalium numero evanuerint, habemus has formulas:

$$19. \begin{cases} m'_1 = \frac{l_1^2}{4}\left(1+\frac{m_1^2}{l_1^2}\right), & L'_1 = \frac{L_1 M_1}{2}, \\ l'_1 = \frac{l_1 m_1}{2}, & M'_1 = \frac{L_1^2}{4}\left(1+\frac{m_1^2}{l_1^2}\right), \\ c'_1 = \frac{c_1^2}{(1+c)^2} \cdot \frac{m_1}{l_1}, & \end{cases}$$

quae, si adhuc $\log \frac{m_1^2}{l_1^2}$ ab 0 usque ad quaesitum decimalium numerum haud discrepat, in has abeunt:

$$20. \quad m'_1 = l'_1 = \frac{l_1^2}{2} = \frac{m_1^2}{2}, \quad c'_1 = \frac{c_1^2}{4}, \quad L'_1 = M'_1 = \frac{L_1^2}{2} = \frac{M_1^2}{2}.$$

Diversis his methodis apte adhibitis, per algorithmum continuatum complementa modulorum quantopere libet deminuere possumus. In altera transformatione, ubi, tantam certitudinem omnium modulorum logarithmorum haud desiderari, postea videbimus, tamen similes formulas propona-

mus. Nimirum habemus ex form. (1.), (2.), (3.), (4.), (5.) art. XII. superioribus has:

$$21.\quad\begin{cases} c^0 = \dfrac{\mathfrak{l}^2}{m_1^2}\cdot\dfrac{\left(1+\frac{\mathfrak{l}_1^2 c_1^2}{l^2}\right)}{\left(1+\frac{l_1 c_1}{m_1}\right)^2}\left(1-\dfrac{c^2}{1+\frac{\mathfrak{l}_1^2 c^2}{l^2}}\right) = \dfrac{m^0}{\mathfrak{l}^0}, \\[2ex] l^0 = \dfrac{cl}{(1+m_1)}\cdot\dfrac{\left(1+\frac{\mathfrak{k}\mathfrak{l}}{m_1}\right)}{\left(1+\frac{c_1 l_1}{m_1}\right)}, \\[2ex] m^0 = \dfrac{m^2}{(1+m_1)}\cdot\dfrac{c^0}{l^0}, \\[2ex] \mathfrak{l}^0 = \dfrac{\mathfrak{k}\mathfrak{l}}{(1+m_1)}\cdot\dfrac{\left(1+\frac{c_1 l_1}{m_1}\right)}{\left(1+\frac{\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1}\right)}, \\[2ex] \mathfrak{k}^0 = \dfrac{\mathfrak{l}^{02}}{m_1^2}\cdot\dfrac{\left(1+\frac{l_1^2 c^2}{l^2}\right)}{\left(1+\frac{\mathfrak{k}_1\mathfrak{l}_1}{m_1}\right)^2}\left(1-\dfrac{\mathfrak{k}^2}{\left(1+\frac{l_1^2 c^2}{l^2}\right)}\right), \end{cases}$$

quae, si quantitates $c^2$ et $\mathfrak{k}^2$ pro quaesito decimalium numero iam negligi possunt, in has abeunt:

$$c^0 = \frac{l^2}{4}\left(1+\frac{c^2}{l^2}\right), \qquad \mathfrak{l}^0 = \frac{\mathfrak{k}\mathfrak{l}}{2},$$

$$l^0 = \frac{cl}{2}, \qquad \mathfrak{k}^0 = \frac{l_1^2}{4}\left(1+\frac{c^2}{l^2}\right),$$

$$m^0 = \frac{m^2}{(1+m_1)}\cdot\frac{c}{l},$$

vel si adeo $\frac{c}{l} = 1$ poni possit, in has:

$$c^0 = l^0 = \frac{c^2}{2}, \quad m^0 = \frac{m^2}{4}, \quad \mathfrak{k}^0 = \mathfrak{l}^0 = \frac{\mathfrak{k}^2}{2}.$$

## XIV.

### De natura et computatione numeratorum.

Aggrediamur nunc ad numeratores integralium tractandos atque computandos, atque disquiramus, ad quos limites, transformationibus repetitis, illi appropinquent. Habuimus in priori transformatione quatuor formulas (10.) art. XI., quae facilibus reductionibus factis, in has abeunt:

$$1.\quad\begin{cases} P'_1 = \frac{2}{(1+c)(c+lm)}\left[\frac{c}{2}P_1+\tfrac{1}{2}Q_1\right], \\ Q'_1 = \frac{2}{(1+c)(c+lm)}\left[\frac{clm}{c+lm}P_1+\frac{c}{c+lm}Q_1\right], \\ P'_2 = \frac{2}{(1+c)(c+LM)}\left[\frac{c}{2}P_2+\tfrac{1}{2}Q_2\right], \\ Q'_2 = \frac{2}{(1+c)(c+LM)}\left[\frac{cLM}{c+LM}P_2+\frac{c}{c+LM}Q_2\right], \end{cases}$$

Adiiciamus adhuc has formulas concinnas:

$$2.\quad\begin{cases} P'_1-Q'_1 = \frac{2}{(1+c)(c+lm)}\left[\frac{c}{2}P_1-\tfrac{1}{2}Q_1\right]m'_1, \\ P'_2-Q'_2 = \frac{2}{(1+c)(c+LM)}\left[\frac{c}{2}P_2-\tfrac{1}{2}Q_2\right]M'_1. \end{cases}$$

Hic quantitates $P_1$ et $Q_1$ coefficientes integralis dati erant, aeque ac $P_2$ et $Q_2$ coefficientes integralis complementarii ita determinantur:

$$3.\quad P_2 = \frac{P_1-Q_1}{l_1 m_1}, \qquad Q_2 = \frac{P_1 c^2-Q_1}{l_1 m_1}.$$

Inde ex formulis (1.) clarum fit, quia factores $\frac{2}{(1+c)(c+LM)}$ et $\frac{2}{(1+c)(c+lm)}$ transformationibus repetitis denique $= \frac{1}{2}$ fiunt, nec non alii factores $\left(\frac{P_1 c}{2}-\frac{1}{2}Q_1\right)$ et $\left(\frac{P_2 c}{2}-\frac{1}{2}Q_2\right)$ in $\frac{(P_1-Q_1)}{2}$ et $\frac{P_2-Q_2}{2}$ abeunt, tertii vero factores $m'_1$ et $M'_1$ denique evanescunt, etiam quantitates $P_1$ et $Q_1$ ad aequalitatem rapide denique convergere, eademque natura quantitates $P_2$ et $Q_2$ gaudere. Id quod hoc theoremate magis strenue pronunciatur.

„Quantitates:

$$„4.\quad 2^n(P_2^{(n)}, \qquad 2^n Q_2^{(n)}, \qquad 2^n\left(\frac{P_1^{(n)}-Q_1^{(n)}}{(m_1^{(n)})^2}\right),$$

„ad eundem finitum certum denique limitem appropinquant, similique ra-„tione quantitates:

$$„2^m P_1^{(m)}, \qquad 2\,Q_1^{(m)}, \qquad 2^m\left(\frac{P_2^{(m)}-Q_2^{(m)}}{(M_1^{(m)})^2}\right.$$

„ad alium limitem eundem accedunt."

Demonstratio.

Ponamus transformationibus toties repetitis, ut usque ad certum decimalium numerum habeamus:

$$m_1^{(n)} = l_1^{(n)} = \left(\frac{l_1^{(n-1)}}{2}\right)^2 = \left(\frac{m_1^{(n-1)}}{2}\right)^2, \qquad \frac{l^{(n)}m^{(n)}}{c^{(n)}} = 1, \qquad c^{(n)} = 1,$$

ubi $n$ numerus transformationum desideratus fuit.

Itaque erit, id quod formulae (3.) docent:

$$P_2^{(n+1)} = Q_2^{(n+1)} = \frac{P_1^{(n+1)} - Q_1^{(n+1)}}{[m_1^{(n+1)}]^2},$$

atque

$$2^{(n+1)} \frac{P_1^{(n+1)} - Q_1^{(n+1)}}{(m_2^{(n+1)})^2} = 2^n \left(\frac{P_1^{(n)} - Q_1^{(n)}}{(m^{(n)})^2}\right),$$

id quod erat demonstrandum. Similiter altera pars theorematis demonstratur. Indeque clarum fit, denique fore:

$$P_1^{(n)} = Q_1^{(m)} = \frac{P_2^{(m)} - Q_2^{(m)}}{(M_1^{(m)})^2} = \tfrac{1}{2} P_1^{(n-1)} = \tfrac{1}{2} Q_1^{(m-1)} = \tfrac{1}{2} \frac{P_2^{(m-1)} - Q_2^{(m-1)}}{(M_1^{(m-1)})^2},$$

$$P_2^{(n)} = Q_2^{(n)} = \frac{P_1^{(n)} - Q_1^{(n)}}{(m_1^n)^2} = \tfrac{1}{2} P_2^{(n-1)} = \tfrac{1}{2} Q_2^{(n-1)} = \tfrac{1}{2} \frac{P_1^{(n-1)} - Q_1^{(n-1)}}{(m_1^{n-1})^2},$$

usque ad eundem certum decimalium numerum.

Si alteram formam numeratorum ($R_1 \cos \Phi + S \sin^2 \Phi$) praeferamus, habemus ex form. (20.) artic. XI.:

$$5. \quad \begin{cases} R'_1 = \dfrac{2}{(1+c)(c+lm)} \left[\dfrac{1+c}{2} R_1 - \tfrac{1}{2} S_1\right], \\ S'_1 = \dfrac{2}{(1+c)(c+lm)} \left[\tfrac{1}{2} S_1 - \dfrac{1-c}{2} R_1\right] m'_1. \end{cases}$$

Ex form. (19.) eiusdem art. sequitur adhuc fore:

$$6. \quad R'_2 = \frac{1}{l'_1 m'_1} S'_1, \qquad S'_2 = R'_1 L'_1 M'_1.$$

Hic theorema antecedens in hoc abit:

„Quantitates

$$„7. \quad 2^n R_2^{(n)}, \qquad \frac{2^n}{[m_1^{(n)}]^2} S_1^{(n)},$$

„ad eundem limitem appropinquant finitum, similiterque quantitates

$$„2^n R_1^{(n)}, \qquad \frac{2^n}{[M_1^{(n)}]^2} S_2^{(n)},$$

„ad alium limitem finitum accedunt."

Iam vero nihil restat, nisi ut expeditam methodum adiiciamus, qua numeratores ad valorem integralis determinandum satis exacte computentur, quippe quam hic ita instituamus necesse est, ut in priori numeratoris forma logarithmi coefficientium ipsorum $P$ et $Q$ in quantitatibus $P'_1$, $P'_2$, $P'_1 - Q'_1$, $P'_2 - Q'_2$, in posteriori vero forma logarithmi coefficientium ipsorum $R$ et $S$ in quantitatibus:

$$R'_1, \quad S'_1, \quad R'_2, \quad S'_2$$

in quaque transformatione usque ad ultimum decimalem exacte determinentur.

Ponamus hunc ad finem illic:

$$8.\quad \left\{\begin{array}{lll} n=1, & P_1 & = pP+qQ, \\ & P_1-Q_1 & = p_1P-q_1Q, \\ \frac{4}{(1+c)(c+lm)}=n', & 2P'_1 & = n'[p'P+q'Q], \\ & 2(P'_1-Q'_1) & = n'[p'_1P-q'_1Q], \\ \frac{4}{(1+c')(c'+l'm')}=n'', & 2^2P''_1 & = n'n''[p''P+q''Q], \\ & 2^2(P''_1-Q''_1) & = n'n''[p''_1P-q''_1Q], \\ \frac{4}{(1+c'')(c''+l''m'')}=n''', & 2^3P'''_1 & = n'n''n'''[p'''P+q'''Q], \\ & 2^3(P'''_1-Q'''_1) & = n'n''n'''[p'''_1P-q'''_1Q], \\ & \text{etc.} & \end{array}\right.$$

Ex his quantitatibus sine ullo negotio emanant quantitates $P_2$ et $P_2-Q_2$ nimirum ex formulis (3.) adhibitis erit:

$$9.\quad \left\{\begin{array}{ll} P_2 & = \frac{1}{l_1m_1}[p_1P-q_1Q], \\ (P_2-Q_2) & = L_1M_1[pP+qQ], \\ 2P'_2 & = \frac{n'}{l'_1m'}[p'_1P-q'_1Q], \\ 2(P'_2-Q'_2) & = n'L'_1M'_1[p'P+q'Q], \\ 2^2P''_2 & = \frac{n'n''}{l''_1m''_1}[p''_1P-q''_1Q], \\ 2^2(P''_2-Q_2) & = n'n''L''_1M''_1[p''P+q''Q], \\ \text{etc.} & \end{array}\right.$$

Iam vero ad quantitates $p$, $q$ computandas habemus has formulas ex (1.) et (2.) sequentes:

$$p=1,\quad q=0,\quad p_1=1,\quad q_1=1,$$

$$10.\quad \left\{\begin{array}{lll} 2p' = & p(1+c)-p_1 & = c, \\ 2p'_1 = & [p_1-p(1-c)]m'_1 & = cm'_1, \\ 2q' = & q(1+c)+q_1 & = 1, \\ 2q'_1 = & [q_1+q(1-c)]m'_1 & = m'_1, \\ 2p'' = & p'(1+c')-p'_1 & = c\left[\frac{1+c'-m'_1}{2}\right], \\ 2p''_1 = & [p'_1-p'(1-c)]m''_1 & = cm''_1\left[\frac{m'_1-1+c'}{2}\right], \\ 2q'' = & q'(1+c')+q'_1 & = \frac{1+c'+m'_1}{2}, \\ 2q''_1 = & [q'_1+q'(1-c')]m''_1 & = m''_1\left[\frac{m'_1+1-c'}{2}\right], \\ & \text{etc.} & \end{array}\right.$$

ita ut habeamus post $n$ transformationes:

$$11.\quad \begin{cases} 2p^{(n)} = p^{(n-1)}(1+c^{(n-1)}) - p_1^{(n-1)}, \\ 2p_1^{(n)} = [p_1^{(n-1)} - p^{(n-1)}(1-c^{(n-1)})]\, m_1^{(n)}, \\ 2q^{(n)} = q^{(n-1)}(1+c^{(n-1)}) + q_1^{(n-1)}, \\ 2q_1^{(n)} = [q_1^{(n-1)} + q^{(n-1)}(1-c^{(n-1)})]\, m_1^{(n)}, \end{cases}$$

quae formulae cum his ad computationem aptioribus commutari possunt:

$$12.\quad \begin{cases} 2p^{(n)} = 2p^{(n-1)} - p_1^{(n-1)}, \\ 2q^{(n)} = 2q^{(n-1)} - q_1^{(n-1)}, \\ 2p_1^{(n)} = p_1^{(n-1)} m_1^{(n)} \left[1 - \frac{p^{(n-1)}}{p_1^{(n-1)}}(1-c_1^{(n-1)})\right], \\ 2q_1^{(n)} = q_1^{(n-1)} m_1^{(n)} \left[1 + \frac{q^{(n-1)}}{q_1^{(n-1)}}(1-c_1^{(n-1)})\right], \end{cases}$$

quarum ultimae denique in has abeunt:

$$13.\quad 2p_1^{(n)} = p_1^{(n-1)} m_1^{(n)}, \qquad 2q_1^{(n)} = q_1^{(n-1)} m_1^{(n)}.$$

Si vero alteram numeratoris formam expeditissime computare adhibere velimus, ponamus:

$$14.\quad \begin{cases} R_1 = rR - sS, & 2R_1' = n'(r'R - s'S), & 2^2 R_1'' = n'n''(r''R - s''S), \\ S_1 = s_1 S - r_1 R, & 2S_1' = n'(s_1' S - r_1' R), & 2^2 S_1'' = n'n''(s_1'' S - r_1'' R), \end{cases}$$

unde sequuntur ex formulis (6.) hae:

$$15.\quad \begin{cases} R_2 = \frac{1}{l_1 m_1}(s_1 S - r_1 R), \\ S_2 = l_1 m_1 (rR - sS), \\ 2R_2' = \frac{n'}{l_1' m_1'}(s_1' S - r_1' R), \\ 2S_2' = n' l_1' m_1' (r'R - s'S), \\ 2^2 R_2'' = \frac{n_1' n_1''}{l_1'' m_1''}(s_1'' S - r_1'' R), \\ 2^2 S_2'' = n'n'' l_1'' m_1'' (r''R - s''S), \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Coefficientes vero $r$, $s$, etc. ex his formulis, quae ex form. (5.) sequuntur, determinantur:

$$r = 1, \quad s = 0, \quad r_1 = 0, \quad s_1 = 1,$$

$$16.\quad \begin{cases} 2r' = r(1+c) + r_1 & = 1+c, \\ 2r_1' = [r(1-c) + r_1]\, m_1' & = (1-c)\, m_1', \\ 2s' = s(1+c) + s_1 & = 1, \\ 2s_1' = [s(1-c) + s_1]\, m_1' & = m_1', \end{cases}$$

$$16.\quad \begin{cases} 2r'' = r'(1+c')+r'_1 = \dfrac{(1+c)(1+c')+(1-c)m'_1}{2}, \\ 2r''_1 = [r'(1-c')+r'_1]\,m''_1 = \left(\dfrac{(1+c)(1-c')+(1-c)m'_1}{2}\right)m''_1, \\ 2s'' = s'(1+c')+s'_1 = \dfrac{(1+c')+m'_1}{2}, \\ 2s''_1 = [s'(1-c')+s'_1]\,m''_1 = \left(\dfrac{(1-c')+m'_1}{2}\right)m''_1, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

ita ut post $n$ transformationes habeamus:

$$17.\quad \begin{cases} 2r^{(n)} = r^{(n-1)}(1+c^{(n-1)})+r_1^{(n-1)}, \\ 2r_1^{(n)} = [r^{(n-1)}(1-c^{(n-1)})+r_1^{(n-1)}]\,m_1^{(n)}, \\ 2s^{(n)} = s^{(n-1)}(1+c^{(n-1)})+s_1^{(n-1)}, \\ 2s_1^{(n)} = [s^{(n-1)}(1-c^{(n-1)})+s_1^{(n-1)}]\,m_1^{(n)}; \end{cases}$$

quae formulae mox in has abeunt, computatu faciliores:

$$18.\quad \begin{cases} 2r^{(n)} = 2r^{(n-1)}+r_1^{(n-1)}, \\ 2s^{(n)} = 2s^{(n-1)}+s_1^{(n-1)}, \\ 2r_1^{(n)} = r_1^{(n-1)}m_1^{(n)}\left[1+\dfrac{r^{(n-1)}}{r_1^{(n-1)}}(1-c^{(n-1)})\right], \\ 2s_1^{(n)} = s_1^{(n-1)}m_1^{(n)}\left[1+\dfrac{s^{(n-1)}}{s_1^{(n-1)}}(1-c^{(n-1)})\right], \end{cases}$$

quarum ultimae denique fiunt:

$$19.\quad 2r_1^{(n)} = r_1^{(n-1)}m_1^{(n)}, \qquad 2s_1^{(n)} = s_1^{(n-1)}m_1^{(n)}.$$

Ex theorematibus (4.) et (7.) patet, terminos serierum

$$20.\quad \begin{cases} np, & nn'p', & nn'n''p'', & \text{etc.} \\ nq, & nn'q', & nn'n''q'', & \text{etc.} \\ \dfrac{np_1}{l_1m_1}, & \dfrac{nn'p'_1}{l'_1m'_1}, & \dfrac{nn'n''p''_1}{l''_1m''_1}, & \text{etc.} \\ \dfrac{nq_1}{l_1m_1}, & \dfrac{nn'q'_1}{l'_1m'_1}, & \dfrac{nn'n''q''_1}{l''_1m''_1}, & \text{etc.} \end{cases}$$

ut certos quosdam limites finitos appropinquare, quos respective per $\Pi$, K, $\Pi_1$, $K_1$ significabimus. Eodem modo termini serierum quatuor

$$21.\quad \begin{cases} nr, & nn'r', & nn'n''r'', & \text{etc.} \\ ns, & nn's', & nn'n''s'', & \text{etc.} \\ \dfrac{nr_1}{l_1m_1}, & \dfrac{nn'r'_1}{l'_1m'_1}, & \dfrac{nn'n''r''_1}{l''_1m''_1}, & \text{etc.} \\ \dfrac{ns_1}{l_1m_1}, & \dfrac{nn's'_1}{l'_1m'_1}, & \dfrac{nn'n''s''}{l''_1m''_1}, & \text{etc.} \end{cases}$$

ad certos quosdam limites accedunt, quos per P, $\Sigma$, $P_1$, $\Sigma_1$, significabimus.

Iam vero aggrediamur ad numeratores in altera transformatione aeque tractandos. Ex formulis (39.) et (42.) art. XI. hae formulae deducuntur, pro forma $\Pi \cos \varphi^2 + \mathrm{K} \sin \varphi^2$ numeratoris valentes:

$$21. \quad \begin{cases} \Pi_1^0 = \dfrac{2}{(1+m_1)(m+c_1 l_1)} \left[\dfrac{m_1}{2} \Pi_1 + \tfrac{1}{2} \mathrm{K}_1\right], \\ \Pi_1^0 - \mathrm{K}_1^0 = \dfrac{2}{(1+m_1)(m_1+c_1 l_1)} \left[\dfrac{m_1}{2} \Pi_1 - \tfrac{1}{2} \mathrm{K}_1\right] c^0, \end{cases}$$

$$22. \quad \Pi_2^0 = \frac{\Pi_1^0 - \mathrm{K}_1^0}{l^0 c^0}, \quad \mathrm{K}_2^0 = \frac{\Pi_1^0 m_1^{0^2} - \mathrm{K}_1^0}{l^0 c^0}.$$

Eodem modo pro altera forma numeratoris $(\mathrm{P} - \Sigma \sin^2 \varphi)$ ex form. (50.) et (51.) art. XI. hae sequuntur formulae:

$$23. \quad \begin{cases} \mathrm{P}_1^0 = \dfrac{2}{(1+m_1)(m_1+c_1 l_1)} \left[\dfrac{1+m_1}{2} \mathrm{P}_1 - \tfrac{1}{2} \Sigma_1\right], \\ \Sigma_1^0 = \dfrac{2}{(1+m_1)(m_1+c_1 l_1)} \left[\tfrac{1}{2} \Sigma - \dfrac{1-m_1}{2} \mathrm{P}_1\right] c^0, \end{cases}$$

$$24. \quad \mathrm{P}_2^0 = \frac{\Sigma_1^0}{c^0 l^0}, \quad \Sigma_2^0 = \mathrm{P}_1^0 \mathfrak{k}^0 \mathfrak{l}^0.$$

Rursus hîc theoremata habemus haec:

„Quantitates:

$$„24. \quad \begin{cases} 2^{(n)} \Pi_2^{(n)}, & 2^{(n)} \mathrm{K}_2^{(n)}, & 2^n \dfrac{\Pi_1^{(n)} - \mathrm{K}_1^{(n)}}{(c^{(n)})^2}, \\ 2^n \Pi_1^{(n)}, & 2^n \mathrm{K}_1^{(n)}, & 2^n \dfrac{\Pi_2^{(n)} - \mathrm{K}_2^{(n)}}{(\mathfrak{k}^{(n)})^2}, \\ 2^n \mathrm{P}_2^{(n)}, & \dfrac{2^n}{(c^{(n)})^2} \Sigma_1^{(n)}, \\ 2^n \mathrm{P}_1^{(n)}, & \dfrac{2^n}{(\mathfrak{k}^{(n)})^2} \Sigma_2^{(n)}, \end{cases}$$

„ubi per indicem $n$ adiectum numerus transformationum repetitarum de-
„signatur, numero $n$ crescente ad certos quosdam limites finitos accedunt."

Ad numeratores facile rursus comparandos ponamus rursus:

$$25. \quad \begin{cases} \nu = 1, & \Pi_1 = \pi \Pi + k \mathrm{K}, \quad \text{vel:} \quad \mathrm{P}_1 = \varrho \mathrm{P} - \sigma \Sigma, \\ & \Pi_1 - \mathrm{K}_1 = \pi_1 \Pi - k_1 \mathrm{K}, \quad \Sigma_1 = \sigma_1 \Sigma - \varrho_1 \mathrm{P}, \\ \nu^0 = \dfrac{4}{(1+m_1)(m_1+c_1 l_1)}, & 2 \Pi_1^0 = \nu^0 (\pi^0 \Pi + k^0 \mathrm{K}), \quad 2 \mathrm{P}_1^0 = \nu^0 (\varrho^0 \mathrm{P} - \sigma^0 \Sigma), \\ & 2 (\Pi_1^0 - \mathrm{K}_1^0) = \nu^0 (\pi_1^0 \Pi - k_1^0 \mathrm{K}), \quad 2 \Sigma_1^0 = \nu^0 (\sigma_1^0 \Sigma - \varrho_1^0 \mathrm{P}), \\ \nu^{00} = \dfrac{4}{(1+m_1^0)(m_1^0+c_1^0 l_1^0)}, & 2^2 \Pi_1^{00} = \nu^0 \nu^{00} (\pi^{00} \Pi + k^{00} \mathrm{K}), \quad 2 \mathrm{P}_1^{00} = \nu^0 \nu^{00} (\varrho^{00} \mathrm{P} - \sigma^{00} \Sigma), \\ & 2^2 (\Pi_1^{00} - \mathrm{K}_1^{00}) = \nu^0 \nu^{00} (\pi_1^{00} \Pi - k_1^{00} \mathrm{K}), \quad 2 \Sigma_1^{00} = \nu^0 \nu^{00} (\sigma_1^{00} \Sigma - \varrho_1^{00} \mathrm{P}), \\ & \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{cases}$$

unde formulis adhibitis sponte hae prodeunt formulae:

$$26.\quad \left\{\begin{array}{llll}
\Pi_2 = \frac{1}{lc}(\pi_1\Pi - k_1 K), & & P_2 = \frac{1}{lc}(\sigma_1\Sigma - \varrho_1 P), \\
\Pi_2 - K_2 = \mathfrak{k}\mathfrak{l}(\pi\Pi + kK), & & \Sigma_2 = \mathfrak{k}\mathfrak{l}(\varrho P - \sigma\Sigma), \\
2\,\Pi_2^0 = \frac{\nu^0}{l^0 c^0}(\pi_1^0\Pi + k_1^0 K), & & P_2^0 = \frac{\nu^0}{l^0 c^0}(\sigma_1^0\Sigma - \varrho_1^0 P), \\
2(\Pi_2^0 - K_2^0) = \nu^0\mathfrak{k}^0\mathfrak{l}^0(\pi^0\Pi + k^0 K), & & \Sigma_2^0 = \nu^0\mathfrak{k}^0\mathfrak{l}^0(\varrho^0 P - \sigma^0\Sigma), \\
2^2\,\Pi_2^{00} = \frac{\nu^0\nu^{00}}{l^{00}c^{00}}(\pi_1^{00}\Pi - k_1^{00}K), & & P_2^{00} = \frac{\nu^0\nu^{00}}{l^{00}c^{00}}(\sigma_1^{00}\Sigma - \varrho_1^{00}P), \\
2^2(\Pi_2^{00} - K_2^{00}) = \nu^0\nu^{00}\mathfrak{k}^{00}\mathfrak{l}^{00}(\pi^{00}\Pi + k^{00}K), & & \Sigma_2^{00} = \nu^0\nu^{00}\mathfrak{k}^{00}\mathfrak{l}^{00}(\varrho^{00}P - \sigma^{00}\Sigma), \\
\text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}\right.$$

Coefficientes vero $\pi$, $k$, ex his formulis computantur:

$$27.\quad \left\{\begin{array}{l}
\pi = 1, \quad k = 0, \quad \pi_1 = 1, \quad k_1 = 1, \\
2\pi^0 = \pi(1+m_1) - \pi_1 = m_1, \\
2\pi_1^0 = [\pi_1 - \pi(1-m_1)]\,c^0 = m_1 c^0, \\
2k^0 = k(1+m_1) + k_1 = 1, \\
2k_1^0 = [k_1 + k(1-m_1)] = m_1, \\
\text{etc.}
\end{array}\right.$$

et generaliter:

$$\begin{array}{l}
2\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)}(1+m_1^{(n-1)}) - \pi_1^{(n-1)}, \\
2\pi_1^{(n)} = [\pi^{(n-1)} - \pi_1^{(n-1)}(1-m_1^{(n-1)})]\,c^{(n)}, \\
2k^{(n)} = k^{(n-1)}(1+m_1^{(n-1)}) + k_1^{(n-1)}, \\
2k_1^{(n)} = [k_1^{(n-1)} + k^{(n-1)}(1-m^{(n-1)})]\,c^{(n)},
\end{array}$$

quae formulae mox in has simplices abeunt:

$$28.\quad \left\{\begin{array}{l}
2\pi^{(n)} = 2\pi^{(n-1)} - \pi_1^{(n-1)}, \\
2\,k^{(n)} = 2\,k^{(n-1)} - k_1^{(n-1)}, \\
2\pi_1^{(n)} = \pi_1^{(n-1)}\,c^{(n)}, \\
2\,k_1^{(n)} = k_1^{(n-1)}\,c^{(n)}.
\end{array}\right.$$

Contra quantitates $\varrho$, $\sigma$, in altera forma nominatorum computandorum adhibita, his formulis calculantur:

$$29.\quad \left\{\begin{array}{l}
\varrho = 1, \quad \sigma = 0, \quad \varrho_1 = 0, \quad \sigma_1 = 1, \\
2\varrho^0 = (1+m_1)\,\varrho + \varrho_1, \\
2\varrho_1^0 = ((1-m_1)\,\varrho + \varrho_1)\,c^0, \\
2\sigma^0 = (1+m_1)\sigma + \sigma_1, \\
2\sigma_1^0 = [(1-m_1)\sigma + \sigma_1]\,c^0, \\
\text{etc.}
\end{array}\right.$$

et generaliter:

$$2\varrho^{(n)} = \varrho^{(n-1)}(1+m_1^{(n-1)})+\varrho_1^{(n-1)},$$
$$2\varrho_1^{(n)} = [\varrho^{(n-1)}(1-m_1^{(n-1)})+\varrho_1^{(n-1)}]c^0,$$
$$2\sigma^{(n)} = \sigma^{(n-1)}(1+m_1^{(n-1)})+\sigma_1^{(n-1)},$$
$$2\sigma_1^{(n)} = \sigma^{(n-1)}(1-m_1^{(n-1)})+\sigma_1^{(n-1)},$$

quae formulae post nonnullas transformationes in has abeunt:

$$2\varrho^{(n)} = 2\varrho^{(n-1)}+\varrho_1^{(n-1)}, \qquad 2\varrho_1^{(n)} = \varrho_1^{(n-1)}m_1^{(n)},$$
$$2\sigma^{(n)} = 2\sigma^{(n-1)}+\sigma_1^{(n-1)}, \qquad 2\sigma_1^{(n)} = \sigma_1^{(n-1)}m_1^{(n)}.$$

Ex theoremate (24.) prodit hoc, „termini serierum:

$$„\nu\pi,\quad \nu\nu^0\pi^0,\quad \nu\nu^0\nu^{00}\pi^{00},\ \ldots\ldots \qquad „\nu\varrho,\quad \nu\nu^0\varrho,\quad \nu\nu^0\nu^{00}\varrho^{00},\ \ldots\ldots,$$
$$„\nu k,\quad \nu\nu^0 k^0,\quad \nu\nu^0\nu^{00}k^{00},\ \ldots\ldots \qquad „\nu\sigma,\quad \nu\nu^0\sigma,\quad \nu\nu^0\nu^{00}\sigma^{00},\ \ldots\ldots$$

„ad certos finitos limites appropinquant, quos in sequentibus per

$$„P,\quad K,\quad R,\quad S,$$

„designabimus. Eodem modo termini serierum:

$$„\frac{\nu\pi}{lc},\quad \frac{\nu\nu^0\pi_1^0}{l^0c^0},\quad \frac{\nu\nu^0\nu^{00}\pi_1^{00}}{l^{00}c^{00}},\ \ldots\ldots \qquad „\frac{\nu\varrho_1}{lc},\quad \frac{\nu\nu^0\varrho_1^0}{l^0c^0},\quad \frac{\nu\nu^0\nu^{00}\varrho_1^{00}}{l^{00}c^{00}},\ \ldots\ldots$$
$$„\frac{\nu k_1}{lc},\quad \frac{\nu\nu^0k_1^0}{l^0c^0},\quad \frac{\nu\nu^0\nu^{00}k_1^{00}}{l^{00}c^{00}},\ \ldots\ldots \qquad „\frac{\nu\sigma_1}{lc},\quad \frac{\nu\nu^0\sigma_1^0}{l^0c^0},\quad \frac{\nu\nu^0\nu^{00}\sigma_1^{00}}{l^{00}c^{00}},\ \ldots\ldots$$

„ad certos denique limites respective:

$$„P_1,\quad K_1,\quad R_1,\quad S_1,$$

„appropinquant." Quae theoremata etiam directe, mutatis mutandis, ex similibus in altera transformatione deducere licet.

## XV.

### Quomodo limites argumentorum, integraliaque indefinita et definita ipsa computentur.

Revocemus formulas (44.) et (45.) articuli XI., quibus limites $\Phi_1^0$ et $\Phi_2^0$, $\psi_1^0$ et $\psi_2^0$ determinandi erant, ut satisfieret aequationibus integralibus (40.) vel (48.) eiusdem articuli.

Ponamus brevitatis gratia hic et in sequentibus:

$$1.\quad \sqrt{\left(\frac{(1-m^2\sin^2\varphi)\left(1-\frac{m_1^2-c_1^2l_1^2}{m_1^2}\sin^2\varphi\right)}{[1-(1-c_1^2l_1^2)\sin^2\varphi]}\right)} = D(\Phi, c, l, m),$$

quae quantitas simul cum $m_1$ ad unitatem appropinquat. Qua denotatione adhibita, ex formulis (44.) facilibus reductionibus factis prodeunt, hae formulae:

$$2.\quad \sin\Phi_1^0 = (1+m_1)\left(1+\frac{c_1l_1}{m_1}\right)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(\cos^2\varphi+c_1^2l_1^2\sin^2\varphi)}}\cdot\frac{1}{1+D(\varphi,c,l,m)},$$

$$3.\quad \sin\Phi_2^0 = lc\quad \left(1+\frac{l_1 l_1}{m_1}\right)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(\cos^2\varphi+c_1^2l_1^2\sin^2\varphi)}}\cdot\frac{1}{1+D(\varphi,c,l,m)} = l^0\sin\Phi_1^0.$$

Iam vero duos casus, quibus utraque aequat. in (40.) vel in (48.) discernitur, accuratius disquiramus. Primum igitur posito:

$$4.\qquad \varphi < \arcsin\frac{1}{\sqrt{(1+c_1 l_1)}} > 0,$$

et minimis positivis valoribus ipsorum $\varphi_1^0$ et $\varphi_2^0$ e numero eorum, qui formulis (2.) et (3.) respondent, assumtis, habemus hanc aequat. integralem:

$$5.\qquad \int_0^{\varphi}\frac{(\Pi\cos^2\varphi+\mathrm{K}\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(\Delta(c,l,m))}}$$

$$=\int_0^{\varphi_1^0}\frac{(\Pi_1^0\cos^2\varphi+\mathrm{K}_1^0\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(\Delta(c^0,l^0,m^0))}}+\int_0^{\varphi_2^0}\frac{(\Pi_2^0\cos^2\varphi+\mathrm{K}_2^0\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(\Delta(\mathfrak{c}^0,\mathfrak{l}^0,m^0))}}.$$

Tum vero posito:

$$6.\qquad \varphi > \arcsin\frac{1}{\sqrt{(1+c_1 l_1)}} < \frac{\pi}{2},$$

integrali dato in duas partes diviso, habemus:

$$7.\qquad \int_0^{\psi}\frac{(\Pi\cos^2\varphi+\mathrm{K}\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c,l,m)}$$

$$=\int_0^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{(1+c_1 l_1)}}}\frac{(\Pi\cos^2\varphi+\mathrm{K}\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c,l,m)}+\int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{(1+c_1 l_1)}}}^{\psi}\frac{(\Pi\cos^2\varphi+\mathrm{K}\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c,l,m)},$$

quarum priori per priorem, posteriori per posteriorem aequationem (40.) art. XI. transformata, habebimus:

$$8.\qquad \int_0^{\psi}\frac{(\Pi\cos^2\varphi+\mathrm{K}\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c,l,m)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\Pi_1^0\cos^2\varphi+\mathrm{K}_1^0\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c^0,l^0,m^0)}+\int_0^{\arcsin\frac{m^0}{\mathfrak{c}^0}}\frac{(\Pi_2^0\cos^2\varphi+\mathrm{K}_2^0\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\mathfrak{c}^0,\mathfrak{l}^0,m^0)}$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi_1^0}\frac{(\Pi_1^0\cos^2\varphi+\mathrm{K}_1^0\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c^0,l^0,m^0)}+\int_{\arcsin=\frac{m^0}{\mathfrak{c}^0}}^{\psi_2^0}\frac{(\Pi_2^0\cos^2\varphi+\mathrm{K}_2^0\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\mathfrak{c}^0,\mathfrak{l}^0,m^0)}.$$

Posteriora duo integralia termini secundi in unum hoc transeunt:

$$\int_0^{\psi_2^0}\frac{(\Pi_1^0\cos^2\varphi+\mathrm{K}_1^0\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\mathfrak{c}^0,\mathfrak{l}^0,m^0)}$$

In prioribus vero integralibus novis loco argumenti $\varphi$, posito $\pi-\varphi$, post faciles reductiones, si nunc per $\psi_1^0$, angulum $\pi-\psi_1^0$, qui igitur, maior proximus formulae (2.) respondentium, plerumque ad angulum $2\varphi$ propius accedit, denotamus, habemus ex aequat. (8.) hanc aequationem eadem forma ac (5.) gaudentem:

$$9. \quad \int_0^{\psi} \frac{(\Pi \cos^2\varphi + \mathrm{K} \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta(c, l, m)}$$

$$= \int_0^{\varphi_1^0} \frac{(\Pi_1^0 \cos^2\varphi + \mathrm{K}_1^0 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta(c^0, l^0, m^0)} + \int_0^{\varphi_2^0} \frac{(\Pi_2^0 \cos^2\varphi + \mathrm{K}_2^0 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta(l^0, l^0, m^0)}.$$

Si porro $\varphi > \frac{\pi}{2}$ et $< \pi$ fuerit, integrale datum ita representare licet, posito $\varphi = \pi - {}'\varphi$:

$$10. \quad \int_0^{\varphi} \frac{(\Pi \cos^2\varphi + \mathrm{K} \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta(c, l; m)}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\Pi \cos^2\varphi + \mathrm{K} \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta(c, l, m)} - \int_0^{'\varphi} \frac{(\Pi \cos^2\varphi + \mathrm{K} \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta(c, l, m)}.$$

Huius aequationis termino ultimo per formulam (9.), quia argumentum $'\varphi$ minor quam $\frac{\pi}{2}$ est, transformato, atque hac aequatione, quae ex eadem aequatione (9.), $\psi = \frac{\pi}{2}$ posito, sequitur:

$$11. \quad \int_0^{\pi} \frac{(\Pi \cos^2\varphi + \mathrm{K} \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta(c, l, m)} = \int_0^{2\pi} \frac{(\Pi_1^0 \cos^2\varphi + \mathrm{K}_1^0 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta(c^0, l^0, m^0)}$$

adhibita, fit:

$$12. \quad \int_0^{\varphi} \frac{(\Pi \cos^2\varphi + \mathrm{K} \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta(c, l, m)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(\Pi_1^0 \cos^2\varphi + \mathrm{K}_1^0 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta(c^0, l^0, m^0)} - \int_0^{\varphi_1^0} \frac{(\Pi_1^0 \cos^2\varphi + \mathrm{K}_1^0 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta(c^0, l^0, m^0)}$$

$$- \int_0^{\varphi_2^0} \frac{(\Pi_2^0 \cos^2\varphi + \mathrm{K}_2 \sin^2\varphi)}{\Delta(l^0, l^0, m^0)},$$

ubi aut $\varphi_1^0$ aut $(\pi - \varphi_1^0)$ minimus positivus angulus formulae (2.) respondentium est, prout fuerit:

$$\text{aut, } \sin\varphi < \frac{1}{\sqrt{(1 + c_1 l_1)}} = \sin{}'\varphi, \quad \text{aut, } \sin\varphi > \frac{1}{\sqrt{(1 + c_1 l_1)}} = \sin{}'\varphi.$$

Ponamus vero, ut rursus hic ad formam (5.) et (9.) revertamus, loco ipsius:

$$13. \quad \varphi_1^0 \; .\;.\;.\;.\; 2\pi - \varphi_1^0, \qquad \varphi_2^0 \; .\;.\;.\;.\; -\varphi_2^0,$$

quo facto ad aequationem rursus devehimur hanc:

$$14. \quad \int_0^{\varphi} \frac{(\Pi \cos^2\varphi + \mathrm{K} \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta(c, l, m)}$$

$$= \int^{\varphi_1^0} \frac{(\Pi_1^0 \cos^2\varphi + \mathrm{K}_1^0 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta\, c^0\, l^0\, m^0} + \int^{\varphi_2^0} \left(\frac{\Pi_2^0 \cos^2\varphi}{\Delta\, l^0\, l^0\, m^0}\right).$$

Qua consideratione continuata sequitur aequationem integralem (5.) semper stare, si limites determinantur, quales in sequenti tabula expositos invenis.

Ponamus esse:

$$\delta,\quad \Phi_1^0,\quad \Phi_2^0,$$

minimos angulos positivos, quorum quadrata sinium et ex formulis (2.) et (3.) et ita determinentur:

$$\sin^2\delta = \frac{1}{(1+c_1 l_1)}.$$

$$15.\quad \begin{cases} \text{Posito: } \arg\Phi(>0<\delta), & (>\delta<\tfrac{\pi}{2}), \quad (>\tfrac{\pi}{2}<\pi-\delta), \quad (>\pi-\delta<\pi). \\ \text{Erit: } \begin{cases} \arg\Phi_1^0 = \Phi_1^0, \\ \arg\Phi_2^0 = \Phi_2^0, \end{cases} & \begin{matrix} =\pi-\Phi_1^0, & \pi+\Phi_1^0, & 2\pi-\Phi_1^0, \\ =\Phi_2^0, & -\Phi_2^0, & -\Phi_2^0, \end{matrix} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (>\pi<\pi+\delta), & (>\pi+\delta<\tfrac{3\pi}{2}), & (>3\tfrac{\pi}{2}<2\pi-\delta), & (>2\pi-\delta<2\pi), \\ 2\pi+\Phi_1^0, & 3\pi-\Phi_1^0, & 3\pi+\Phi_1^0, & 4\pi-\Phi_1^0, \\ \Phi_2^0, & \Phi_2^0, & -\Phi_2^0, & -\Phi_2^0, \end{matrix}$$

etc.

$$\begin{matrix} (>h\pi<h\pi+\delta), & (>h\pi+\delta<(h+\tfrac{1}{2})\pi), & (>h+\tfrac{1}{2}\pi<(h+1)\pi-\delta), & (>(h+1)\pi-\delta<(h+1)\pi), \\ 2h\pi+\varphi_1^0, & (2h+1)\pi-\varphi_1^0, & (2h+1)\pi+\varphi_1^0, & (2h+2)\pi-\varphi_1^0, \\ \varphi_2^0, & \varphi_2^0, & -\varphi_2^0, & -\varphi_2^0, \end{matrix}$$

ubi $h$ quilibet numerus integer est. Prorsus similemque tabulam pro negativis valoribus anguli $\Phi$ adipiscimur. Quia vero formula (2.) docet angulum $\Phi_2'$ circiter duplicem esse anguli $\Phi'$, inde patet, ut verum valorem argumentorum $\Phi_1^0$ et $\Phi_2^0$ adipiscamur, eum plerumque mox assumendum esse angulum $\Phi_1^0$, qui angulo $2\Phi$ proximus sit, angulumque $\Phi_2^0$ minimum esse ex formula:

$$\sin\Phi_2^0 = l^0 \sin\Phi_1^0$$

prodeuntem positivum vel negativum.

His positis, quomodo transformationem propositam continuemus, disquisitio sponte emanat. Quo facto, videmus primum, limitem $\delta$, quo antea utraque aequatio integralis discernebatur,

$$16.\qquad \delta = \text{arc}\sin = \frac{1}{\sqrt{(1+c_1 l_1)}},$$

appropinquare ad $\frac{\pi}{4}$. Tum videmus angulum $\Phi_1^0$, si $m=0$, et $l_1 = c_1$ devenerit ex formulis:

$$17.\qquad \sin\Phi_1^0 = 1 + c_1^2 \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1-c_1^4\sin^2\varphi)}},\qquad \Phi_2^0 = c^0\sin\Phi_1^0$$

determinari, atque integralia in hanc formam abire:

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{(\Pi_1\cos^2\varphi + K_1\sin^2\varphi)\,d\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)},\qquad \int_0^{\varphi_2} \frac{(\Pi_2\cos^2\varphi + K_2\sin^2\varphi)\,d\varphi}{(1-l^2\sin^2\varphi)}.$$

Postremo vero si adhuc $c$ evanuerit, erit

$$18. \qquad \Phi_1^0 = 2\Phi, \qquad \Phi_2^0 = 0.$$

Inde generalis argumentorum lex memorabilis prodit, quam ut explicemus, totamque transformationem brevi in conspectu ponamus, hanc denotationem in art. XI. propositam atque confirmatam adhibere velimus.

Ponamus datum angulum numeratoris coefficientes et modulos respective esse:

$$19. \left\{ \begin{array}{llll}
\Phi, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \Pi,\ K, & c,\ l,\ m; \\
\multicolumn{4}{l}{\text{post primam transformationem habebimus:}} \\
\text{arg.} & & & \\
\Phi_1^0, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \Pi_1^0 + K_1^0, & c^0,\ l^0,\ m^0; \\
\Phi_2^0, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \Pi_2^0 + K_2^0, & \mathfrak{c}^0,\ \mathfrak{l}^0,\ m^0; \\
\multicolumn{4}{l}{\text{post secundam transformationem habebimus:}} \\
\text{arg.} & & & \\
\Phi_{1,1}^{00},\ \Phi_{2,2}^{00}, & \ldots\ldots\ldots & \Pi_1^{00}\ K_1^{00}, & c^{00},\ l^{00},\ m^{00}; \\
\Phi_{1,2}^{00},\ \Phi_{2,1}^{00}, & \ldots\ldots\ldots & \Pi_2^{00}\ K_2^{00}, & \mathfrak{c}^{00},\ \mathfrak{l}^{00},\ m^{00}; \\
\multicolumn{4}{l}{\text{post tertiam transformationem habebimus:}} \\
\text{arg.} & & & \\
\Phi_{1,1,1}^{000},\ \Phi_{1,2,2}^{000},\ \Phi_{2,2,1}^{000},\ \Phi_{2,1,2}^{000}, & \ldots & \Pi_1^{000}\ K_1^{000}, & c^{000},\ l^{000},\ m^{000}; \\
\Phi_{1,1,2}^{000},\ \Phi_{1,2,1}^{000},\ \Phi_{2,2,2}^{000},\ \Phi_{2,1,1}^{000}, & \ldots & \Pi_2^{000}\ K_2^{000}, & \mathfrak{c}^{000},\ \mathfrak{l}^{000},\ m^{000}; \\
 & & \text{etc.} &
\end{array} \right.$$

ubi indices apud argumenta $\Phi$ infra adiecti originem eorum ex antecedentibus argumentis accuratissime indicat. Iam vero sequitur hoc theorema: „Termini serierum *horizontalium* angulorum

$$\begin{array}{lllllllll}
\Phi, & \frac{\varphi_1^0}{2}, & \frac{\varphi_{1,1}^{00}}{4}, & \frac{\varphi_{1,1,1}^{000}}{8}, & \frac{\varphi_{1,1,1,1}^{0000}}{16} & \text{etc.} \quad \frac{\varphi_{1,2,2}^{000}}{8}, & \frac{\varphi_{1,2,2,1}^{0000}}{16} & \text{etc.} & \frac{\varphi_{1,1,2,2}^{0000}}{16} \ \text{etc.} \\
 & \frac{\varphi_2^0}{2}, & \frac{\varphi_{2,1}^{00}}{4}, & \frac{\varphi_{2,1,1}^{000}}{8}, & \frac{\varphi_{2,1,1,1}^{0000}}{16} & \text{etc.} \quad \frac{\varphi_{2,2,2}^{000}}{8}, & \frac{\varphi_{2,2,2,1}^{0000}}{16} & \text{etc.} & \frac{\varphi_{2,1,2,2}^{0000}}{16} \ \text{etc.} \\
 & & \frac{\varphi_{1,2}^{00}}{4}, & \frac{\varphi_{1,2,1}^{000}}{8}, & \frac{\varphi_{1,2,1,1}^{0000}}{16} & \text{etc.} & \frac{\varphi_{1,1,1,2}^{0000}}{16} & \text{etc.} & \frac{\varphi_{1,2,2,2}^{0000}}{16} \ \text{etc.} \\
 & & \frac{\varphi_{2,2}^{00}}{4}, & \frac{\varphi_{2,2,1}^{000}}{8}, & \frac{\varphi_{2,2,1,1}^{0000}}{16} & \text{etc.} & \frac{\varphi_{2,1,1,2}^{0000}}{16} & \text{etc.} & \frac{\varphi_{2,2,2,2}^{0000}}{16} \ \text{etc.} \\
 & & & \frac{\varphi_{1,1,2}^{000}}{8}, & \frac{\varphi_{1,1,2,1}^{0000}}{16} & \text{etc.} & \frac{\varphi_{1,2,1,2}^{0000}}{16} & \text{etc.} & \\
 & & & \frac{\varphi_{2,1,2}^{000}}{8}, & \frac{\varphi_{2,1,2,1}^{0000}}{16} & \text{etc.} & \frac{\varphi_{2,2,1,2}^{0000}}{16} & \text{etc.} &
\end{array}$$

ad certos denique limites appropinquant, et adeo, si post $n$ transformationes $l^{(n)}$ evanuerit, ii anguli, quorum $n$tus index 2 est, ipsi evanescant.

Ponamus illos limites respective:

19. $\qquad = \Phi,\quad \Phi_2,\quad \Phi_{1,2},\quad \Phi_{2,2},\quad \Phi_{1,1,2},\quad \Phi_{2,1,2},\quad \Phi_{1,2,2},\quad \Phi_{2,2,2}.$

ita ut brevitatis gratia omnes indices (1.) sequentes omittantur. Quo theoremate adiuti, cum integrale quodque, quantitate ($\Pi - \mathrm{K}$) ex theor. (24.) art. XIV. simul cum $c$ ad nihil appropinquante, ad $\Pi.\varphi$ denique revenire videamus, sequitur hoc

**theorema.**

Valor appropinquatus integralis indefiniti Abeliani primi ordinis:

$$\int_0^\varphi \frac{(\Pi\cos\varphi + \mathrm{K}\sin\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[1-c^2\sin^2\varphi)(1-l^2\sin^2\varphi)(1-m^2\sin^2\varphi)]}} =$$

erit:

$$20.\quad \left\{\begin{array}{l} [\Phi + \Phi_{2,2} + \Phi_{2,1,2} + \Phi_{1,2,2}\text{ etc.}]\,(P\,\Pi + K\mathrm{K}) \\ + [\Phi_2 + \Phi_{1,2} + \Phi_{1,1,2} + \Phi_{2,2,2}\text{ etc.}]\,(P_1\Pi - K_1\mathrm{K}), \end{array}\right.$$

ubi $P$, $K$, $P_1 K_1$ limites in artic. XIV. determinati sunt. Eodem modo pro altera numeratoris forma hanc adipiscimur aequationem:

$$21.\quad \left\{\begin{array}{l} \int_0^\varphi \frac{(\mathrm{P} - \Sigma\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c^2\sin^2\varphi)(1-l^2\sin^2\varphi)(1-m^2\sin^2\varphi)]}} = \\ [\Phi + \Phi_{2,2} + \Phi_{2,1,2} + \Phi_{1,1,2}\text{ etc.}]\,(R\,\mathrm{P} - S\,\Sigma) \\ + [\Phi + \Phi_{1,2} + \Phi_{1,1,2} + \Phi_{2,2,2}\text{ etc.}]\,(S_1\Sigma - R_1\mathrm{P}). \end{array}\right.$$

Animadvertatur in prima serie eos limites $\Phi$ stare, quorum indices parem numerum signi (2.), in secunda vero, quorum indices imparem numerum signi (2.) continent. In utraque serie hactenus progrediendum est, ut limites $\Phi$ decrescentes usque ad quaesitum decimalium numerum evanuerint. In his generalibus valoribus integralis indefiniti posito $\varphi = \frac{\pi}{2}$, omnes limites evanescunt, primo $\Phi$ excepto, qui in $\frac{\pi}{2}$ transit, ita ut habeamus:

$$22.\quad \left\{\begin{array}{l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\Pi\cos\varphi^2 + \mathrm{K}\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c^2\sin^2\varphi)(1-l^2\sin^2\varphi)(1-m^2\sin^2\varphi)]}} = (P\Pi + K\mathrm{K})\frac{\pi}{2}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\mathrm{P} - \Sigma\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c^2\sin^2\varphi)(1-l^2\sin^2\varphi)(1-m^2\sin^2\varphi)]}} = (R\mathrm{P} - S\Sigma)\frac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

Adnotemus adhuc has aequationes ex formulis (25.) art. XIV. prodeuntes:

23. $\qquad F'(\pi k c l m) = y^0 F(\pi^0 k^0 c^0 l^0 m^0) = y^0 y^{00} F(\pi^{00} k^{00} c^{00} l^{00} m^{00})$ etc.

ubi brevitatis gratia posuimus.

$$F'(\pi k c l m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi\Pi + k\mathrm{K}) - (\pi_1\Pi + k_1\mathrm{K})\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c^2\sin^2\varphi)(1-l^2\sin^2\varphi)(1-m^2\sin^2\varphi)]}},$$

atque eodem modo:

$$24.\quad f'(\varrho\sigma c l m) = \nu^0 f'(\varrho^0\sigma^0 c^0 l^0 m^0) = \nu^0\nu^{00} f'(\varrho^{00}\sigma^{00} c^{00} l^{00} m^{00})$$

etc.

ubi positum est:

$$f'(\varrho\sigma c l m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[(\varrho P - \sigma\Sigma) - (\sigma_1\Sigma - \varrho_1 P)\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c^2\sin^2\varphi)(1-l^2\sin^2\varphi)(1-m^2\sin^2\varphi)]}}.$$

Quantitates $\pi$, $k$, $\varrho$, $\sigma$, in form. (27.) et (29.) explicantur.

Iam vero ad alterius aggrediamur transformationes argumenta accuratissime computanda. Quem ad finem revocemus formulas (15.) art. XI., quarum ope argumenta $\Phi'_1$ et $\Phi'_2$ determinabantur, ita ut satisfacerent aequationibus integralibus (8.) vel (22.), quae nonnisi forma numeratoris inter se differunt. Ponamus hic brevitatis gratia:

$$25.\quad \frac{\sqrt{\left[(1-c^2\sin^2\varphi)\left(1-\frac{l^2m^2}{c^2}\sin^2\varphi\right)\right]}}{\cos\varphi\sqrt{(1-l^2m^2\sin^2\varphi^2)}} = E(\Phi, c, l, m),$$

quam quantitatem, simul cum modulo $c$ ad unitatem appropinquare patet. Facilibus reductionibus factis, ex his formulis (15.) art. XI.

$$26.\quad \frac{1-(1-l'_1c'_1)\sin^2\varphi'_1}{1-(1+l'_1c'_1)\sin^2\varphi'_1} = E(\Phi c, l, m) = \frac{1-(1-M'_1\sin^2\varphi'_2}{1-(1+M'_1\sin^2\varphi'_2},$$

hae prodeunt:

$$27.\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\Phi'_1 = (1+c)\left(1+\frac{lm}{c}\right)\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{(1-l^2m^2\sin^2\varphi)}}\cdot\frac{1}{(1+E\varphi)}, \\ \operatorname{tang}\Phi'_2 = l_1\, m_1\left(1+\frac{LM}{c}\right)\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{(1-l^2m^2\sin^2\varphi)}}\cdot\frac{1}{(1+E\varphi)} = l'_1\operatorname{tang}\Phi'_1, \end{cases}$$

ubi $\Phi'_1$ et $\Phi'_2$ semper ut anguli minimi positivi his formulis respondentes assumendi sunt. Hinc methodus minus elegans atque minus expedita integralia nostra indefinita computandi derivatur, quam ita instituendam exponimus. Ponamus rursus fore:

datum angulum, numeratoris coefficientes et modulos respective:
$= \Phi$, $= P$, $= Q$, $= c, l, m$,

28.
post primam transformationem adipiscamur:

| hos angulos: | numeratoris coefficientes | et modulos: |
|---|---|---|
| $\Phi'_1$, | $P'_1$, $Q'_1$, | $c'$, $l'$, $m'$, |
| $\Phi'_2$, | $P'_2$, $Q'_2$, | $c'$, $L'$, $M'$, |

post secundam transformationem hos:

| | | |
|---|---|---|
| $\Phi''_{1,1}$, $\Phi''_{2,2}$, | $P''_1$, $Q''_1$, | $c''$, $l''$, $m''$, |
| $\Phi''_{1,2}$, $\Phi''_{2,1}$, | $P''_2$, $Q''_2$, | $c''$, $L''$, $M''$, |

$$28. \quad \begin{cases} \text{post tertiam transformationem:} \\ \qquad \text{hos angulos:} \qquad \text{numeratoris coefficientes:} \qquad \text{modulos:} \\ \Phi'''_{1,1,1},\ \Phi'''_{1,2,2},\ \Phi'''_{2,1,2},\ \Phi'''_{2,2,1}, \qquad P'''_1,\ Q'''_1, \qquad c''',\ l''',\ m''', \\ \Phi'''_{1,1,2},\ \Phi'''_{1,2,1},\ \Phi'''_{2,1,1},\ \Phi'''_{2,2,2}, \qquad P'''_2,\ Q'''_2, \qquad c''',\ L''',\ M''', \\ \text{etc.} \end{cases}$$

ubi indices apud angulos rursus originem ex antecedentibus ordinemque transformationis indicant.

Transformationibus repetitis denique ponere licet:

$$c_1 = 0 \quad \text{et:} \quad m_1 = l_1$$

integraliaque in integralia elliptica tertiae speciei quorum modulus proxime ad unitatem accedit, parameterque forma $-c^2\sin^2\theta$ gaudet, reducuntur, quae secundum articulum (98.) primi tomi libri illustrissimi „*Traité des fonctions elliptiques par Legendre*" computantur. Quem ad finem, $n$ esse numerum transformationum desideratarum, ponamus, ita ut sit:

$$c_1^{(n)} = 0, \qquad l_1^{(n)} = m_1^{(n)}.$$

Denotemus porro per $\Phi_1^{(n)}$ quemlibet eorum angulorum $n$tae transformationis, quorum indices inferiores parem numerum signi: 2 continent, et qui igitur ad numeratorem

$$P_1^{(n)} - Q_1^{(n)}\sin^2\Phi_1^n$$

pertinent, eodemque modo per $\Phi_{11}^{(n)}$ quemlibet eorum angulorum $n$tae transformationis, quorum indices numerum 2, aut semel aut ter etc. continent, et qui ad numeratorem alterum

$$P_2^{(n)} - Q_2^{(n)}\sin^2\Phi_{11}^{(n)}$$

pertinent. His positis dico, valorem integralis indefiniti exprimi per aggregatum expressionum huius formae:

$$29. \quad \begin{cases} \dfrac{P_1^{(n)}-Q_1^{(n)}}{m_1^2}\log\text{nat}\,\text{tang}\left(45^\circ+\dfrac{\varphi_1^{(n)}}{2}\right)-\dfrac{P_1^{(n)}m^{(n)2}-Q_1^{(n)}}{2mm_1^2}\log\text{nat}\dfrac{1+m^{(n)}\sin\varphi_1^{(n)}}{1-m^{(n)}\sin\varphi_1^{(n)}} \\ +\dfrac{P_2^{(n)}-Q_2^{(n)}}{M_1^2}\log\text{nat}\,\text{tang}\left(45^\circ+\dfrac{\varphi_2^{(n)}}{2}\right)-\dfrac{P_2^{(n)}M^{(n)2}-Q_2^{(n)}}{2MM_1^2}\log\text{nat}\dfrac{1+M^{(n)}\sin\varphi_{11}^{(n)}}{1-M^{(n)}\sin\varphi_{11}^{(n)}}, \end{cases}$$

quae formulae, si angulus $\Phi_1^{(n)}$ vel $\Phi_2^{(n)}$ proxime ad unitatem accedit, in has abeunt:

$$30. \quad \begin{cases} \dfrac{P_1^{(n)}c^{(n)}-Q_1^{(n)}}{c^{(n)}-m^{(n)2}}\displaystyle\int_0^{\varphi_1^n}\dfrac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^{(n)2}\sin^2\varphi)}}-\dfrac{P_1^{(n)}m^{(n)2}-Q_1^{(n)}}{2m^{(n)}m_1^{(n)2}}\log\text{nat}\dfrac{1+m^{(n)}\sin\varphi_1^{(n)}}{1-m^{(n)}\sin\varphi_1^{(n)}} \\ +\dfrac{P_2^{(n)}c^{(n)}-Q_2^{(n)}}{c^{(n)}-M^{(n)2}}\displaystyle\int_0^{\varphi_2^n}\dfrac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^{(n)2}\sin^2\varphi)}}-\dfrac{P_2^{(n)}M^{(n)2}-Q_2^{(n)}}{2M^{(n)}M_1^{(n)2}}\log\text{nat}\dfrac{1+M^{(n)}\sin\varphi_{11}^{(n)}}{1-M^{(n)}\sin\varphi_{11}^{(n)}}, \end{cases}$$

Iam vero, si praeferre placet, transformationes toties adhuc per formulas:

$$31. \quad \operatorname{tang}\Phi'_1 = (1+m^2)\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{(1-m^4\sin^2\varphi)}}, \qquad \operatorname{tang}\Phi'_2 = m'_1 \operatorname{tang}\Phi'_1$$

repetere possumus, ut usque ad limites $\Pi\,\Pi_1\,K\,K_1$ in capite XIV. descriptos perveniamus, quantitatesque ordinis $\varkappa_1''$ et $m_1''$ negligere possimus; quarum transformationum numero per $n$ rursus denotato, valor integralis indefiniti ex terminis huius formae componitur:

$$32. \begin{cases} \dfrac{\Pi_1 P - K_1 Q}{2^{n+1}} \log\operatorname{nat}\left(\dfrac{1+\sin\varphi_1^{(n)}}{1-\sin\varphi_1^{(n)}}\right)\left(\dfrac{1+m^{(n)}\sin\varphi_1^{(n)}}{1-m^{(n)}\sin\varphi_1^{(n)}}\right) + \dfrac{\Pi P - K Q}{2^{n+1}} \log\operatorname{nat}\left(\dfrac{1+m^{(n)}\sin\varphi_1^{(n)}}{1-m^{(n)}\sin\varphi_1^{(n)}}\right) \\ + \dfrac{\Pi P + K Q}{2^{n+1}} \log\operatorname{nat}\left(\dfrac{1+\sin\varphi_{II}^{(n)}}{1-\sin\varphi_{II}^{(n)}}\right)\left(\dfrac{1+\varkappa^{(n)}\sin\varphi_{II}^{(n)}}{1-\varkappa^{(n)}\sin\varphi_{II}^{(n)}}\right) + \dfrac{\Pi_1 P - K_1 Q}{2^{n+1}} \log\operatorname{nat}\left(\dfrac{1+\varkappa^{(n)}\sin\varphi_{II}^{(n)}}{1-\varkappa^{(n)}\sin\varphi_{II}^{(n)}}\right), \end{cases}$$

quae expressiones, si anguli $\Phi^n$ proxime ad unitatem accedunt, cum his commutentur necesse est

$$33. \begin{cases} \left(\dfrac{\Pi_1 P - K Q}{2^n}\right)\left(\displaystyle\int_0^{\varphi_1^n} \dfrac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^{(n)2}\sin^2\varphi)}} - \tfrac{1}{2}\log\operatorname{nat}\dfrac{1+m^{(n)}\sin\varphi_1^{(n)}}{1-m^{(n)}\sin\varphi_1^{(n)}}\right) \\ \qquad + \dfrac{\Pi P + K Q}{2^{n+1}} \log\operatorname{nat}\dfrac{1+m^{(n)}\sin\varphi_1^{(n)}}{1-m^{(n)}\sin\varphi_1^{(n)}} \\ + \left(\dfrac{\Pi P + K Q}{2^n}\right)\left(\displaystyle\int_0^{\varphi_{II}^n} \dfrac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^{(n)2}\sin^2\varphi)}} - \tfrac{1}{2}\log\operatorname{nat}\dfrac{1+\varkappa^{(n)}\sin\varphi_{II}^{(n)}}{1-\varkappa^{(n)}\sin\varphi_{II}^{(n)}}\right) \\ \qquad + \dfrac{\Pi_1 P - K_1 Q}{2^{n+1}} \log\operatorname{nat}\dfrac{1+\varkappa^{(n)}\sin\varphi_{II}^{(n)}}{1-\varkappa^{(n)}\sin\varphi_{II}^{(n)}}. \end{cases}$$

Prorsus similes expressiones pro altera numeratoris forma adipiscimur.

Integralia vero definita, quippe in quorum transformatione bina semper integralia nova in unum coniungi possunt, multo expeditiorem praebent determinationem. Habemus enim posito $\Phi = \frac{\pi}{2}$, ex formulis (30.) has:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P - Q\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c^2\sin^2\varphi)(1-l^2\sin^2\varphi)(1-m^2\sin^2\varphi)]}}$$
$$= \frac{P_1^{(n)}c^{(n)} - Q_1^{(n)}}{c^{(n)} - m^{(n)2}} \log\operatorname{nat}\frac{4}{c_1^{(n)}} - \frac{P_1^{(n)}m^{(n)2} - Q_1^{(n)}}{m^{(n)}m^{(n)2}} \log\operatorname{nat}\frac{2}{m_1^{(n)}}$$
$$= \frac{P_2^{(n)}c^{(n)} - Q_2^{(n)}}{c^{(n)} - \varkappa^{(n)2}} \log\operatorname{nat}\frac{4}{c_2^{(n)}} - \frac{P_2^{(n)}\varkappa^{(n)2} - Q_2^{(n)}}{\varkappa_1^{(n)}\cdot\varkappa_1^{(n)2}} \log\operatorname{nat}\frac{2}{\varkappa_1^{(n)}},$$

atque transformationibus satis continuatis ex formulis (33.) hanc:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P_1 - Q_1\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(c,l,m)} = \frac{\Pi_1 P - K_1 Q}{2^n} \log\operatorname{nat}\frac{2}{\varkappa_1^{(n)}} + \frac{\Pi P + K Q}{2^n} \log\operatorname{nat}\frac{2}{m_1^{(n)}}.$$

Facile demonstratur transformatione sequenti peracta eundem valorem integralis definiti prodire. Novus enim valor:

$$\frac{\Pi_1 P - K_1 Q}{2^{n+1}} \log \text{nat} \frac{2}{\mu_1^{(n+1)}} + \frac{\Pi P + K Q}{2^{(n+1)}} \log \text{nat} \frac{2}{m_1^{(n+1)}},$$

formulis (20.) artic. XIII. substitutis his:

$$\mu_1^{(n+1)} = \frac{\mu_1^{(n)2}}{2}, \qquad m_1^{(n+1)} = \frac{m_1^{(n)2}}{2}$$

in valorem antecedentem transit.

---

Expressiones integralis propositi antecedentes, ex loco citato facillime derivantur, tamen ad computationem integralis indefiniti multo minus quam illae aptae sunt, quas ex altera nostra transformatione prodire, vidimus. Repetamus vero computationem integralium indefinitorum propositorum, aliam multo faciliorem atque elegantiorem ope theorematis Abeliani, ex his nostris disquisitionibus deductam, alio loco geometris nos communicaturos esse.

---

## XVI.

### Exempla.

Quaecunque de computatione modulorum, numeratorum integraliumque ipsorum diximus, his duobus exemplis adhuc magis explanare placet, ubi duo integralia definita, quorum moduli datis valoribus gaudent, secundum utramque methodum in articulis praecedentibus expositam computata invenis.

#### Exemplum primum.

Datum sit hoc schema modulorum per algorithmum repetitum diminuendorum.

*Valores dati modulorum:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha = 11^\circ$ | $0'\ 0''$ | $\log c = 9{,}2805988$ | $\log c_1 = 9{,}9919466$ |
| $\beta = 4^\circ$ | $0'\ 0''$ | $\log l = 8{,}8435845$ | $\log l_1 = 9{,}9989408$ |
| $\gamma = 3^\circ$ | $0'\ 0''$ | $\log m = 8{,}7188002$ | $\log m_1 = 9{,}9994044$ |

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{c_1 l_1}{m_1} = 9{,}9957415, \qquad \frac{\alpha^0}{2} = 0^\circ\, 16'\, 51'',26,$$

$$\log\left(1 + \frac{c_1 l_1}{m_1}\right) = 0{,}2967923, \qquad \log(1 + m_1) = 0{,}3007323.$$

*Valores modulorum primae transformationis:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha = 0^\circ$ | $33'\ 42'',52$ | $\log c^0 = 7{,}991460$ | $\log c_1^0 = 9{,}9999791$ |
| $\beta = 0^\circ$ | $18'\ 55'',12$ | $\log l^0 = 7{,}740615$ | $\log l_1^0 = 9{,}9999934$ |
| $\gamma = 0^\circ$ | $4'\ 12'',003$ | $\log m^0 = 7{,}086981$ | $\log m_1^0 = 9{,}9999997$ |

$$\log \nu^{0} = 0{,}0051310,$$

$$\log \pi^{0} = 9{,}6983744, \qquad \log k^{0} = 9{,}6989700,$$

$$\log \nu^{0}\pi^{0} = 9{,}7035054, \qquad \log \nu^{0} k^{0} = 9{,}7041010,$$

$$\log \frac{p^{02}}{4} = 4{,}8792, \qquad \log\left(1+\frac{c_1^{0} l_1^{0}}{m_1^{0}}\right) = 0{,}3010164,$$

$$\log\left(1+\frac{p^{02} c^{02}}{p^{02}}\right) = 0{,}6155, \qquad \log(1+m_1^{0}) = 0{,}3010299,$$

*Valores secundae transformationis:*

$$\alpha^{00} = 0^{0}\,0'\,6'',4427, \qquad \log c^{00} = 5{,}4946,$$

$$\beta^{00} = 0^{0}\,0'\,5'',4746, \qquad \log l^{00} = 5{,}4239,$$

$$\gamma^{00} = 0^{0}\,0'\,0'',09058, \qquad \log m^{00} = 3{,}643,$$

$$\log \nu_1^{00} = 0{,}0000140,$$

$$\log \pi^{00} = 9{,}6962398, \qquad \log k^{00} = 9{,}7010940,$$

$$\log \nu_1^{0} \nu_1^{00} \pi^{00} = 9{,}7013848 = \log P, \qquad \log \nu_1^{0} \nu_1^{00} k^{00} = 9{,}7062390 = \log K.$$

*Valor integralis:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\Pi \cos^2\varphi - \mathrm{K}\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c^2\sin^2\varphi)(1-l^2\sin^2\varphi)(1-m^2\sin^2\varphi)]}} = 0{,}7897772\,\Pi + 0{,}7986541\,\mathrm{K}.$$

---

Ut legem, quam moduli sequuntur, exemplo hoc comprobemus, adiicere placet adhuc calculum exactum priorum et sequentium transformationum, quae ad computationem integralis propositi haud amplius adhibentur.

| | | |
|---|---|---|
| $\log c = 9{,}2805988,$ | $\log c^{0} = 7{,}9914604,$ | $\log c^{00} = 5{,}4946461,$ |
| $\log l = 8{,}8435845,$ | $\log l^{0} = 7{,}7406152,$ | $\log l^{00} = 5{,}4239323,$ |
| $\log m = 8{,}7188002,$ | $\log m^{0} = 7{,}0869810,$ | $\log m^{00} = 3{,}6426158,$ |
| $\log \mathfrak{l} = 9{,}4382014,$ | $\log \mathfrak{l}^{0} = 9{,}0955206,$ | $\log \mathfrak{l}^{00} = 8{,}1479697,$ |
| $\log \mathfrak{k} = 9{,}8752157,$ | $\log \mathfrak{k}^{0} = 9{,}3463658,$ | $\log \mathfrak{k}^{00} = 8{,}2186835,$ |
| | $\log \nu^{0} = 0{,}0051310,$ | $\log \nu^{00} = 0{,}0000140,$ |
| | $\log \pi^{0} = 9{,}6983744,$ | $\log \pi^{00} = 9{,}6962398,$ |
| | $\log k^{0} = 9{,}6989700,$ | $\log k^{00} = 9{,}7010940,$ |
| | $\log \pi_1^{0} = 7{,}6898348,$ | $\log \pi_1^{00} = 2{,}8834179,$ |
| | $\log k_1^{0} = 7{,}6904304,$ | $\log k_1^{00} = 2{,}8840795,$ |
| $\log c^{000} = 0{,}6232302-10,$ | $\log c^{0000} = 0{,}939786-20,$ | $\log c^{00000} = 0{,}578504-39,$ |
| $\log l^{000} = 0{,}6175482-10,$ | $\log l^{0000} = 0{,}939749-20,$ | $\log l^{00000} = 0{,}578504-39,$ |
| $\log m^{000} = 0{,}6888536-14,$ | $\log m^{0000} = 0{,}775685-28,$ | $\log m^{00000} = 0{,}949309-56,$ |
| $\log \mathfrak{l}^{000} = 6{,}0656234-10,$ | $\log \mathfrak{l}^{0000} = 0{,}835899-9,$ | $\log \mathfrak{l}^{00000} = 0{,}370805-17,$ |
| $\log \mathfrak{k}^{000} = 6{,}0713054-10,$ | $\log \mathfrak{k}^{0000} = 0{,}835936-9,$ | $\log \mathfrak{k}^{00000} = 0{,}370805-17,$ |

$\log \nu^{000} = 0,$ $\quad \log \nu^{0000} = 0,$ $\quad \log \nu^{00000} = 0,$

$\log \pi^{000} = \log \pi^{00},$ $\quad \log \pi^{0000} = \log \pi^{000},$ $\quad \log \pi^{00000} = \log \pi^{0000},$

$\log k^{000} = \log k^{00},$ $\quad \log k^{0000} = \log k^{000},$ $\quad \log k^{00000} = \log k^{0000},$

$\log \pi_1^{000} = 0{,}2056179-17,$ $\quad \log \pi_1^{0000} = 0{,}8443735-37,$ $\quad \log \pi_1^{00000} = 0{,}1218475-75.$

$\log k_1^{000} = 0{,}2062800-17,$ $\quad \log k_1^{0000} = 0{,}8450356-37,$ $\quad \log k_1^{00000} = 0{,}1225096-75,$

**Exemplum secundum.**

**Datum sit hoc schema modulorum per alterum algorithmum repetitum augendorum.**

***Valores dati:***

$\alpha = 87^0\ 0'\ 0'',00,$ $\quad \log m_1 = 9{,}9994044 = \log\sin\alpha,$ $\quad \log m = 8{,}7188002 = \log\cos\alpha,$

$\beta = 86^0\ 0'\ 0'',00,$ $\quad \log l_1 = 9{,}9989408 = \log\sin\beta,$ $\quad \log l = 8{,}8435845 = \log\cos\beta,$

$\gamma = 79^0\ 0'\ 0'',00,$ $\quad \log c_1 = 9{,}9919466 = \log\sin\gamma,$ $\quad \log c = 9{,}2805988 = \log\cos\gamma,$

$B = 79^0 24' 43'',85,$ $\quad \log L_1 = 9{,}9925422 = \log\sin B,$ $\quad \log B = 9{,}2642094 = \log\cos B,$

$A = 79^0 44' 41'',03,$ $\quad \log M_1 = 9{,}9930058 = \log\sin A,$ $\quad \log A = 9{,}2505030 = \log\cos A,$

$$\log np = 0, \qquad \log nq = -\infty,$$

$$\log \frac{np_1}{l_1 m_1} = 0{,}0016548, \qquad \log \frac{nq_1}{l_1 m_1} = 0{,}0016548,$$

$\frac{1}{2}\log \frac{ml}{c} = 9{,}1408930,$ $\quad \varepsilon = 88^0 54' 13'',27,$ $\quad \frac{1}{2}\log \frac{ML}{c} = 9{,}6170568,$ $\quad E' = 80^0 7' 42'',29,$

$\frac{\alpha'}{2} = 37^0 7' 28'',84,$ $\quad \log\text{tang}\,\frac{1}{2}\varepsilon' = 9{,}9916896,$ $\quad \frac{A'}{2} = 22^0 30' 28'',12,$ $\quad \text{tang}\,\frac{1}{2}E' = 9{,}9248017,$

$\log\left(1+\frac{ml}{c}\right) = 0{,}0082309,$ $\quad \log\left(1+\frac{ML}{c}\right) = 0{,}0687202,$ $\quad \log(1+c) = 0{,}0758421.$

***Valores primae transformationis:***

$\alpha' = 74^0 14' 57'',68,$ $\quad \log m'_1 = 9{,}9833791,$ $\quad \log m' = 9{,}4336919,$

$\beta' = 74^0\ 4' 10'',33,$ $\quad \log l'_1 = 9{,}9829924,$ $\quad \log l' = 9{,}4384959,$

$\gamma' = 42^0 51' 15'',40,$ $\quad \log c'_1 = 9{,}8325958,$ $\quad \log c' = 9{,}8651549,$

$B' = 44^0 57' 52'',66,$ $\quad \log L'_1 = 9{,}8492167,$ $\quad \log L' = 9{,}8497530,$

$A' = 45^0\ 0' 50'',24,$ $\quad \log M'_1 = 9{,}8496034,$ $\quad \log M' = 9{,}8493666.$

$$\log n' = 1{,}2373882,$$

$$\log p' = 8{,}9795688, \qquad \log q' = 9{,}6989700,$$

$$\log p'_1 = 8{,}9629479, \qquad \log q'_1 = 9{,}6823491,$$

$$\log nn'p' = 0{,}2169570, \qquad \log nn'q' = 0{,}9363582,$$

$$\log \frac{nn'p'_1}{l'_1 m'_1} = 0{,}2339646, \qquad \log \frac{nn'q'_1}{l'_1 m'_1} = 0{,}9533658,$$

$\frac{1}{2}\log \frac{m'l'}{c'} = 9{,}5035165,$ $\quad \varepsilon'' = 84^0 10' 0'',52,$ $\quad \frac{1}{2}\log \frac{M'L'}{c'} = 9{,}9169824,$ $\quad E'' = 46^0 58' 39'',64,$

$\frac{\alpha''}{2} = 27^0 19' 4'',04,$ $\quad \text{tang}\,\frac{1}{2}\varepsilon'' = 9{,}9557086,$ $\quad \frac{A''}{2} = 5^0 26' 35'',32,$ $\quad \text{tang}\,\frac{1}{2}E'' = 9{,}6380705,$

$\log\left(1+\frac{m'l'}{c'}\right) = 0{,}0420368,$ $\quad \log\left(1+\frac{M'L'}{c'}\right) = 0{,}2258992,$ $\quad \log(1+c') = 0{,}2388202.$

*Valores secundae transformationis:*

$\alpha'' = 54^0 38'\ 8'',06,\quad \log m''_1 = 9{,}9114172,\quad \log m'' = 9{,}7625098,$

$\beta'' = 54^0 38'\ 5'',87,\quad \log l''_1 = 9{,}9114139,\quad \log l'' = 9{,}7625163,$

$\gamma'' = 8^0 51' 34'',23,\quad \log c''_1 = 9{,}1875549,\quad \log c'' = 9{,}9947873,$

$B'' = 10^0 53' 10'',34,\quad \log L''_1 = 9{,}2761377,\quad \log L'' = 9{,}9921134,$

$A'' = 10^0 53' 10'',64,\quad \log M''_1 = 9{,}2761410,\quad \log M'' = 9{,}9921132,$

$\log n'' = 0{,}4560481,$

$\log p'' = 8{,}5653869,\quad \log q'' = 9{,}8285855,$

$\log p''_1 = 8{,}4322769,\quad \log q''_1 = 9{,}3990384,$

$\log n n' n'' p'' = 0{,}2588232,\quad \log n n' n'' q'' = 1{,}5220218,$

$\log \frac{n n' n'' p''_1}{l''_1 m''_1} = 0{,}3028821,\quad \log \frac{n n' n'' q''_1}{l''_1 m''_1} = 1{,}2696436,$

$\frac{1}{2}\log\frac{m'' l''}{c''} = 9{,}7651194,\ \varepsilon''' = 70^0 10' 55'',85,\ \frac{1}{2}\log\frac{M'' L''}{c''} = 9{,}9947197,\ E''' = 12^0 35' 31'',61,$

$\frac{\alpha'''}{2} = 14^0 47' 21'',59,\ \log\tang\frac{1}{2}\varepsilon''' = 9{,}8466955,\ \frac{A'''}{2} = 0^0 20' 53'',895,\ \log\tang\frac{E'''}{2} = 9{,}0424286,$

$\log\left(1+\frac{m'' l''}{c''}\right) = 0{,}1267906,\ \log\left(1+\frac{M'' L''}{c}\right) = 0{,}2957818,\ \log(1+c'') = 0{,}2984315,$

$\frac{1}{2}\log\left[\cos\gamma''\sin\frac{\alpha''}{2}\sin\frac{\beta''}{2}\right] = 9{,}3208734,\quad \frac{1}{2}\log\left[\cos\gamma''\cos\frac{\alpha''}{2}\cos\frac{\beta''}{2}\right] = 9{,}8946851,$

$\log\left[\sin\frac{\alpha''+\gamma''}{2}\sin\frac{\alpha''-\gamma''}{2}\sin\frac{\beta''+\gamma''}{2}\sin\frac{\beta''-\gamma''}{2}\right] = 8{,}6220015,$

$\log\left[\cos\frac{\alpha''+\gamma''}{2}\cos\frac{\alpha''-\gamma''}{2}\cos\frac{\beta''+\gamma''}{2}\cos\frac{\beta''-\gamma''}{2}\right] = 9{,}7879939,$

$\log\tang\frac{1}{2}(\beta'''+\gamma''') = 9{,}4268764,\quad \log\tang\frac{1}{2}(\beta'''-\gamma''') = 9{,}4163157,$

$\beta''' = 29^0 34' 43'',178,\quad \gamma''' = 0^0 20' 37'',8640.$

*Valores tertiae transformationis:*

$\alpha''' = \beta''' = 29^0 34' 43'',18,\quad \log m'''_1 = 9{,}6933910 = \log l'''_1,\quad \log m''' = \log l''' = 9{,}9393589,$

$\gamma''' = 0^0 20' 37'',868,\quad \log c'''_1 = 7{,}7782468,\quad \log c''' = 9{,}9999922,$

$A''' = B''' = 0^0 41' 47'',793,\quad \log M'''_1 = 8{,}0848558 = \log L'''_1,\quad \log M''' = \log L''' = 9{,}9999679,$

$\log n''' = 0{,}1820506,$

$\log p''' = 8{,}3619780,\quad \log q''' = 9{,}9004659,$

$\log p'''_1 = 7{,}8175403,\quad \log q'''_1 = 8{,}8051125,$

$\log n n' n'' n''' p''' = 0{,}2374649,\quad \log n n' n'' n''' q''' = 1{,}7759528,$

$\log n n' n'' n''' p'''_1 = 0{,}3062452,\quad \log n n' n'' n''' q'''_1 = 1{,}2938174,$

$\frac{1}{2}\log\frac{m''' l'''}{c'''} = 9{,}9393628,\ \varepsilon^{\text{IV}} = 40^0 51' 21'',98,\ \frac{1}{2}\log\frac{M''' L'''}{c} = 9{,}9999718,\ E^{\text{V}} = 0^0 55' 23'',3,$

$\frac{\alpha^{\text{IV}}}{2} = 3^0 59' 13'',03,\ \log\tang\frac{1}{2}\varepsilon^{\text{IV}} = 9{,}5710728,\ \frac{A^{\text{IV}}}{2} = 0^0 0' 6'',70,\ \log\tang\frac{1}{2}E^{\text{V}} = 7{,}9059\ldots,$

$\log\left(1+\frac{m''' l'''}{c}\right) = 0{,}2446123,\quad \log\left(1+\frac{M''' L'''}{c'''}\right) = 0{,}3010019,\quad \log(1+c''') = 0{,}3010262.$

*Valores quartae transformationis:*

$\alpha^{IV}=\beta^{IV}=7^0 58' 26'',06$, $\log m_1^{IV}=\log l_1^{IV}=9,1421456$, $\log m^{IV}=\log l^{IV}=9,9957805$,

$\gamma^{IV}=0^0\ 0'\ 1'',857233$, $\log c_1^{IV}=4,9544413$, $\log c^{IV}=0,0\ldots$,

$A^{IV}=B^{IV}=0^0\ 0' 13'',38816$, $\log M_1^{IV}=\log L_1^{IV}=5,8122957$, $\log M^{IV}=\log L^{IV}=0,0$,

$\log n^{IV}=0,0564293$,

$\log p^{IV}=8,2950882$, $\log q^{IV}=9,9175556$,

$\log p_1^{IV}=6,6586285$, $\log q_1^{IV}=7,6463255$,

$\log n n' n'' n''' n^{IV} p^{IV}=0,2270044$, $\log n n' n'' n''' n^{IV} q^{IV}=1,8494718$,

$\log n n' n'' n''' n^{IV} p_1^{IV}=0,3062535=\log \Pi_1$, $\log n n' n'' n''' n^{IV} q_1^{IV}=1,2939505=\log K_1$,

*Valores quintae transformationis:*

$\log m_1^{V}=\log l_1^{V}=7,9874602$, $\log m^{V}=\log l^{V}=9,9999795$,

$\log c_1^{V}=0,3068226-11$, $\log c^{V}=0$,

$\log M_1^{V}=\log L_1^{V}=1,3193624-10$, $\log M^{V}=\log L^{V}=0$,

$\log n^{V}=0,0041990$,

$\log p^{V}=8,2900459$, $\log q^{V}=9,9187169$,

$\log p_1^{V}=4,3450587$, $\log q_1^{V}=5,3327557$,

$\log n n' n'' n''' n^{IV} n^{V} p^{V}=0,2261611$, $\log n n' n'' n''' n^{IV} n^{V} q^{V}=1,8548321$,

$\log n n' n'' n''' n^{IV} n^{V} p_1^{V}=\log \Pi_1$, $\log n n' n'' n''' n^{IV} n^{V} q_1^{V}=\log K_1$,

*Valores sextae transformationis:*

$\log m_1^{VI}=\log l_1^{VI}=5,6739109-10$,

$\log c_1^{VI}=0,0115852-22$,

$\log n^{VI}=0,0000205$,

$\log p^{VI}=8,2900190$, $\log q^{VI}=9,9187223$,

$\log p_1^{VI}=0,7179396-11$, $\log q_1^{VI}=0,7056366-10$,

$\log n n' n'' n''' n^{IV} n^{V} n^{VI} p^{VI}=0,2261547=\log \Pi$, $\log n n' n'' n''' n^{IV} n^{V} n^{VI} q^{VI}=1,8548580=\log K$.

*Valor integralis:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P-Q\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{[(1-c^2\sin^2\varphi)(1-l^2\sin^2\varphi)(1-m^2\sin^2\varphi)]}} = (1,588429)P-0,798650\,Q.$$

**Exemplum tertium.**

Datum sit hoc schema modulorum per transformationem alteram diminuendorum:

*Valores dati:*

$\alpha=75^0 0' 0'',00$, $\log c=9,9849438$, $\log c_1=9,4129962$,

$\beta=54^0 0' 0'',00$, $\log l=9,9079576$, $\log l_1=9,7692187$,

$\gamma=25^0 0' 0'',00$, $\log m=9,6259483$, $\log m_1=9,9572757$,

$\frac{1}{2}\log\frac{c_1 l_1}{m_1} = 9{,}6124696,$ $\qquad \varepsilon^0 = 80^0\,20'\,12'',34,$

$\frac{\alpha^0}{2} = 22^0\,43'\,15'',31,$ $\qquad \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^0 = 9{,}9264042,$

$\log\left(1+\frac{c_1 l_1}{m_1}\right) = 0{,}0673897,$ $\qquad \log(1+m_1) = 0{,}2801930.$

*Valores primae transformationis:*

$\alpha^0 = 45^0\,26'\,30'',62,$ $\quad \log c^0 = 9{,}8528084,$ $\quad \log c_1^0 = 9{,}8461100,$

$\beta^0 = 40^0\,23'\,20'',22,$ $\quad \log l^0 = 9{,}8115569,$ $\quad \log l_1^0 = 9{,}8817630,$

$\gamma^0 = 3^0\;5'\,53'',185,$ $\quad \log m^0 = 8{,}7327621,$ $\quad \log m_1^0 = 9{,}9993648,$

$\log \nu^0 = 0{,}2972016,$

$\log \pi^0 = 9{,}6562457,$ $\qquad \log k^0 = 9{,}6989700,$

$\log \pi_1^0 = 9{,}5090541,$ $\qquad \log k_1^0 = 9{,}5517784,$

$\log \nu\nu^0\pi^0 = 9{,}9534473,$ $\qquad \log \nu\nu^0 k^0 = 9{,}9961716,$

$\frac{1}{2}\log\frac{c_1^0 l_1^0}{m_1^0} = 9{,}8642541,$ $\qquad \varepsilon^{00} = 57^0\,38'\,35'',47,$

$\frac{\alpha^{00}}{2} = 8^0\,48'\,43'',30,$ $\qquad \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon = 9{,}7405565,$

$\log\left(1+\frac{c_1^0 l_1^0}{m_1^0}\right) = 0{,}1861623,$ $\qquad \log(1+m_1^0) = 0{,}3007125.$

*Valores secundae transformationis:*

$\alpha^{00} = 17^0\,37'\,26'',61,$ $\quad \log c^{00} = 9{,}4811130,$ $\quad \log c_1^{00} = 9{,}9791219,$

$\beta^{00} = 17^0\,28'\,17'',23,$ $\quad \log l^{00} = 9{,}4774550,$ $\quad \log l_1^{00} = 9{,}9794876,$

$\gamma^{00} = 0^0\;2'\,32'',118,$ $\quad \log m^{00} = 6{,}8677572,$ $\quad \log m_1^{00} = 9{,}9999999,$

$\log \nu^{00} = 0{,}1158204,$

$\log \pi^{00} = 9{,}4644565,$ $\qquad \log k^{00} = 9{,}8310818,$

$\log \pi_1^{00} = 8{,}688245,$ $\qquad \log k_1^{00} = 8{,}732751,$

$\log \nu\nu^0\nu^{00}\pi^{00} = 9{,}8774785,$ $\qquad \log \nu\nu^0\nu^{00} k^{00} = 0{,}2441038,$

$\log\left(1+\frac{c_1^{00} l_1^{00}}{m_1^{00}}\right) = 0{,}2808277,$ $\quad \log(1+m_1^{00}) = 0{,}3010300,$ $\quad \log\left(1+\frac{l_1^{00\,2}\,c^{00\,2}}{l^{00\,2}}\right) = 0{,}2845025.$

*Valores tertiae transformationis:*

$\alpha^{000} = 2^0\,43'\,45'',29,$ $\quad \log c^{000} = 8{,}677756,$ $\quad \log c_1^{000} = 9{,}9995071,$

$\beta^{000} = 2^0\,43'\,44'',77,$ $\quad \log l^{000} = 8{,}677739,$ $\quad \log l_1^{000} = 9{,}9995071,$

$\log m^{000} = 3{,}133,$ $\quad \log m_1^{000} = 0{,}0,$

$\log \nu^{000} = 0{,}0202024,$

$\log \pi^{000} = 9{,}4264912,$ $\qquad \log k^{000} = 9{,}8480606,$

$\log \pi_1^{000} = 7{,}06497,$ $\qquad \log k_1^{000} = 7{,}10948,$

$\log \nu\nu^0\nu^{00}\nu^{000}\pi^{000} = 9{,}8597156,$ $\qquad \log \nu\nu^0\nu^{00}\nu^{000} k^{000} = 0{,}2812850,$

$\log\left(1+\frac{c_1^{000} l_1^{000}}{m_1^{000}}\right) = 0{,}3005374,$ $\qquad \log\left(1+\frac{l_1^{000}\,l_1^{000}}{m_1^{000}}\right) = 0{,}3010300 = \log(1+m_1^{000})$

*Valores quartae transformationis:*

$$\log c^{0000} = \log l^{0000} = 7{,}05496, \qquad \log c_1^{0000} = \log l_1^{0000} = 9{,}9999997,$$

$$\log \nu^{0000} = 0{,}0004926,$$

$$\log \pi^{0000} = 9{,}4255456, \qquad \log k^{0000} = 9{,}8484569,$$

$$\log \pi_1^{0000} = 3{,}819 - 10, \qquad \log k_1^{0000} = 3{,}863 - 10,$$

$$\log \nu \nu^0 \nu^{00} \nu^{000} \nu^{0000} \pi^{0000} = 9{,}8592626, \qquad \log \nu \nu^0 \nu^{00} \nu^{000} \nu^{0000} k^{0000} = 0{,}2821739,$$

$$\log\left(1 + \frac{c_1^{0000} l_1^{0000}}{m_1^{0000}}\right) = 0{,}3010297.$$

*Valores quintae transformationis:*

$$\alpha^{00000} = \beta^{00000} = 0^0 0' 0'',13\ldots, \qquad \log l^{00000} = \log c^{00000} = 3{,}809,$$

$$\log \nu^{00000} = 0{,}0000003,$$

$$\log \pi^{00000} = 9{,}4255451, \qquad \log k^{00000} = 9{,}8484571,$$

$$\log \nu \nu^0 \nu^{00} \nu^{000} \nu^{0000} \nu^{00000} \pi^{00000} = 9{,}8592624 = \log P, \quad \log \nu \nu^0 \nu^{00} \nu^{000} \nu^{0000} \nu^{00000} k^{00000} = 0{,}2821744 = \log K.$$

*Valor integralis:*

$$\int^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\Pi \cos^2 \varphi + \mathrm{K} \sin^2 \varphi)\, d\varphi}{\sqrt{[(1 - c^2 \sin^2 \varphi)(1 - l^2 \sin^2 \varphi)(1 - m^2 \sin^2 \varphi)]}} = (1{,}136011)\Pi + (3{,}008114)\mathrm{K}.$$

#### Exemplum quartum.

Datum sit hoc schema modulorum per secundam transformationem augendorum:

*Valores dati:*

$$\alpha = 65^0\ 0'\ 0'',00, \qquad \log m_1 = 9{,}9572757, \qquad \log m = 9{,}6259483,$$

$$\beta = 36^0\ 0'\ 0'',00, \qquad \log l_1 = 9{,}7692187, \qquad \log l = 9{,}9079576,$$

$$\gamma = 15^0\ 0'\ 0'',00, \qquad \log c_1 = 9{,}4129962, \qquad \log c = 9{,}9849438,$$

$$B = 10^0 35' 35'',64, \qquad \log L_1 = 9{,}4557205, \qquad \log L = 9{,}9815270,$$

$$A = 26^0\ 7' 29'',61, \qquad \log M_1 = 9{,}6437775, \qquad \log M = 9{,}9531972,$$

$$\log np = 0, \qquad \log nq = -\infty,$$

$$\log \frac{np_1}{l_1 m_1} = 0{,}2735056, \qquad \log \frac{nq_1}{l_1 m_1} = 0{,}2735056,$$

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{lm}{c} = 9{,}7744811, \qquad \varepsilon = 69^0 16' 11'',58, \qquad \tfrac{1}{2} \log \frac{LM}{c} = 9{,}9748902,$$

$$\frac{\alpha'}{2} = 14^0 14' 57'',95, \qquad \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varepsilon = 9{,}8393236, \qquad \frac{A'}{2} = 1^0 39' 19'',52,$$

$$\log\left(1 + \frac{ml}{c}\right) = 0{,}1316079, \qquad \log\left(1 + \frac{ML}{c}\right) = 0{,}2766457, \qquad \log(1 + c) = 0{,}2935671.$$

*Valores primae transformationis:*

$\alpha' = 28^0 29' 55'',91$, $\log m'_1 = 9,6786471$, $\log m' = 9,9439032$,
$\beta' = 22^0 14' 7'',30$, $\log l'_1 = 9,5779651$, $\log l' = 9,9664408$,
$\gamma' = 1^0 15' 8'',16\ldots$, $\log c'_1 = 8,3395401$, $\log c' = 9,9998963$,
$B' = 2^0 37' 30'',83\ldots$, $\log \lambda'_1 = 8,6608930$, $\log \lambda' = 9,9995439$,
$A' = 3^0 18' 39'',05\ldots$, $\log \varkappa'_1 = 8,7615750$, $\log \varkappa' = 9,9992745$,

$\log n' = 0,1919412$,

$\log p' = 9,6839138$, $\log q' = 9,6989700$,
$\log p'_1 = 9,3625609$, $\log q'_1 = 9,3776171$,
$\log n n' p' = 9,8758550$, $\log n n' q' = 9,8909112$,
$\log \frac{n n' p'_1}{l'_1 m'_1} = 0,2978899$, $\log \frac{n n' q'_1}{l'_1 m'_1} = 0,3129461$,
$\frac{1}{2} \log \frac{l' m'}{c'} = 9,99552239$, $\varepsilon'' = 35^0 32' 38'',54$,
$\frac{\alpha''}{2} = 2^0 56' 54'',25$, $\tang \frac{1}{2} \varepsilon = 9,5058636$,

$\log\left(1+\frac{l' m'}{c'}\right) = 0,2585580$, $\log\left(1+\frac{\lambda' \varkappa'}{c'}\right) = 0,3004915$, $\log(1+c') = 0,3009782$.

*Valores secundae transformationis:*

$\alpha'' = 5^0 53' 48'',50$, $\log m''_1 = 9,0117272$, $\log m'' = 9,9976958$,
$\beta'' = 5^0 42' 25'',22\ldots$, $\log l''_1 = 8,9975674$, $\log l'' = 9,9978420$,
$\gamma'' = 0^0 0' 25'',45\ldots$, $\log c''_1 = 6,0912836$, $\log c'' = 0,0$,
$B'' = 0^0 4' 7'',73\ldots$, $\log \lambda''_1 = 7,0795564$, $\log \lambda'' = 9,9999997$,
$A'' = 0^0 4' 15'',94\ldots$, $\log \varkappa''_1 = 7,0937162$, $\log \varkappa'' = 9,9999997$,

$\log n'' = 0,0426275$,

$\log p'' = 9,5654752$, $\log q'' = 9,7918491$,
$\log p''_1 = 8,0730456$, $\log q''_1 = 8,0885315$,
$\log n n' n'' p'' = 9,8000439$, $\log n n' n'' q'' = 0,0264178$,
$\log \frac{n n' n'' p''_1}{l''_1 m''_1} = 0,2983197$, $\log \frac{n n' n'' q''_1}{l''_1 m''_1} = 0,3138056$,
$\log(1 + l'' m'') = 0,2988047$, $\log(1+\lambda'' \varkappa'') = 0,3010297$,

*Valores tertiae transformationis:*

$\alpha''' = 0^0 17' 39'',61\ldots$, $\log m'''_1 = 7,7107228$, $\log m''' = 9,9999943$,
$\beta''' = 0^0 17' 39'',05\ldots$, $\log l'''_1 = 7,7104896$, $\log l''' = 9,9999943$,
$\gamma''' = 0^0 0' 0'',00\ldots$, $\log c'''_1 = 0,5807404-9$, $\log c''' = 0,0$,
$B''' = 0^0 0' 0'',15\ldots$, $\log \lambda'''_1 = 3,8700176$, $\log \lambda''' = 0,0$,
$A''' = 0^0 0' 0'',15\ldots$, $\log \varkappa'''_1 = 3,8702508$, $\log \varkappa''' = 0,0$,

$$\log n''' = 0{,}0022253,$$

$$\log p''' = 9{,}5584309, \qquad \log q''' = 9{,}7961276,$$

$$\log p_1''' = 5{,}4827333, \qquad \log q_1''' = 5{,}4982245,$$

$$\log n n' n'' n''' p''' = 9{,}7952249, \qquad \log n n' n'' n''' q''' = 0{,}0329216,$$

$$\log \frac{n n' n'' n''' p_1'''}{l_1''' m_1'''} = 0{,}2983149 = \log \Pi_1, \qquad \log \frac{n n' n'' n''' q_1'''}{l_1''' m_1'''} = 0{,}3138061 = \log K_1,$$

$$\log(1 + l''' m''') = 0{,}3010244$$

*Valores quartae transformationis:*

$$\alpha^{IV} = \beta^{IV} = 0^0 0' 0'',72\ldots, \qquad \log m_1^{IV} = \log l_1^{IV} = 5{,}1201880,$$

$$\gamma^{IV} = 0^0 0' 0'',00, \qquad \log c_1^{IV} = 0{,}5594208 - 18,$$

$$A^{IV} = B^{IV} = 0^0 0' 0'',00, \qquad \log x^{IV} = \log \lambda^{IV} = 0{,}4392328 - 13,$$

$$\log n^{IV} = 0{,}0000056,$$

$$\log p^{IV} = 9{,}5584127, \qquad \log q^{IV} = 9{,}7961384,$$

$$\log p_1^{IV} = 0{,}3018913 - 10, \qquad \log q_1^{IV} = 0{,}3173825 - 10,$$

$$\log n n' n'' n''' n^{IV} p^{IV} = 9{,}7952123 = \log \Pi, \qquad \log n n' n'' n''' n^{IV} q^{IV} = 0{,}0329380 = \log K,$$

$$\log \frac{n n' n'' n''' n^{IV} p_1^{IV}}{l_1^{IV} m_1^{IV}} = \log \Pi_1, \qquad \log \frac{n n' n'' n''' n^{IV} q_1^{IV}}{l_1^{IV} m_1^{IV}} = \log K_1,$$

*Valor integralis:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P - Q \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{[(1 - c^2 \sin^2\varphi)(1 - l^2 \sin^2\varphi)(1 - m^2 \sin^2\varphi)]}} = (4{,}144126) P - (3{,}008114) Q.$$

---

Quia moduli primi et secundi exempli iidem sunt, nec non moduli in tertio et quarto exemplo, si in secundi et quarti exempli integralibus ponamus:

$$\Pi = P, \qquad K = P - Q,$$

ad eosdem valores perveniamus necesse est, quos in primo et tertio exemplo invenimus. Id quod calculo usque ad ultimum decimalem comprobatur. Habemus enim inde in secundo exemplo:

$$(0{,}789779)\, \Pi_1 + (0{,}798650)\, K_1,$$

et in quarto exemplo:

$$(1{,}136012)\, \Pi_1 + (3{,}008114)\, K_1$$

pro appropinquatis integralium propositorum valoribus, quippe qui valores usque ad ultimum decimalem cum valoribus eorumdem integralium in primo et tertio exemplo congruunt. Quae cum ita sint, in utroque exemplo egregiam theoriae nostrae confirmationem per se ipsam adepti sumus.

---

# 23.

# Nota de erroribus quibusdam geometricis, qui in theoria functionum leguntur.

(Auctore *C. G. J. Jacobi*, prof. ord. math. Regiom.)

---

Demonstravi in alia commentatione, praeter curvas planas extare nullas, quarum radii osculi curvam centrorum curvaturae tangent, sive superficiem evolubilem forment. Secus putabat ill. *Lagrange*, qui in theoria functionum pag. 229 etc. No. 35. conditionem analyticam exhibet, quae ad hoc locum habere debeat, neque videt, ter eam integratam in plani aequationem abire. Sed vir ill. mox adeo ipsas lineas dupliciter curvas assignat, quae illa proprietate gaudeant, scilicet lineas curvaturae in data superficie: legimus enim pag. 248:

> *„D'où il suit que les lignes suivant lesquelles le rayon de courbure sera tangent de la courbe des centres, sont les mêmes que celles de la plus grande ou de la moindre courbure,"*

et mox pag. 245:

> *„Il n'y aura, sur une surface quelconque, que ces lignes (les lignes de courbure) qui puissent avoir une dévelopée formée par les rayons de courbure."*

Scilicet nescio quo factum est, ut vir ill. normales superficiei putaverit esse linearum curvaturae radios osculi. Sane normales ad superficiem, in punctis lineae curvaturae ductae, formant superficiem evolubilem, sed eae non sunt lineae curvaturae radii osculi. Novimus enim, radios osculi curvae, in superficie data descriptae, simul superficiei normales non nisi in lineis superficiei brevissimis esse.

Sequitur ex antecedentibus, *in data superficie lineam curvaturae simul lineam brevissimam esse non posse, nisi sit curva plana.* Nam normales ad superficiem in punctis lineae curvaturae ductae formant superfi-

ciem evolubilem, ideoque cum in lineis brevissimis normales superficiei sint curvae radii osculi, radii osculi lineae curvaturae, quae simul linea brevissima est, superficiem evolubilem formant; unde sequitur, curvam esse planam. Nam in alia commentatione huius Diarii T. XIV. *(zur Theorie der Curven)*, sicuti supra adnotavi, demonstratum est, radios osculi formare superficiem evolubilem non nisi in curvis planis. Exemplum habes in meridianis superficierum rotundarum, quae sunt curvae planae, simulque et lineae brevissimae et lineae curvaturae.

Regiomontii 28. Juli 1836.

---

# 24.

# Demonstratio et amplificatio nova theorematis Gaussiani de quadratura integra trianguli in data superficie e lineis brevissimis formati.

(Auctore *C. G. J. Jacobi*, prof. math. ord. Regiom.)

---

Data superficie quacunque, fingatur superficies sphaerica radio $= 1$, quarum superficierum puncta singula ita sibi respondeant, ut radius e centro sphaerae ad punctum superficiei eius ductus sit parallelus normali datae superficiei in puncto respondente. Ita delineata in data superficie figura quacunque, alia ei in superficie sphaerica respondebit figura, cuius aream ill. *Gauss* apellavit figurae in data superficie descriptae *quadraturam integram*. De qua hanc praeclaram praepositionem demonstravit:

### Theorema Gaussianum.

*Triangulo in data superficie e lineis brevissimis formato, quadratura eius integra aequalis est excessui summae trium eius angulorum super duos angulos rectos.*

Lineae brevissimae in superficie vocantur, quarum radii osculi sunt superficiei normales. Unde in quoque trianguli e lineis brevissimis formati angulo duobus eius lateribus se in illo intersecantibus eadem erit radii osculi directio. Curvam autem quamcunque considerare licet ut certae cuiusdam superficiei lineam brevissimam; neque enim aliud ad hoc flagitatur, nisi quod plana, radiis osculi curvae orthogonalia, superficiem tangant. Hinc sine negotio e propositione Gaussiana hanc generaliorem colligis:

### Theorema I.

*Formetur in spatio triangulus e tribus curvis quibuscunque, quae binae in angulo, quo sibi occurrunt, eandem radii osculi directionem habeant; ducantur porro e centro sphaerae, cuius radius $=1$, radii ad superficiem eius, radiis osculi curvarum paralleli; qui radii in superficie sphaerica alias tres delineabunt lineas dupliciter curvas triangulum formantes, cuius area aequalis erit excessui summae trium angulorum trianguli propositi super duos angulos rectos.*

Theorema antecedens sub formis diversis exhibere licet, quibus genuina eius indoles melius perspicitur. Quod fit per considerationes sequentes.

Antemittimus propositiones notas de reciprocitate polari figurarum sphaericarum. Quae ea est reciprocitas, ut puncto respondeat circulus maximus, cuius illud polus est, et vice versa; arcui circuli maximi angulus sphaericus illius supplemento aequalis et vice versa; curvae alia curva, cuius puncta illius tangentium poli sunt seu cuius tangentes in illa polos habent. Quibus statutis, consideremus duos polygonos sphaericos $n$ laterum inter se polares; alterius area e notis praeceptis sphaericis aequivalet excessui summae angulorum eius super $2n-4$ angulos rectos; alterius circumferentia propter reciprocitatis modum indicatum aequivalet excessui $2n$ angulorum rectorum super eandem summam, cum latus alterius polygoni alterius anguli supplementum sit. Quod suggerit notam propositionem:

„Propositis duobus polygonis sphaericis inter se polaribus cuiuslibet numeri laterum, summam areae alterius et circumferentiae alterius aequivalere quatuor angulis rectis."

Quae propositio pro numero laterum infinito de curvis sphaericis habetur.

Sit iam $abc$ triangulus noster in superficie sphaerica, e tribus curvis $bc$, $ca$, $ab$ formatus. Cuius trianguli figura polaris erit hexagramma $AA_1BB_1CC_1$, formatum ex arcu circuli maximi $AA_1$ angulo $a$ polari, curva $A_1B$ curvae $ab$ polari, arcu circuli maximi $BB_1$ angulo $b$ polari, curva $B_1C$ curvae $bc$ polari, arcu circuli maximi $CC_1$ angulo $c$ polari, curva $C_1A$ curvae $ca$ polari. Pro his figuris propositis antecedens hanc aequationem suggerit:

$$\text{area } abc + \text{circumferentia } AA_1BB_1CC_1 = 360^0.$$

Sit porro $\alpha\beta\gamma$ triangulus propositus, in spatio e tribus curvis $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ formatus, quarum radii osculi paralleli sunt radiis sphaerae, e centro ad puncta circumferentiae $abc$ ductis. Erit e theoremate I.:

$$\text{area } abc = \alpha+\beta+\gamma-180^0,$$

sive e formula praecedente:

$$\alpha+\beta+\gamma+\text{circumferentia } AA_1BB_1CC_1 = 450^0.$$

Est autem propter reciprocitatem polarem:

$$AA_1 = 180^0 - a,\quad BB_1 = 180^0 - b,\quad CC_1 = 180^0 - c,$$

unde theorema I. in hanc formulam abit:

$$A_1B + B_1C + C_1A = a+b+c-(\alpha+\beta+\gamma).$$

Vocemus *planum radiorum osculi* planum parallelum duobus radiis osculi

se proxime insequentibus, plana radiorum osculi curvarum $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ parallela erunt respective planis circulorum maximorum curvas $bc$, $ca$, $ab$ tangentium. Unde facile demonstratur, data curva $\beta\gamma$, construi in superficie sphaerica curvam $B_1C$ per radios e centro sphaerae ductos, planis radiorum osculi curvae $\beta\gamma$ parallelos; eodemque modo e curvis datis $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ determinantur in superficie sphaerica curvae $C_1A$, $A_1B$. Differentias $a-\alpha$, $b-\beta$, $c-\gamma$ hoc modo construo.

Est $a$ angulus inter tangentes curvarum $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ in puncto intersectionis $\alpha$; quae curvae in puncto illo *ex hypothesi* eandem directionem radii osculi habent; quae directio cum utrique tangenti orthogonalis sit, atque planum osculi per tangentem et radium osculi transeat; angulum $a$ etiam designare possumus ut angulum inter plana osculi curvarum $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ in puncto intersectionis $\alpha$. Angulus $\alpha$ aequalis est angulo inter plana radiorum osculi earundem curvarum in eodem puncto. Hinc per directionem radii osculi, curvis $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ in $\alpha$ communem, ducere possumus quatuor plana, curvarum $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ duo plana osculi et duo plana radiorum osculi, quorum illa formant angulum $a$, haec angulum $\alpha$. Quorum igitur angulorum differentia $a-\alpha$ aequivalebit etiam differentiae anguli inter planum osculi et planum radiorum osculi curvae $\alpha\beta$ in puncto $\alpha$ et anguli inter planum osculi et planum radiorum osculi curvae $\alpha\gamma$ in eodem puncto $\alpha$. Eodem cum de duabis quoque reliquis differentiis $b-\beta$, $c-\gamma$ valeant, sequitur, designantibus respective $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ angulos, quos plana osculi et plana radiorum osculi curvarum $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ in punctis $\beta$, $\gamma$, $\alpha$ inter se formant, atque $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ angulos, quos respective plana osculi et plana radiorum osculi curvarum $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ in punctis $\gamma$, $\alpha$, $\beta$ inter se formant, fieri

$$a-\alpha = \gamma'-\beta'', \qquad b-\beta = \alpha'-\gamma'', \qquad c-\gamma = \beta'-\alpha''.$$

Unde theorema I. iam hanc novam formam induit:

$$B_1C + C_1A + A_1B = \alpha'-\alpha''+\beta-\beta''+\gamma'-\gamma''.$$

Curva $B_1C$ nec non anguli $\alpha'$, $\alpha''$ per solam curvam $\beta\gamma$ determinata sunt curva $C_1A$ et anguli $\beta'$, $\beta''$ per solam curvam $\gamma\alpha$, curva $A_1B$ et anguli $\gamma'$, $\gamma''$ per solam curvam $\alpha\beta$. Unde ex una aequatione antecedente facili divinatione colligis tres sequentes:

$$B_1C = \alpha'-\alpha'', \qquad C_1A = \beta'-\beta'', \qquad A_1B = \gamma'-\gamma''.$$

Quo facto devenimus ad verum fontem theorematis I. simulque theorematis *Gaussiani*, videlicet ad propositionem sequentem:

### Theorema II.

*„Proposita curva quacunque $\alpha\beta$, ducantur e centro sphaerae, cuius „radius = 1, lineae planis radiorum osculi curvae $\alpha\beta$ orthogonales; quae „in superficie sphaerica depingent aliam curvam* a, b *cuius longitudo* ab *„aequivalebit differentiae angulorum, quos in extremitatibus curvae pro-„positae,* $\alpha$, $\beta$ *planum radiorum osculi cum plano osculi format."*

Cuius novi theorematis haec est demonstratio simplex et elementaris.

### Demonstratio (cf. Fig. 20.).

Cum hic tantum de directionibus rectarum et planorum agatur, repraesentemus omnes per puncta et circulos maximos in superficie sphaerica descripta. Ducantur igitur e centro sphaerae $O$ radii $Op$, $Oq$, $Or$, $Os$ curvae $\alpha\beta$ tangentibus se proxime insequentibus primae, secundae, tertiae, quartae paralleli; erunt plana $Opq$, $Oqr$, $Ors$ planis osculi primo, secundo, tertio parallela, cum planum osculi per duas tangentes se proxime insequentes transeat. Prolongetur arcus $pq$ usque ad $P$, arcus $qr$ usque ad $Q$, arcus $rs$ usque ad $R$, ita ut

$$pP = qQ = rR = 90^\circ,$$

erunt $OP$, $OQ$, $OR$ radiis osculi primo, secundo, tertio paralleli; ideoque plana $OPQ$, $OQR$ parallela planis radiorum osculi primo et secundo.

His praemissis, observo, theorema II. demonstratum esse, ubi probatum sit, elementum curvae $ab$ aequale esse differentiali anguli, quem in puncto respondente curvae propositae $\alpha\beta$ planum radiorum osculi cum plano osculi facit. Integrationibus enim factis, iisque ab altero limite curvarum $\alpha\beta$, $ab$ ad alterum extensis, theorema propositum provenit. Est autem elementum curvae $ab$ aequale angulo inter duo plana radiorum osculi curvae $\alpha\beta$ se proxime insequentia, sive in figura nostra supplemento anguli $PQR$, vel si arcus $PQ$ ultra $Q$ usque ad $Q'$ prolongatur, angulo $RQQ'$. Porro angulus inter planum radii osculi et planum osculi est in eadem figura $qPQ$, eiusque differentiale $qQR - qPQ$. Unde formula demonstranda est:

$$RQQ' = qQR - qPQ,$$

sive

$$qPQ = qQR - Q'QR = qQQ' = 180^\circ - qQP.$$

Hoc est, demonstrari debet, si arcus $pq$, $qr$, $rs$ sunt quantitates infinite parvae primi ordinis, fore differentiam $qPQ - pQQ'$ quantitatem infinite parvam ordinis secundi. Quod sponte patet. Habetur enim in triangulo sphaerico $qPQ$:

$$\sin qPQ : \sin qQP = \sin qPQ : \sin qQQ' = \sin qQ : \sin qP,$$

sive

$$\sin qPQ : \sin qQQ' = 1 : \cos pq;$$

unde

$$\sin qPQ : \sin qPQ - \sin qQQ' = 1 : 2\cos^2 \tfrac{1}{2} pq.$$

Qua formula patet, si $pq$ est ordinis primi, fieri $\sin qPQ - \sin qQQ'$ ideoque etiam $qPQ - qQQ'$ ordinis secundi, Q. D. E.

Demonstrato theoremate II., ex eo per ratiocinia supra tradita theorema I. deducis, cuius casus particularis theorema Gaussianum est, e quo tamen ad generalius transitum facillime patere vidimus. Docet insuper theorema I., theorema Gaussianum etiam valere, si latera trianguli sunt curvae quaecunque, quae in binis angulis, per quos transeunt, lineas brevissimas osculantur; quae adeo iacere possunt in superficiebus diversis, quae binae in angulo trianguli sese tangunt. Nec non de theoremate II. facile deducis generaliorem propositionem, qua loco trianguli polygonus $n$ laterum, simulque loco excessus super quatuor angulos rectos ponitur excessus super $2n-4$ angulos rectos.

Si theorema II. quod facili constructione geometrica patebat, per formulas analyticas demonstrare cupis, in calculos complicatiores incidis. Qui adeo, si, quod vulgo fit, $y$ et $z$ ut functiones ipsius $x$ consideras, atque differentiale $dx$ constans ponis, tam molesti fiunt, ut facile ab iis abhorreas. Concinniores evadunt et symmetria commendati, si curvae elementum $ds$ constans ponis. Statuto

$$x^{(n)} = \frac{d^n x}{ds^n}, \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{ds^n}, \quad z^{(n)} = \frac{d^n z}{ds^n},$$

erit

$$\begin{aligned}
x'x' + y'y' + z'z' &= 1,\\
x'x'' + y'y'' + z''z'' &= 0,\\
x''x'' + y''y'' + z''z'' &= -[x'x''' + y'y''' + z'z'''],\\
3[x''x''' + y''y''' + z''z'''] &= -[x'x^{\text{IV}} + y'y^{\text{IV}} + z'z^{\text{IV}}].
\end{aligned}$$

Posito porro

$$y'z'' - z'y'' = a, \quad z'x'' - x'z'' = b, \quad x'y'' - y'x'' = c,$$

invenis:

$$\begin{aligned}
&aa + bb + cc\\
&= (x'x' + y'y' + z'z'')(x''x'' + y''y'' + z''z'') - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2,
\end{aligned}$$

sive

$$aa + bb + cc = x''x'' + y''y'' + z''z''.$$

Porro posito

$$(y''z'''-z''y''')^2+\ (z''x'''-x''z''')^2+\ (x''y'''-y''x''')^2 = N,$$
$$x'(y''z'''-z''y''')+y'(z''y'''-y''z''')+z'(x''y'''-y''x''') = \Delta,$$

cum sit

$$z'(z''x'''-x''z''')-y'(x''y'''-y''x''') = x'''(y'y''+z'z'')-x''(y'y'''+z'z''')$$
$$= -x''(x'x'''+y'y'''+z'z'''),$$
$$x'(x''y'''-y''x''')-z'(y''z'''-z''y''') = y'''(z'z''+x'x'')-y''(z'z'''+x'x''')$$
$$= -y''(x'x'''+y'y'''+z'z'''),$$
$$y'(y''z'''-z''y''')-x'(z''x'''-x''z''') = z'''(x'x''+y'y'')-z''(x'x'''+y'y''')$$
$$= -z''(x'x'''+y'y'''+z'z'''),$$

invenitur

$$\Delta\Delta = (x'x'+y'y'+z'z')N-(x''x''+y''y''+z''z'')(x'x'''+y'y'''+z'z''')^2,$$

sive

$$N = \Delta^2+(x''x''+y''y''+z''z'')^2.$$

His praemissis, observo, designante $\varrho$ radium osculi, haberi

$$\frac{1}{\varrho^2} = x''x''+y''y''+z''z'' = aa+bb+cc = -[x'x'''+y'y'''+z'z'''];$$

porro cosinus angulorum, quos *radius osculi* cum axibus coordinatarum facit,

$$\varrho x'',\quad \varrho y'',\quad \varrho z'';$$

cosinus angulorum, quos cum planis coordinatarum facit *planum osculi*,

$$\varrho a,\quad \varrho b,\quad \varrho c.$$

Unde cosinus angulorum, quos cum planis coordinatarum facit planum per duos radios osculi se proxime insequentes ductum, sive *planum radiorum osculi,* fiunt:

$$\frac{y''z'''-z''y'''}{\sqrt{N}},\quad \frac{z''x'''-x''z'''}{\sqrt{N}},\quad \frac{x''y'''-y''x'''}{\sqrt{N}}.$$

Hinc, si ponitur

$$\Gamma = x''(y'''z^{\text{IV}}-z'''y^{\text{IV}})+y''(z'''x^{\text{IV}}-x'''y^{\text{IV}})+z''(x'''y^{\text{IV}}-y'''x^{\text{IV}}),$$

fit *angulus inter duo plana radiorum osculi se proxime insequentia*

$$\frac{\Gamma ds}{\varrho N}$$

porro *sinus anguli inter planum osculi et planum radiorum osculi*

$$\frac{\Delta}{\sqrt{N}},$$

unde, cum sit

$$N = \Delta^2+\frac{1}{\varrho^2},$$

eiusdem anguli cosinus, tangens

$$\frac{1}{\varrho^3\sqrt{N}}, \quad \varrho^3\Delta,$$

ideoque *anguli inter planum osculi et plani radiorum osculi differentiale,*

$$\frac{d.\varrho^3\Delta}{1+\varrho^6\Delta^2} = \frac{d.\varrho^3\Delta}{\varrho^6 N}.$$

His expressionibus inventis, *theorema II. continetur formula demonstranda:*

$$\frac{d.\varrho^3\Delta}{\varrho^6 N} = \frac{\Gamma ds}{\varrho N}$$

*sive*

$$d.\varrho^3\Delta = \varrho^5\Gamma ds.$$

Habetur autem

$$d.\varrho^3\Delta = [3\varrho^2\varrho'\Delta+\varrho^3\Delta']ds$$

porro

$$\frac{3\varrho'}{\varrho^3} = -3[x''x'''+y''y'''+z''z'''] = x'x^{\text{IV}}+y'y^{\text{IV}}+z'z^{\text{IV}},$$

$$\Delta' = x'(y''z^{\text{IV}}-z''y^{\text{IV}})+y'(z''x^{\text{IV}}-x''z^{\text{IV}})+z'(x''y^{\text{IV}}-y''x^{\text{IV}}),$$

unde

$$\frac{d.\varrho^3\Delta}{\varrho^5 ds} = (x'x^{\text{IV}}+y'y^{\text{IV}}+z'z^{\text{IV}})(x'''a+y'''b+z'''c)$$
$$-(x'x'''+y'y'''+z'z''')(x^{\text{IV}}a+y^{\text{IV}}b+z^{\text{IV}}c).$$

Quae expressio, cum sit

$$y'c-z'b = -x''(x'x'+y'y'+z'z')+x'(x'x''+y'y''+z'z'') = -x'',$$
$$z'a-x'c = -y''(x'x'+y'y'+z'z')+y'(x'x''+y'y''+z'z'') = -y'',$$
$$x'b-y'a = -z''(x'x'+y'y'+z'z')+z'(x'x''+y'y''+z'z'') = -z'',$$

in hanc abit:

$$\frac{d.\varrho^3\Delta}{\varrho^5 ds} = x''(y'''z^{\text{IV}}-z'''y^{\text{IV}})+y''(z'''x^{\text{IV}}-x'''z^{\text{IV}})+z''(x'''y^{\text{IV}}-y'''x^{\text{IV}}) = \Gamma,$$

Q. D. E.

Regimontii 27. Jul. 1836.

---

# 25.

## Beweis eines geometrischen Satzes.

(Von Hrn Dr. *Ferd. Minding.*)

An eine krumme Fläche werde, in einer darauf befindlichen Curve $A$, eine abwickelbare Berührungsfläche angelegt, und hierauf die Curve abgewickelt. Es sei $R$ der Krümmungshalbmesser der Curve $A$, in irgend einem Puncte, $i$ die Neigung der Berührungsebene der Fläche gegen die Ebene des Krümmungskreises, $\varrho$ der Krümmungshalbmesser der abgewickelten Curve in dem entsprechenden Puncte; so findet bekanntlich zwischen den genannten drei Gröfsen eine sehr einfache Gleichung Statt, nämlich: $\varrho \cos i = R$.

Dieser interessante Satz kann auf folgende Art streng bewiesen werden:

Es seien $ab = ac [= ds]$ (Fig. 21.) zwei auf einander folgende unendlich kleine Elemente der Curve $A$, also $bac$ die Ebene des Krümmungskreises ferner sei $ad$ der Durchschnitt der durch die beiden Elemente $ab$ und $ac$ gehenden Berührungsebenen der Fläche; mithin $bad$ und $dac$ diese Berührungsebenen. Man verlängere $ba$ über $a$ hinaus; es sei $\angle dac = \alpha$, $dae = \alpha + \varepsilon$, $cae = \beta$. Da $\beta$ der Winkel zwischen zwei auf einanderfolgenden Tangenten der Curve $A$ ist, so ist bekanntlich $R\beta = ds$. In der Ebene $bad$ nehme man $\angle daf = dac = \alpha$, so ist $fae = \varepsilon$ der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Tangenten der adgewickelten Curve, und folglich $\varrho\varepsilon = ds$. Um den Punct $a$ werde eine Kugel beschrieben, so bestimmen die drei Halbmesser $ad$, $ae$, $ac$ ein sphärisches Dreieck $dec$, worin Seite $dc = \alpha$, $de = \alpha + \varepsilon$, $ec = \beta$, $\angle dec = i$ ist. Folglich hat man:

$$\cos\alpha = \cos(\alpha+\varepsilon)\cos\beta + \cos i \sin(\alpha+\varepsilon)\sin\beta,$$

oder, wenn man nach Potenzen der unendlich kleinen Gröfsen $\varepsilon$ und $\beta$ entwickelt, und nur die ersten beibehält: $0 = -\varepsilon\sin\alpha + \beta\sin\alpha\cos i$, mithin

$$\varepsilon = \beta\cos i,$$

oder, weil $\varepsilon = \frac{ds}{\varrho}$, $\beta = \frac{ds}{R}$ ist,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos i}{R},$$

w. z. b. w.

# 26.
# Ueber das Integral der linearen Differenzial-gleichungen höherer Ordnung.

(Vom Herrn Dr. *Schellbach* zu Berlin.)

---

## §. 1.

Differenziirt man viermal nach einander den Ausdruck

$$1.\qquad y = e^{a_0 x}\int e^{(a_1-a_0)x}dx\int e^{(a_2-a_1)x}dx\int e^{(a_3-a_2)x}dx\int e^{-a_3 x}X\,dx,$$

in dem $X$ eine Function von $x$ ist und die verschiedenen $a$ Constanten sind, so erhält man

$$2.\qquad \frac{d^4y}{dx^4} - \begin{array}{l|} a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3 \end{array}\, \frac{d^3y}{dx^3} + \begin{array}{l|} a_0a_1\\ a_0a_2\\ a_0a_3\\ a_1a_2\\ a_1a_3\\ a_2a_3 \end{array}\, \frac{d^2y}{dx^2} + \begin{array}{l|} a_0a_1a_2\\ a_0a_1a_3\\ a_0a_2a_3\\ a_1a_2a_3 \end{array}\, \frac{dy}{dx} + a_0a_1a_2a_3\,y = X,$$

wo die einzelnen Theile der Coefficienten von $\frac{dy^3}{dx^3}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ der bessern Uebersicht wegen senkrecht unter einander statt horizontal neben einander geschrieben sind und allen nur einmal das gehörige Zeichen vorgesetzt ist. Die Coefficienten selbst bestehen entsprechend aus den Combinationen ohne Wiederholungen zu ein, zwei, drei, vier der Elemente $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$. Ist daher die Differenzialgleichung vorgelegt:

$$3.\qquad \frac{d^4y}{dx^4} + k_1\frac{d^3y}{dx^3} + k_2\frac{d^2y}{dx^2} + k_3\frac{dy}{dx} + k_4 y = X,$$

und sind $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ die Wurzeln der Gleichung

$$4.\qquad u^4 + k_1u^3 + k_2u^2 + k_3u + k_4 = 0,$$

so drückt die Formel (1.) das Integral der Gleichung (3.) aus.

Ein höchst einfacher und bekannter Schlufs führt sogleich zu dem allgemeinen Resultate, dafs, wenn die Differenzialgleichung

$$5.\qquad \frac{d^ny}{dx^n} + k_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + k_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + k_n y = X$$

gegeben ist, und $a_0$, $a_1$, $a_2$, .... $a_{n-1}$ die Wurzeln der Gleichung

$$6.\qquad u^n + k_1u^{n-1} + k_2u^{n-2} + \cdots k_n = 0$$

sind, ihr Integral ausgedrückt werden kann durch

$$7.\quad y = e^{\alpha_0 x}\int e^{(\alpha_1-\alpha_0)x}dx\int e^{(\alpha_2-\alpha_1)x}dx\int \ldots \int e^{(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2})x}dx\int e^{-\alpha_{n-1}x}X\,dx.$$

Läfst sich aber die Gleichung (6.) in die Factoren

$$(u-\alpha_0)^{\nu_0}(u-\alpha_1)^{\nu_1}(u-\alpha_2)^{\nu_2}\ldots\ldots(u-\alpha_m)^{\nu_m}$$

auflösen, dann erscheint das Integral von (5.) unter der Form

$$8.\quad y = e^{\alpha_0 x}\int^{\nu_0} e^{(\alpha_1-\alpha_0)x}dx^{\nu_0}\int^{\nu_1} e^{(\alpha_2-\alpha_1)x}dx^{\nu_1}\int^{\nu_2}\ldots\ldots$$

$$\ldots\int^{\nu_{m-1}} e^{(\alpha_m-\alpha_{m-1})x}dx^{\nu_{m-1}}\int^{\nu_m} e^{-\alpha_m x}X\,dx^{\nu_m},$$

weil sich in (7.) mehrere Exponenten von $e$ auf Null reduciren.

Dies ist, so viel mir bekannt, die erste allgemeine Formel, welche das Integral der Gleichung (5.) für alle Fälle ausdrückt.

## §. 2.

Sind jetzt $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, .... Functionen von $x$, so mag, wenn $d\alpha_0$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, .... die Differenziation nach $x$ bedeutet, folgende symbolische Bezeichnung Statt finden:

$$(\alpha_1+d)\,\alpha_0 = \alpha_1\alpha_0 + d\alpha_0,$$

$$(\alpha_2+d)(\alpha_1+d)\,\alpha_0 = (\alpha_2+d)(\alpha_1\alpha_0+d\alpha_0) = \alpha_2\alpha_1\alpha_0 + d.\alpha_1\alpha_0 + \alpha_2 d\alpha_0 + d^2\alpha_0,$$

$$(\alpha_3+d)(\alpha_2+d)(\alpha_1+d)\,\alpha_0 = (\alpha_3+d)(\alpha_2\alpha_1\alpha_0 + d.\alpha_1\alpha_0 + \alpha_2 d\alpha_0 + d^2\alpha_0),$$

$$= \alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0 + d.\alpha_2\alpha_1\alpha_0 + \alpha_3 d.\alpha_1\alpha_0 + d^2.\alpha_1\alpha_0 + \alpha_3\alpha_2 d\alpha_0 + d(\alpha_2 d\alpha_0) + d^3\alpha_0$$

und so überhaupt ganz allgemein. Die in einem solchen Symbol $(\alpha_n+d)(\alpha_{n+1}+d)\ldots(\alpha_1+d)\,\alpha_0$ angedeuteten Multiplicationen werden nach einander von der Rechten zur Linken ausgeführt; alle Ausdrücke, die rechts schon entstanden sind, werden an ein folgendes $d$ und $\alpha$ angeschoben; tritt $d^n$ zu $d$, so entsteht $d^{n+1}$; alles Uebrige ist deutlich.

Differenziirt man nun wieder viermal nach einander den Ausdruck

$$9.\quad y = e^{\int\alpha_0 dx}\int e^{\int(\alpha_0-\alpha_1)dx}\int e^{\int(\alpha_1-\alpha_2)dx}\int e^{\int(\alpha_2-\alpha_3)dx}\int e^{\int\alpha_3 dx}X\,dx,$$

so erhält man vermöge der angegebenen Bezeichnungsart

$$10.\quad \frac{d^4y}{dx^4} + \begin{array}{r|}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \\ \\ \end{array}\; \frac{d^3y}{dx^3} + \begin{array}{c|}(\alpha_1+d)\,\alpha_0\\ (\alpha_2+d)\,\alpha_0\\ (\alpha_3+d)\,\alpha_0\\ (\alpha_2+d)\,\alpha_1\\ (\alpha_3+d)\,\alpha_1\\ (\alpha_3+d)\,\alpha_2\end{array}\; \frac{d^2y}{dx^2} + \begin{array}{c|}(\alpha_2+d)(\alpha_1+d)\,\alpha_0\\ (\alpha_3+d)(\alpha_1+d)\,\alpha_0\\ (\alpha_3+d)(\alpha_2+d)\,\alpha_0\\ (\alpha_3+d)(\alpha_2+d)\,\alpha_1\\ \\ \\ \end{array}\; \frac{dy}{dx}$$

$$+ (\alpha_3+d)(\alpha_2+d)(\alpha_1+d)\,\alpha_0 y = X.$$

Die Gestalt der Formeln ist hier fast ganz dieselbe geblieben wie im vorigen Paragraphen; die dort constanten Exponenten von $e$ sind hier Functionen von $x$, aufserdem ist zu ihnen das Integrationszeichen getreten, und in der entwickelten Differenzialgleichung ist auf ganz ähnliche Weise zu den Coefficienten von $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$, $y$ noch das Zeichen der Differenziation hinzugekommen. Es läfst sich beweisen, dafs die zwischen den Gleichungen (9.) und (10.) angedeutete Verbindung ganz allgemein ist, was aber nicht zu unserm Zwecke gehört; wir betrachten die symbolische Darstellung der Coefficienten der verschiedenen Differenziale von $y$ als eine blofse Abkürzung, und ziehen überhaupt nur aus diesen Entwicklungen den Schlufs, dafs sich die Integration einer linearen Differenzialgleichung mit veränderlichen Coefficienten auf die Integration einer Gleichung von einer um die Einheit niederern Ordnung zurückbringen läfst, die aber im Allgemeinen nicht mehr linear ist. Wäre z. B. die Gleichung gegeben:

$$11. \quad \frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+py = X,$$

wo $p$, $q$, $X$ Functionen von $x$ sind, so weifs man, dafs

$$12. \quad y = e^{-\int \alpha_0 dx}\int e^{\int(\alpha_0-\alpha_1)dx}\int e^{\int \alpha_1 dx} X dx$$

das Integral der Gleichung

$$13. \quad \frac{d^2y}{dx^2}+\alpha_0\left|\frac{dy}{dx}+(\alpha_1+d)\alpha_0 y\right. = X \atop \alpha_1 \quad$$

ist. Lassen sich nun die beiden Gleichungen befriedigen:

$$14. \quad \alpha_0+\alpha_1 = p \quad \text{und} \quad \alpha_1\alpha_0+d\alpha_0 = q$$

oder $\alpha_0$ und $\alpha_1$ durch $p$ und $q$ ausdrücken, so giebt (12.) das Integral von (11.). Es sei z. B.

$$15. \quad \frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+xy = X.$$

Die Gleichungen (14.) werden befriedigt, wenn $\alpha_0 = x-1$ und $\alpha_1 = 1$ angenommen wird; die Formel (12.) giebt also das Integral von (15.) unter der Gestalt

$$16. \quad y = e^{-\frac{1}{2}x^2+x}\int e^{\frac{1}{2}x^2-2x}dx\int e^x X dx,$$

Differenziirt man vier mal nach einander den Ausdruck

$$17 \qquad y = x^{a_0}\int x^{a_1-a_0}dx\int x^{a_2-a_1}dx\int x^{a_3-a_2}dx\int x^{-a_3}Xdx,$$

so erhält man die Gleichung

$$18. \quad \frac{d^4y}{dx^4} - \begin{array}[t]{r|} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}\; \frac{1}{x}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \begin{array}[t]{r|} a_0(a_1+1) \\ a_0(a_2+1) \\ a_0(a_3+1) \\ a_1(a_2+1) \\ a_1(a_3+1) \\ a_2(a_3+1) \end{array}\; \frac{1}{x^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \begin{array}[t]{r|} a_0(a_1+1)(a_2+2) \\ a_0(a_1+1)(a_3+2) \\ a_0(a_2+1)(a_3+2) \\ a_1(a_2+1)(a_3+2) \end{array}\; \frac{1}{x^3}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$+ a_0(a_1+1)(a_2+2)(a_3+3)\frac{1}{x^4} = X.$$

Bedienen wir uns nun der schon bekannten Bezeichnung

$$u(u\pm\alpha)(u\pm 2\alpha)\dots\dots(u\pm(n-1)\alpha) = (u, \pm\alpha)^n,$$

so finden wir

$$19. \quad (u-a_0)(u-a_1-1)(u-a_2-2)(u-a_3-3) =$$

$$(u,-1)^4 - \begin{array}[t]{r|} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}\; (u,-1)^3 + \begin{array}[t]{r|} a_0(a_1+1) \\ a_0(a_2+1) \\ a_0(a_3+1) \\ a_1(a_2+1) \\ a_1(a_3+1) \\ a_2(a_3+1) \end{array}\; (u,-1)^2 - \begin{array}[t]{r|} a_0(a_1+1)(a_2+2) \\ a_0(a_1+1)(a_3+2) \\ a_0(a_2+1)(a_3+2) \\ a_1(a_2+1)(a_3+2) \end{array}\; (u,-1)^1$$

$$+ a_0(a_1+1)(a_2+2)(a_3+3).$$

Um also die Coefficienten von $(u,-1)^3$, $(u,-1)^2$, $(u,-1)^0$ oder von $u.u-1.u-2$, $u.u-1$, $u$, $1$ zu erhalten, braucht man nur die verschiedenen Classen der Combinationen ohne Wiederholungen aus den Elementen $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ zu bilden und der ersten Combinationsstelle 0, der zweiten 1, der dritten 2 und der vierten 3 hinzuzufügen. Vergleicht man nun die beiden Ausdrücke (18.) und (19.) mit einander, so ergiebt sich, dafs wenn die Differenzialgleichung vorgelegt ist:

$$20. \quad \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{k_1}{x}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{k_2}{x^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{k_3}{x^3}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{k_4}{x^4}y = X,$$

und $\nu_0$, $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$ die Wurzeln der Gleichung

$$21. \quad (u,-1)^4 + k_1(u,-1)^3 + k_2(u,-1)^2 + k_3(u,-1)^1 + k_4 = 0$$

sind, und man die Gröfsen $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ so bestimmt, dafs

$$a_0 = \nu_0, \quad a_1 = \nu_1 - 1, \quad a_2 = \nu_2 - 2, \quad a_3 = \nu_3 - 3,$$

dafs dann die Formel (17.) das Integral der Gleichung (20.) ausdrückt, oder

wenn man die Wurzeln der Gleichung (21.) selbst einführt, die Formel

$$22. \quad x^{\nu_0}\int x^{\nu_1-\nu_0-1}dx\int x^{\nu_2-\nu_1-1}dx\int x^{\nu_3-\nu_2-1}dx\int x^{-\nu_3+3}X\,dx.$$

Die Formel (19.) wird etwas allgemeiner, wenn man $\frac{u}{\alpha}$ statt $u$ und $\frac{a_0}{\alpha}$, $\frac{a_1}{\alpha}$, $\frac{a_2}{\alpha}$, $\frac{a_3}{\alpha}$ statt $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ setzt und die ganze Gleichung mit $\alpha^4$ multiplicirt; man erhält dann

$$23. \quad (u-a_0)(u-a_1-\alpha)(u-a_2-2\alpha)(u-a_3-3\alpha) =$$

$$\begin{array}{r|r|r|l}
(u,-\alpha)^4-a_0 & (u,-\alpha)^3+a_0(a_1+1) & (u,-\alpha)^2-a_0(a_1+1)(a_2+2 & (u,-\alpha)^1 \\
a_1 & a_0(a_2+1) & a_0\ a_1+1)(a_3+2) & \\
a_2 & a_0(a_3+1) & a_0(a_2+1)(a_3+2) & \\
a_3 & a_1(a_2+1) & a_1(a_2+1)(a_3+2) & \\
 & a_1(a_3+1) & & \\
 & a_2(a_3+1) & &
\end{array}$$

$$+a_0(a_1+\alpha)(a_2+2\alpha)(a_3+3\alpha).$$

Ebenso kann man auch in (17.) und (18.) $(\alpha+\beta x)$ statt $x$ einführen, dann die Gleichung (18.) mit $\beta^4(\alpha+\beta x)^4$ multipliciren und in (17.) und (18.) $\frac{X}{\beta^4(\alpha+\beta x)^4}$ statt $X$ setzen; man findet auf diese Weise, dafs

$$24. \quad y=(\alpha+\beta x)^{\frac{\nu_0}{\beta}}\int(\alpha+\beta x)^{\frac{\nu_1-\nu_0}{\beta}-1}dx\int(\alpha+\beta x)^{\frac{\nu_2-\nu_1}{\beta}-1}dx\int(\alpha+\beta x)^{\frac{\nu_3-\nu_2}{\beta}-1}dx\int(\alpha+\beta x)^{\frac{-\nu_3}{\beta}-1}X\,dx$$

das Integral der Gleichung

$$25. \quad (\alpha+\beta x)^4\frac{d^4y}{dx^4}+k_1(\alpha+\beta x)^3\frac{d^3y}{dx^3}+k_2(\alpha+\beta x)^2\frac{d^2y}{dx^2}+k_3(\alpha+\beta x)\frac{dy}{dx}+k_4 y = X$$

ist, wenn $\nu_0$, $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$ die Wurzeln der Gleichung

$$26. \quad (u,-\beta)^4+k_1(u,-\beta)^3+k_2(u,-\beta)^2+k_3(u,-\beta)^1 = 0$$

sind.

Dafs die hier gebrauchten Formeln ganz allgemeine Gültigkeit haben, wird am besten durch eine Formel bewiesen, welche ich im 12. Bande dieses Journals entwickelt habe.

## §. 4.

Wir versuchen jetzt die Involution von Integralen (7.) in einfache Integrale aufzulösen. Man findet leicht

$$27. \quad e^{a_0x}\int e^{(a_1-a_0)x}dx\int e^{-a_1x}X\,dx = \frac{e^{a_0x}}{a_0-a_1}\int e^{-a_0x}X\,dx+\frac{e^{a_1x}}{a_1-a_0}\int e^{-a_1x}X\,dx.$$

Setzt man

$$(u-a_0)(u-a_1) = A$$

und differenzürt nach $u$, so erhält man

$$\frac{dA}{du} = (u-a_0)+(u-a_1).$$

Wird nun hier $u=a_0$ und dann $u=a_1$ gesetzt, und dieses Setzen auf der linken Seite durch $dA_0$ und $dA_1$ bezeichnet, so ergiebt sich

$$dA_0 = a_0 - a_1 \quad \text{und} \quad dA_1 = a_1 - a_0,$$

und mit diesen Ausdrücken läfst sich (27.) schreiben:

$$e^{a_0 x}\int e^{(a_1-a_0)x}dx\int e^{-a_1 x}Xdx = \frac{a_0 x}{dA_0}\int e^{-a_0 x}Xdx + \frac{a_1 x}{dA_1}\int e^{-a_1 x}Xdx.$$

Setzt man hier $e^{a_2 x}\int e^{-a_2 x}Xdx$ statt $X$, so entsteht

$$e^{a_0 x}\int e^{(a_1-a_0)x}dx\int e^{(a_2-a_1)x}dx\int e^{-a_2 x}Xdx$$
$$= \frac{e^{a_0 x}}{dA_0}\int e^{(a_2-a_0)x}dx\int e^{-a_2 x}Xdx + \frac{e^{a_1 x}}{dA_1}\int e^{(a_2-a_1)x}dx\int e^{-a_2 x}Xdx.$$

Wird $e^{a_0 x}\int e^{(a_1-a_0)x}dx\int e^{(a_2-a_1)x}dx\int \ldots \int e^{-a_n x}Xdx$ durch $T_n$ bezeichnet und $e^{a_n x}\int e^{-a_n x}Xdx$ durch $S_n$, so erhält man aus der letzten Gleichung, wenn ihre rechte Seite nach (27.) in einfache Integrale aufgelöst wird:

$$T_2 = \frac{1}{(a_0-a_2)dA_0}S + \frac{1}{(a_2-a_0)dA_0}S_2$$
$$+\frac{1}{(a_1-a_2)dA_1}S_1 + \frac{1}{(a_2-a_1)dA_1}S_2.$$

Nimmt man jetzt

$$(u-a_0)(u-a_1)(u-a_2) = A$$

an, differenzürt nach $u$ und bezeichnet in dem Resultate wieder das Setzen von $u=a_n$ durch $dA_n$, so läfst sich die letzte Gleichung schreiben:

$$T_2 = \frac{1}{dA_2}S_0 + \frac{1}{dA_1}S_1 + \frac{1}{dA_2}S_2.$$

Wird in dieser Gleichung wieder $e^{a_3 x}\int e^{-a_3}Xdx$ statt $X$ gesetzt und die rechte Seite nach (27.) in einfache Integrale aufgelöset, so kommt:

$$T_3 = \frac{1}{(a_0-a_3)dA_0}S_0 + \frac{1}{(a_3-a_0)dA_0}S_3$$
$$\frac{1}{(a_1-a_3)dA_1}S_1 + \frac{1}{(a_3-a_1)dA_1}S_3$$
$$\frac{1}{(a_2-a_3)dA_2}S_2 + \frac{1}{(a_3-a_2)dA_2}S_3$$

Setzt man nun

$$(u-a_0)(u-a_1)(u-a_2)(u-a_3) = A,$$

und wendet die angegebene Bezeichnung an, so entsteht aus obiger Gleichung:

$$T_3 = \frac{1}{dA} S_0 + \frac{1}{dA_1} S_1 + \frac{1}{dA_2} S_2 + \frac{1}{dA_3} S_3;$$

denn der Coefficient von $S_3$ war $-\frac{1}{dA_0} - \frac{1}{dA_1} - \frac{1}{dA_2} = \frac{1}{dA_3}$.

Nimmt man jetzt ganz allgemein

$$28. \quad (u-a_0)(u-a_1)(u-a_2)\ldots(u-a_{n-1}) = A$$

an, differenziirt diesen Ausdruck nach $u$, und bezeichnet, wie schon immer geschah, das Setzen von $u=a_m$ in dem Resultate durch $dA_m$, wo also

$$dA_m = (a_m-a_0)(a_m-a_1)\ldots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\ldots(a_m-a_{n-1}),$$

so ist bekanntlich

$$29. \quad \frac{1}{dA_0} + \frac{1}{dA_1} + \frac{1}{dA_2} + \ldots + \frac{1}{dA_{n-1}} = 0.$$

Dieser einzige Ausdruck, in Verbindung mit der Formel (27.), zeigt nach dem bisher angewandten Verfahren, dafs ganz allgemein

$$30. \quad e^{a_0 x}\int e^{(a_1-a_0)x}dx\int e^{(a_2-a_1)x}dx\int\ldots\int e^{(a_{n-1}-a_{n-2})x}dx\int e^{-a_{n-1}x}X\,dx$$
$$= \frac{e^{a_0 x}}{dA_0}\int e^{-a_0 x}Xdx + \frac{e^{a_1 x}}{dA_1}\int e^{-a_1 x}Xdx + \frac{e^{a_2 x}}{dA_2}\int e^{-a_2 x}Xdx + \ldots$$
$$\ldots + \frac{e^{a_{n-1}x}}{dA_{n-1}}\int e^{-a_{n-1}x}Xdx.$$

Auf eine ziemlich ähnliche Weise läfst sich auch finden, dafs

$$31. \quad e^{ax}\int^m e^{(b-a)x}dx^m\int^n e^{-bx}X\,dx^n =$$
$$e^{ax}\Big\{(b-a)^{-m}\int^n e^{-ax}Xdx^n + \frac{1}{(1,+1)}\cdot\frac{d(b-a)^{-m}}{db}\int^{n-1} e^{-ax}Xdx^{n-1}$$
$$+ \frac{1}{(1,+1)^2}\cdot\frac{d^2(b-a)^{-m}}{db^2}\int^{n-2} e^{-ax}Xdx^{n-2} + \ldots + \frac{1}{(1,+1)^{n-1}}\cdot\frac{d^{n-1}(b-a)^{-m}}{db^{n-1}}\int e^{-ax}Xdx\Big\}$$
$$+ e^{bx}\Big\{(a-b)^{-n}\int^m e^{-bx}Xdx^m + \frac{1}{(1,+1)}\cdot\frac{d(a-b)^{-n}}{da}\int^{m-1} e^{-bx}Xdx^{m-1}$$
$$+ \frac{1}{(1,+1)^2}\cdot\frac{d^2(a-b)^{-n}}{da^2}\int^{m-2} e^{-bx}Xdx^{m-2} + \ldots + \frac{1}{(1,+1)^{m-1}}\cdot\frac{d^{m-1}(a-b)^{-n}}{da^{m-1}}\int e^{-bx}Xdx\Big\}.$$

wo wir, dem Früheren gemäfs, $1.2.3\ldots n$ durch $(1,+1)^n$ bezeichnet haben.

Man erhält in dieser Entwicklung die zweite Reihe aus der ersten, wenn man $a$ mit $b$ und $m$ mit $n$ vertauscht. Für diese Vertauschung ändert sich daher der ganze Ausdruck nicht, es ist folglich

$$32. \quad e^{ax}\int^m e^{(b-a)x}dx^m\int^n e^{-bx}X\,dx^n = e^{bx}\int^n e^{(a-b)x}dx^n\int^m e^{-ax}X\,dx^m.$$

Von dieser Gleichung aus läfst sich weiter schliefsen, und man wird unter vielen andern einzelnen Vertauschungen auch finden, dafs sich z. B. in einer Formel wie (8.) durchgängig $\nu_0$ mit $\nu_m$, $\nu_1$ mit $\nu_{m-1}$, $\nu_2$ mit $\nu_{m-2}$ u. s. w. und zugleich $a_0$ mit $a_m$, $a_1$ mit $a_{m-1}$, $a_2$ mit $a_{m-2}$ u. s. w. vertauschen läfst.

Durch die Formel (31.) kann man leicht eine Involution von Integralen wie (18.) in einfachere Integrale auflösen.

Ganz auf dieselbe Weise wie vorher die Formel (7.) in einfache Integrale aufgelöst wurde, läfst sich auch finden, dafs

$$33. \quad x^{a_0}\int x^{a_1-a_0-1}dx\int x^{a_2-a_1-1}dx\int\ldots\int x^{a_n-a_{n-1}-1}dx\int x^{-a_{n-1}}Xdx =$$

$$\frac{x^{a_0}}{dA_0}\int x^{-a_0}Xdx+\frac{x^{a_1}}{dA_1}\int x^{-a_1}Xdx+\frac{x^{a_2}}{dA_2}\int x^{-a_2}Xdx+\ldots+\frac{x^{a_{n-1}}}{dA_{n-1}}\int x^{-a_{n-1}}Xdx,$$

wo die Coefficienten der Reihe dieselbe Bedeutung haben wie in (30.).

Berlin, im December 1833.

---

# 27.

# Auflösung der Aufgaben 3., 4., 5. im vierten Hefte des 15. Bandes.

(Vom Herrn Dr. *Schellbach* zu Berlin.)

---

Auflösung von No. 3. In Fig. 22. sei $B$ der Mittelpunct und $C$ der eine Brennpunct einer Ellipse, deren große Axe $AD$ ist. Über $AD$ sei aus $B$ ein Kreis beschrieben. Zieht man nun durch $C$ zwei auf einander senkrechte Sehnen $KS$, $GM$, so sind diese, der Größe nach, zwei conjugirte Durchmesser der Ellipse. Bilden dann $IF$, $HL$ zwei diesen Sehnen parallele Durchmesser des Kreises, so werden dieselben von den Sehnen in zwei Puncten $E$, $N$ geschnitten, so daß $IE$, $EF$ die Vectoren sind, welche zu dem Durchmesser $KS$ gehören und $HN$, $NL$ die Vectoren, welche den Durchmesser $GM$ begränzen. In der Zeichnung geben $PR$, $TU$ und $WV$, $OQ$ die wirkliche Lage der conjugirten Durchmesser an. Nach den obigen Erklärungen ist also $PR = WV = KS$, $TU = OQ = GM$; ferner $CP = CV = EF$, $CR = CW = IE$, $CO = CU = NL$ und $CQ = CT = HN$. Es liegen übrigens $FPV$, $LUO$, $HTQ$ und $IRW$, sämmtlich in Geraden, die auf $AD$ senkrecht stehen.

Stellt aber in Fig. 23. $B$ den Mittelpunct und $C$ den einen Brennpunct einer Hyperbel vor, und ist $BE$ die große und $CE$ die kleine Halbaxe, die senkrecht auf einander stehen, so sind $FI$ und $XY$ die Asymptoten der Hyperbel. Ist nun $P$ ein Punct dieser Curve, so haben alle Linien dieselbe Bedeutung für die Hyperbel, die sie früher für die Ellipse hatten.

Bezeichnen wir für die Ellipse und Hyperbel durch $a$ und $b$ die große und kleine Halbaxe, durch $x$ die Abscisse des Punctes $P$ vom Mittelpuncte aus gerechnet, durch $r$ und $\varrho$ die conjugirten Durchmesser, durch $v$, $v'$ und $\varphi$, $\varphi'$ die Vectoren, welche bezüglich $r$ und $\varrho$ begränzen, setzen für die Ellipse $e = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$, für die Hyperbel $e = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{a}$ und drücken den Winkel $FBD$ durch $\delta$ aus, so erhalten wir:

für die Ellipse $v = a - ea\cos\delta = a - ex$, $v^1 = a + ea\cos\delta = a + ex$,

$$\varrho^2 = a^2 - e^2x^2 = vv^1,$$

$$\Phi = a - ea\sin\delta, \qquad \Phi^1 = a + ea\sin\delta,$$

$$r^2 = a^2 - e^2a^2\sin^2\delta = b^2 + e^2x^2 = \Phi\Phi^1,$$

und für die Hyperbel $v = ex - b$, $v^1 = ex + b$, $\varrho^2 = e^2x^2 - b^2 = vv^1$,

$$\Phi = ex - a, \quad \Phi^1 = ex + a, \quad r^2 = e^2x^2 - a^2 = \Phi\Phi^1.$$

Der Anblick dieser Werthe der einzelnen Linien rechtfertigt die obigen Behauptungen und den Satz des Herrn *Steiner.*

Auflösung von No. 4. Denkt man sich an die Hyperbel oder Ellipse, die in unserer Figur durch $P$ geht, eine Tangente gezogen, so schneidet diese auf der grofsen Axe ein Stück gleich $\frac{a^2}{x}$ ab. Der gröfsere Radiusvector von $P$ ist $ex + a$. Nimmt man also auf ihm einen Punct $Z$ an, der vom Focus um $ex$ absteht, also von $P$ um $a$, und verbindet $Z$ mit dem Mittelpuncte $B$, so ist diese Verbindungslinie der Tangente an $P$ parallel; denn die Entfernung des Brennpunctes vom Mittelpunct ist $ea$, daher

$$ea : \frac{a^2}{x} = ex : a.$$

Nun bilden beide Vectoren mit der Tangente gleiche Winkel; folglich schneidet die verlängerte $ZB$ auf dem andern Radiusvector ebenfalls ein Stück gleich $a$ ab. Der Satz, wie ihn Herr *Steiner* ausspricht, gilt also für beide Curven; aber der Mittelpunct der Hyperbel liegt in der verlängerten Basis des von Herrn *Steiner* erwähnten Dreiecks, wogegen der Mittelpunct der Ellipse sich in dieser Basis selbst befindet.

Auflösung von No. 5. Bewegt sich (Fig. 23.) in dem festen Parallelogramme $ADCB$ das veränderliche Dreieck $EFG$ so hin, dafs die Seite $GE$ gleich und parallel $DC$ bleibt, die Seite $FE$ parallel mit $BD$ und die Spitze $F$ stets in $AB$ fällt, so schneidet die veränderliche Seite $FG$ die Seiten $AB$ und $BC$ des Dreiecks $ABC$ in dem Verhältnisse, wie es unsere Aufgabe verlangt. Die Seite $FG$ ist natürlich am kleinsten, wenn das Dreieck $FEG$ bei $F$ rechtwinklig ist; in diesem Falle steht der Durchschnittspunct $H$ in der Diagonale $BD$ senkrecht über $A$. Dafs die Seite $FG$ bei der Bewegung des Dreiecks $FEG$ eine Parabel berührt, von der $BD$ ein Durchmesser und $AC$ die Verbindungssehne der beiden Tangenten $AB$ und $BC$ bilden, ist bekannt.

**Aufgabe 1.** Die Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

läfst sich auf die Form bringen

$$\frac{x^2}{x^2+y^2-b^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2-a^2}=1.$$

Welcher geometrische Satz liegt in diesem Resultate und wie heifst derselbe für die Hyperbel? Setzt man in der ersten Gleichung $a=b$, so liefert sie $x^2+y^2=a^2$ die Gleichung eines Kreises; nimmt man aber diese Substitution in der zweiten Gleichung vor, so ergiebt sich $x^2+y^2=x^2+y^2-a^2$, also $a=0$. Wie ist dieser scheinbare Widerspruch zu erklären?

**Aufgabe 2.** Die Gleichung der Flächen des zweiten Grades sei:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy+2Gx+2Hy+2Iz+K=0:$$

dann ist

$$(A\alpha+F\beta+E\gamma+G)x+(F\alpha+B\beta+D\gamma+H)y+(E\alpha+D\beta+C\gamma+I)z$$
$$+G\alpha+H\beta+I\gamma+K=0$$

die Gleichung der Berührungsebene an diese Flächen im Puncte $(\alpha, \beta, \gamma)$. Bezeichnet man nun die linke Seite dieser Gleichung durch

$$F(\delta, t),$$

wo $\delta$ alle griechischen Buchstaben und $t$ alle kleinen lateinischen vertreten mag, so ist:

$$[F(\delta, t)]^2 = F(\delta, \delta).F(t, t)$$

die Gleichung des Berührungskegels an die Flächen des zweiten Grades, dessen Spitze in dem Puncte $(\alpha, \beta, \gamma)$ liegt. Hier befindet sich natürlich der Punct $(\alpha, \beta, \gamma)$ nicht mehr auf diesen Flächen selbst, sondern im Allgemeinen aufserhalb. Es ist $F(t, t)$ das was aus $F(\delta, t)$ wird, wenn man $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ entsprechend durch $x$, $y$, $z$ ersetzt; eben so ergiebt sich die Bedeutung von $F(\delta, \delta)$. Man wird bald sehen, dafs $F(t, t)=0$ die obige Gleichung für die krummen Flächen des zweiten Grades ist. Es soll nun die Richtigkeit der für den Berührungskegel aufgestellten Gleichung durch blofse Schlüsse, ohne Rechnung bewiesen werden. Viele Gründe lassen sich leicht anführen, die diese Form sehr wahrscheinlich machen.

Berlin, den 4ten Mai 1836.

---

# 28.

# Ueber eine eigenthümliche Entwicklung der Sinus- und Cosinusreihe nach Potenzen des Bogens.

(Vom Herrn Prof. Dr. *Schellbach* zu Berlin.)

Nähert man sich in Fig. 24. unaufhörlich dem Puncte $A$ in der rechtwinkligen Spirale $abcde\ldots$, so erhält man offenbar seine Entfernung $AB$ von der Seite $ab$ durch die convergente Reihe

$$bc - de + fg - hi + kl - mn + \ldots.$$

ausgedrückt, und seine Entfernung $Bb$ von der Seite $bc$ kann durch die ebenfalls convergente Reihe

$$cd - ef + gh - ik + lm - \ldots.$$

gemessen werden.

Die Spirale selbst kann den mannigfaltigsten Gesetzen unterworfen sein. Ist z. B. in Fig. 24. $BAD$ ein Halbkreis, dessen Mittelpunct $C$, und die Ecken der Spirale befinden sich stets auf den beiden Geraden $BF$ und $ED$, so sind die Seiten der Spirale, wenn man den Winkel $ACB = \alpha$ setzt und den Radius des Kreises gleich 1 annimmt,

$$EB = 2\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2},\ EF = 2\,\mathrm{tang}^2\frac{\alpha}{2},\ FG = 2\,\mathrm{tang}^3\frac{\alpha}{2},\ GH = 2\,\mathrm{tang}^4\frac{\alpha}{2},\ \ldots.$$

also ist die Entfernung $AK$ des Punctes $A$ von $BC$ oder

$$\sin\alpha = 2\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2} - 2\,\mathrm{tang}^3\frac{\alpha}{2} + 2\,\mathrm{tang}^5\frac{\alpha}{2} - 2\,\mathrm{tang}^7\frac{\alpha}{2} + \ldots. = \frac{2\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tang}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Diese Reihe convergirt natürlich nur, wenn $\alpha$ kleiner als $90^\circ$ ist; denn nur in diesem Falle nähert man sich durch die Spirale wirklich dem Puncte $A$. Die beiden Geraden $BF$ und $ED$ kann man anders legen, oder statt ihrer beliebig andere Linien wählen.

Hätte man die Spirale so bestimmt, dafs man $BE = BA$ macht, $EF = EA$, $FG = AF$, $GH = AG$ u. s. w., so werden die Winkel $ABE = \frac{\alpha}{2}$, $AEF = \frac{\alpha}{4}$, $AFG = \frac{\alpha}{8}$, $AGH = \frac{\alpha}{16}$ u. s. w., da nämlich die Spirale immer rechtwinklig bleiben soll. In diesem Falle erhält man:

$$BE = 2\sin\frac{\alpha}{2},\quad EF = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{4},\quad FG = 8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{8},$$
$$GH = 16\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{8}\sin\frac{\alpha}{16},\ \dots.$$

wodurch sich wieder Reihen für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ ergeben.

Ein gröfseres Interesse hat folgende Bestimmung der Spirale. Es sei in Fig. 25. $AB$ ein ganz willkürlicher Curvenbogen ohne Wendungspunct, $BH$ eine Normale an demselben. Man wickle den Bogen $AB$ ab, so dafs der Punct $A$ die Curve $AC$ beschreibt, wodurch also die Gerade $BC$ der Curve $AB$ gleich wird und senkrecht auf $BH$ zu stehen kommt. Wickelt man eben so den Bogen $AC$ ab, so dafs $A$ die Curve $AD$ beschreibt und die Gerade $CD$ dem Bogen $AC$ gleich wird und sich senkrecht auf $BC$ stellt, und verfährt eben so mit den Curven $AD$, $AE$, $AF$, ...., so entsteht eine Spirale, welche die Geraden $AG$ und $BG$ durch die successiven Evolventen des Bogens $AB$ finden lehrt.

Es sei z. B. $AB = \alpha$ der Bogen eines Kreises, dessen Radius $AH$ der Kürze wegen gleich 1 gesetzt werden mag, so ist

$$AC = CD = \int \alpha\, d\alpha = \tfrac{1}{2}\alpha^2,\qquad AD = DE = \int \frac{\alpha^2\, d\alpha}{2} = \frac{\alpha^3}{2.3},$$
$$AE = FE = \int \frac{\alpha^3\, dx}{2.3} = \frac{\alpha^4}{2.3.4},\ \dots.$$

folglich $AG$ oder

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} - \dots,$$

und $GH$ oder

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1.2.2.4} - \dots.$$

Dafs diese Reihen für jeden Werth von $\alpha$ convergiren, ergiebt sich jetzt durch eine einfache geometrische Betrachtung.

Die Länge der ganzen Spirale $CBEFG$ .... ist

$$1 + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} + \dots = e^\alpha,$$

so dafs also jedes einzelne Glied in dieser Entwicklung eine geometrische Bedeutung gewonnen hat.

Sind allgemein $BH$ und $AH$ zwei Normalen an den Bogen $AB = \beta$, und bezeichnet man den Winkel $AHB$ durch $\beta$, so sind die Seiten der Spirale:

$$BC = \beta,\quad CD = \int \beta\, d\alpha,\quad DE = \iint \beta\, d\alpha^2,\quad EF = \iiint \beta\, d\alpha^3,\ \dots$$

Verwandelt man durch theilweise Integration diese vielfachen Integrale in einfache, so erhält man, nach einigen leichten Reductionen, für die Länge der Spirale *BCDE*.... oder $s$

$$s = e^{\alpha}\int_0^{\alpha} e^{-\alpha}\, d\beta.$$

Setzt man ferner $BG = x$ und $GA = y$, so ergiebt sich eben so leicht

$$x = \sin\alpha\int_0^{\alpha}\cos\alpha\, d\beta - \cos\alpha\int_0^{\alpha}\sin\alpha\, d\beta,$$

$$y = \sin\alpha\int_0^{\alpha}\sin\alpha\, d\beta + \cos\alpha\int_0^{\alpha}\cos\alpha\, d\beta,$$

woraus man noch ableiten kann

$$y\cos\alpha + x\sin\alpha = \int_0^{\alpha}\cos\alpha\, d\beta, \qquad y\sin\alpha - x\cos\alpha = \int_0^{\alpha}\sin\alpha\, d\beta,$$

$$x^2 + y^2 = \left\{\int_0^{\alpha}\cos\alpha\, d\beta\right\} + \left\{\int_0^{\alpha}\sin\alpha\, d\beta\right\}^2$$

als Quadrat der Sehne *AB*.

Ich glaube, diese Betrachtungen werden einiges Licht auch auf andere Reihen-Entwicklungen werfen. Bezeichnet man z. B. die Länge der Spirale durch $s$, so ist

$$s = e^{\alpha}, \quad \text{also} \quad \alpha = \log\text{nat}\, s.$$

Für $s = 10$ ist $\alpha = 2{,}302\ldots$, folglich gehört zu einer Spirale von 10 Fufs Länge ein Kreisbogen von 2,302 Fufs Länge, wenn der Radius des Kreises einen Fufs beträgt. Ein ähnlicher geometrischer Sinn läfst sich auch mit den Logarithmen anderer Basen verbinden. Diese geometrische Bedeutung der Logarithmen macht den Übergang aus den trigonometrischen Functionen zu ihren entsprechenden Bögen naturgemäfser als sonst.

Wie in dem besondern Falle, wenn *AB* ein Kreisbogen ist, die Curven *AC, AD, AE*, .... und die Flächenräume *ABC, ACD, ADE*, .... schnell elementar gefunden werden, zeige ich vielleicht in einer spätern Abhandlung, da dieser Gegenstand für Lehrer Interesse hat.

---

quae, si ponimus integralia

$$\int_{\infty}^{\cdot}\frac{-d\psi.\sqrt{2}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}\,2\psi}} = \sigma \qquad \int_{\infty}^{\cdot}\frac{-d\psi.\sqrt{2}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}^3 2\psi}} = \delta$$

$$\int_{\infty}^{\cdot}\frac{-d\psi.\sqrt{2}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}^5 2\psi}} = \tfrac{1}{3}\sigma_1 \qquad \text{et} \qquad \int_{\infty}^{\cdot}\frac{-d\psi.\sqrt{2}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}^7 2\psi}} = \tfrac{3}{5}\delta_1$$

$$\int_{\infty}^{\cdot}\frac{-d\psi.\sqrt{2}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}^9 2\psi}} = \frac{1.5}{3.7}\sigma_2 \qquad \int_{\infty}^{\cdot}\frac{-d\psi.\sqrt{2}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}^{11} 2\psi}} = \frac{3.7}{5.9}.\delta_2$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \qquad \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\int_{\infty}^{\cdot}\frac{-d\psi.\sqrt{2}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}^{4\alpha+1} 2\psi}} = \frac{1.5.9\ldots.(4\alpha-3)}{3.7.11\ldots.(4\alpha-1)}, \qquad \int_{\infty}^{\cdot}\frac{-d\psi.\sqrt{2}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}^{4\alpha+3} 2\psi}} = \frac{3.7.11\ldots.(4\alpha-1)}{5.9.13\ldots.(4\alpha+1)}.\delta\alpha,$$

abit in simpliciorem hanc

$$\begin{aligned} U = {} & \sigma+\frac{1^2.\sigma_1}{2.4}\cos^2 2\theta+\frac{1^2.5^2.\sigma_2}{2.4.6.8}\cos^4 2\theta+\frac{1^2.5^2.9^2.\sigma_3}{2.4.6.8.10.12}\cos^6 2\theta+\cdots, \\ & -\tfrac{1}{2}\delta\cos 2\theta-\frac{3^2.\delta_1}{2.4.6}\cos^3 2\theta-\frac{3^2.7^2.\delta_2}{2.4.6.8.10}\cos^5 2\theta-\cdots, \end{aligned}$$

unde permutando $\theta$ et $\frac{\pi}{2}-\theta$ obtinemus series binas

$$5.\quad \left\{\begin{aligned} \frac{U'+U}{2} &= \sigma+\frac{1^2.\sigma_1}{2.4}.\cos^2 2\theta+\frac{1^2.5^2.\sigma_2}{2.4.6.8}.\cos^4 2\theta+\frac{1^2.5^2.9^2.\sigma_3}{2.4.6.8.10.12}.\cos^6 2\theta \\ &\qquad +\frac{1^2.5^2.9^2.13^2.\sigma_4}{2.4.6.8.10.12.14.16}.\cos^8 2\theta+\cdots, \\ \frac{U'-U}{2} &= \tfrac{1}{2}\delta.\cos 2\theta+\frac{3^2.\delta_1}{2.4.6}.\cos^3 2\theta+\frac{3^2.7^2.\delta_2}{2.4.6.8.10}.\cos^5 2\theta \\ &\qquad +\frac{3^2.7^2.11^2\delta_3}{2.4.6.8.10.12.14.16}\cos^7 2\theta+\cdots, \end{aligned}\right.$$

in quibus functiones $\sigma$, $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, $\sigma_4$ etc. et $\delta$, $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, $\delta_4$ etc. amplitudinis $\psi$, vel si mavis, amplitudinis $\varphi$ adhuc eruendae supersunt.

3.

Facillime invenitur integrale incognitum primum

$$6.\quad \left\{\begin{aligned} \sigma &= \int_0^{\cdot}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}}, \text{ et posito} \\ \varepsilon &= \int_0^{\cdot} d\varphi\sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi)}, \end{aligned}\right.$$

obtinemus integrale $\delta = 2\varepsilon-\sigma-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}}$. Applicemus amplitudinem complementi, talem igitur, ut sit $\tang\varphi.\tang\varphi' = \sqrt{2}$, sive

$$7.\quad \left\{\begin{aligned} \tang\varphi' &= \frac{\sqrt{2}}{\tang\varphi} \\ \sin\varphi' &= \frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}} \\ \cos\varphi' &= \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}.\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}} \end{aligned}\right.$$

erit integrale prius

$$8.\qquad \delta = 2\varepsilon - \sigma - \sin\varphi\sin\varphi'.$$

Integralium $\sigma$ et $\varepsilon$ valoris e tabulis ab III. *Legendre* pro modulo $k = \sin 45^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ paratis notissimi sunt, a quibus integralia incognita pendere reliqua omnia nunc demonstrabimus. Formula ad reducendum integralia haec idonea est

$$n.\int_x \frac{-d\psi.\sqrt{2}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}^{n+2}2\psi}} = (n-2).\int_x \frac{-d\psi.\sqrt{2}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}^{n-2}2\psi}} - \frac{\mathfrak{Sin}\,2\psi.\sqrt{2}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}^{n}2\psi}},$$

quae, quia $\dfrac{\mathfrak{Sin}\,2\psi.\sqrt{2}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}^n 2\psi}} = -\dfrac{\cos\varphi.\sin^{n-2}\varphi}{2^{\frac{n-3}{2}}.\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)^n}} = \dfrac{\sin^{n-2}\varphi.\sin^n\varphi'}{2^{\frac{n-1}{2}}.\cos^{n-1}\varphi}$ est, sequentes formulas praebet elegantissimas

$$9.\quad\begin{cases}
\sigma_1 = \sigma - \dfrac{\sin\varphi\sin^3\varphi'}{\cos^2\varphi} \\[2mm]
\sigma_2 = \sigma - \dfrac{\sin\varphi\sin^3\varphi'}{\cos^2\varphi} - \dfrac{3}{5}.\dfrac{\sin^5\varphi\sin^7\varphi'}{2^2.\cos^6\varphi} \\[2mm]
\sigma_3 = \sigma - \dfrac{\sin\varphi\sin^3\varphi'}{\cos^2\varphi} - \dfrac{3}{5}.\dfrac{\sin^5\varphi.\sin^7\varphi'}{2^2.\cos^6\varphi} - \dfrac{3.7}{5.9}.\dfrac{\sin^9\varphi\sin^{11}\varphi'}{2^4.\cos^{10}\varphi} \\[2mm]
\sigma_4 = \sigma - \dfrac{\sin\varphi\sin^3\varphi'}{\cos^2\varphi} - \dfrac{3}{5}.\dfrac{\sin^5\varphi.\sin^7\varphi'}{2^2.\cos^6\varphi} - \dfrac{3.7}{5.9}.\dfrac{\sin^9\varphi\sin^{11}\varphi'}{2^4\cos^{10}\varphi} \\
\qquad\qquad - \dfrac{3.7.11}{5.9.13}.\dfrac{\sin^{13}\varphi\sin^{15}\varphi'}{2^6.\cos^{14}\varphi},
\end{cases}$$

etc., nec non sequentes:

$$10.\quad\begin{cases}
\delta_1 = \delta - \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sin^3\varphi.\sin^5\varphi'}{2\cos^4\varphi} \\[2mm]
\delta_2 = \delta - \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sin^3\varphi.\sin^5\varphi'}{2\cos^4\varphi} - \dfrac{1.5}{3.7}.\dfrac{\sin^7\varphi.\sin^9\varphi'}{2^3.\cos^8\varphi} \\[2mm]
\delta_3 = \delta - \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sin^3\varphi.\sin^5\varphi'}{2\cos^4\varphi} - \dfrac{1.5}{3.7}.\dfrac{\sin^7\varphi.\sin^9\varphi'}{2^3.\cos^8\varphi} - \dfrac{1.5.9}{3.7.11}.\dfrac{\sin^{11}\varphi.\sin^{13}\varphi'}{2^5\cos^{12}\varphi} \\[2mm]
\delta_4 = \delta - \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sin^3\varphi.\sin^5\varphi'}{2\cos^4\varphi} - \dfrac{1.5}{3.7}.\dfrac{\sin^7\varphi.\sin^9\varphi'}{2^3.\cos^8\varphi} - \dfrac{1.5.9}{3.7.11}.\dfrac{\sin^{11}\varphi\sin^{13}\varphi'}{2^5\cos^{12}\varphi} \\
\qquad\qquad - \dfrac{1.5.9.13}{3.7.11.15}.\dfrac{\sin^{15}\varphi\sin^{17}\varphi'}{2^7.\cos^{16}\varphi}
\end{cases}$$

etc., ita ut generaliter sit

$$\sigma\alpha = \sigma(\alpha-1) - \frac{3.7.11\ldots.(4\alpha-5)}{5.9.13\ldots.(4\alpha-3)}.\frac{\sin^{4\alpha-3}\varphi.\sin^{4\alpha-1}\varphi'}{2^{2\alpha-2}.\cos^{4\alpha-2}\varphi},$$

$$\delta\alpha = \delta(\alpha-1) - \frac{1.5.9\ldots.(4\alpha-3)}{3.7.11\ldots.(4\alpha-1)}.\frac{\sin^{4\alpha-1}\varphi.\sin^{4\alpha+1}\varphi'}{2^{2\alpha-1}.\cos^{4\alpha}\varphi}.$$

Iam vides computum functionum $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, $\sigma_4$ etc. et $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, $\delta_4$ etc. esse facillimum, nec difficile est perspicere, ipsas versus limitem $= 0$ convergere, si amplitudo $\varphi$ versetur inter limites $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ Si vero transcendentes $\sigma$ et $\delta$ computamus adiumento serierum infinitarum

evolvendo et integrando obtinemus

$$13.\quad \begin{cases} \dfrac{V+V'}{2} = \varepsilon - \dfrac{1.\varepsilon_2}{2.2}\cos^2 2\theta - \dfrac{1.3.5.\varepsilon_4}{2.4.6.8}\cos^4 2\theta - \dfrac{1.3.5.7.\varepsilon_6}{2.4.6.8.10.12}\cos^6 2\theta - \cdots \\ \dfrac{V+V'}{2} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 . \cos 2\theta + \dfrac{1.3.\varepsilon_3}{2.4.6}\cos^3 2\theta + \dfrac{1.3.5.7.\varepsilon_5}{2.4.6.8.10}\cos^5 2\theta \\ \qquad + \dfrac{1.3.5.7.9.11.\varepsilon_7}{2.4.6.8.10.12.14}\cos^7 2\theta + \cdots \end{cases}$$

Transformatione invenimus integrale

$$\varepsilon = \int_x^{\cdot} \frac{-d\psi.\sqrt{2}}{1+\mathfrak{Cos}\,2\psi} \cdot \sqrt{\mathfrak{Cos}\,2\psi} = \int_0^{\cdot} d\varphi\sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi)},$$

quare signi $\varepsilon$ significatio eadem est ut antea in articulo 3. Porro invenitur integrale secundum

$$\varepsilon_1 = \int_x^{\cdot} \frac{-d\psi.\sqrt{2}}{(1+\mathfrak{Cos}\,2\psi)\sqrt{\mathfrak{Cos}\,2\psi}} = \int_0 \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}} - \int_0^{\cdot} d\varphi\sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi)} = \sigma - \varepsilon.$$

Integralia reliqua praebet relatio simplex

$$\int_x^{\cdot} \frac{-d\psi.\sqrt{2}}{(1+\mathfrak{Cos}\,2\psi)\sqrt{\mathfrak{Cos}^n 2\psi}} = \int_x^{\cdot} \frac{-d\psi.\sqrt{2}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}^n 2\psi}} - \int_x^{\cdot} \frac{-d\psi.\sqrt{2}}{(1+\mathfrak{Cos}\,2\psi)\sqrt{\mathfrak{Cos}^{n-2} 2\psi}},$$

scilicet formulas sequentes:

$$14.\quad \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon \\ -\varepsilon_1 = \varepsilon - \sigma \\ \varepsilon_2 = \varepsilon - \sigma + \delta \\ -\varepsilon_3 = \varepsilon - \sigma + \delta - \frac{1}{3}\sigma_1 \\ \varepsilon_4 = \varepsilon - \sigma + \delta - \frac{1}{3}\sigma_1 + \frac{3}{5}\delta_1 \\ -\varepsilon_5 = \varepsilon - \sigma + \delta - \frac{1}{3}\sigma_1 + \frac{3}{5}\delta_1 - \frac{1.5}{3.7}\sigma_2 \\ \varepsilon_6 = \varepsilon - \sigma + \delta - \frac{1}{3}\sigma_1 + \frac{3}{5}\delta_1 - \frac{1.5}{3.7}\sigma_2 + \frac{3.7}{5.9}\delta_2 \\ -\varepsilon_7 = \varepsilon - \sigma + \delta - \frac{1}{3}\sigma_1 + \frac{3}{5}\delta_1 - \frac{1.5}{3.7}\sigma_2 + \frac{3.7}{5.9}\delta_2 - \frac{1.5.9}{3.7.11}\sigma_3 \\ \varepsilon_8 = \varepsilon - \sigma + \delta - \frac{1}{3}\sigma_1 + \frac{3}{5}\delta_1 - \frac{1.5}{3.7}\sigma_2 + \frac{3.7}{5.9}\delta_2 - \frac{1.5.9}{3.7.11}\sigma_3 - \frac{3.7.11}{5.9.13}\delta_3 \\ -\varepsilon_9 = \varepsilon - \sigma + \delta - \frac{1}{3}\sigma_1 + \frac{3}{5}\delta_1 - \frac{1.5}{3.7}\sigma_2 + \frac{3.7}{5.9}\delta_2 - \frac{1.5.9}{3.7.11}\sigma_3 - \frac{3.7.11}{5.9.13}\delta_3 - \frac{1.5.9.13}{3.7.11.15}\sigma_4 \\ \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{cases}$$

Si formulis his utimur, computus functionum $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, $\varepsilon_4$, $\varepsilon_5$ etc. est facillimus. Functio $\varepsilon$ invenitur ope formulae $\varepsilon = \frac{\delta+\sigma+\sin\varphi\sin\varphi'}{2}$, si $\delta$ et $\sigma$ modo in fine articuli (3.) indicato computantur; ipsius valorem alioquin praebent tabulae ab Ill. *Legendre* paratae. Ubi $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ponitur, fit

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \text{etc.} = I, \quad \delta = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \text{etc.} = \frac{\pi}{2I}, \quad \varepsilon = \tfrac{1}{2}\Big(I + \frac{\pi}{2I}\Big),$$

$V = E$ et $V' = E'$. Ceterum patet, series (13.) eodem modo transformari posse, quo series (5.) in (12.) abire.

Scr. die XX. Novemb. 1836.

# 30.

# Anderer Beweis der im 1sten Hefte dieses Bandes Seite 80 mitgetheilten Auflösung einer geometrischen Aufgabe.

(Vom Herrn Rechnungsrath *Brune* zu Berlin.)

---

Indem ich diese Auflösung überlese, finde ich, daſs der Beweis angemessener und kürzer in folgender Art gegeben werden kann.

Würde nur verlangt, die beiden Dreiecks-Seiten so zu theilen, daſs der untere Abschnitt der einen Seite sich zum obern der andern verhalte, wie jene Seite zu dieser: so brauchten $af$ und $be$ nicht senkrecht auf $cd$, sondern nur parallel unter sich selbst in beliebiger Richtung auf $cd$ gezogen zu werden. Denn, sind $af$ und $be$ parallel, so ist immer $de = cf$ und

$$ax : de = ac : dc,$$

$$\left.\begin{matrix} cf \\ de \end{matrix}\right\} : cy = dc : bc,$$

$$\text{also} \quad ax : cy = ac : bc,$$

$$\text{und daher auch} \quad by : cx = bc : ac.$$

In demselben Falle ist ferner, wenn man noch $ae$ und $bf$ zieht, auch $afbe$ ein Parallelogramm, folglich in den beiden Dreiecken $aex$, $fby$,

$$ae = fb, \quad \angle aex = \angle fby, \quad \angle eax = \angle bfy,$$

mithin, wegen der Congruenz dieser Dreiecke, $ex = by$; woraus weiter folgt, daſs $xy$ auch gleich und parallel mit $be$ oder $af$ ist.

Sind aber $af$ und $be$ senkrecht auf $cd$, so sind sie auch unter allen Geraden, welche aus $a$ oder $b$ auf $cd$ gezogen werden können, die kürzesten; mithin ist auch die ihnen gleiche Verbindungslinie $xy$ kürzer, als jede andere Verbindungslinie zwischen zwei Theilungspuncten, die aus einer Construction entstehen, in welcher $af$ und $be$ nicht senkrecht, sondern in anderer Richtung nur parallel auf $cd$ gezogen sind. Folglich ist nach unsrer Construction $xy$ ein Minimum.

Berlin, im August 1836.

---

# 31.

# Lehrsätze,

## zu beweisen.

(Vom Herrn Dr. *F. Heinen* zu Cleve.)

---

1. Zieht man durch irgend einen Punct $O$ in der Ebene einer gleichseitigen Hyperbel zwei sich rechtwinklig durchschneidende Geraden mit den Axen parallel, welche der Hyperbel im Allgemeinen in vier Puncten begegnen, und verbindet diese Durchschnittspuncte durch Sehnen, so liegen die Mitten dieser Sehnen, der Mittelpunct $M$ der Hyperbel und der gegebene Punct $O$ stets auf einem und demselben Kreise, dessen Mittelpunct in der Mitte der Linie $MO$ liegt, welche den gegebenen Punct $O$ mit dem Mittelpuncte $M$ der Hyperbel verbindet; eben so liegen die Schwerpuncte der Dreiecke, welche jenen Punct $O$ zur Spitze und die Sehnen zu Grundlinien haben, auf einem andern Kreise, dessen Mittelpunct auf derselben Verbindungslinie $MO$ in dem Endpuncte des ersten Drittels dieser Linie, von $O$ aus, liegt, und dessen Halbmesser gleich $\frac{1}{3}MO$ ist.

(In den folgenden Sätzen wird unter dem Mittelpuncte einer Kettenlinie derjenige Punct verstanden, welcher auf der Verlängerung der durch den Scheitel gehenden Symmetrie-Axe in einer Entfernung von diesem Scheitel liegt, welche dem Parameter gleich ist, und eine im Mittelpuncte auf der Symmetrie-Axe senkrechte Gerade als erste Axe oder als Axe der Abscissen, die Symmetrie-Axe selbst aber als zweite Axe oder als Axe der Ordinaten angenommen.)

2. Verlängert man die Ordinaten eines der beiden im Scheitel zusammenstofsenden Zweige einer Kettenlinie um Stücke, welche den durch diese Ordinaten und den Scheitel der Kettenlinie abgegrenzten Bogen gleich sind, und verkürzt die Ordinaten des andern um eben solche Stücke: so gehören diese neuen Endpuncte der Ordinaten sämmtlich einer und derselben logarithmischen Linie an, welche mit der Kettenlinie denselben Parameter hat und deren Asymptote die erste Axe ist.

3. Nimmt man auf der ersten Axe beliebig grofse, aber unter sich gleiche Stücke an, und zieht die in den Endpuncten eines jeden und in

seiner Mitte auftreffenden Ordinaten, so ist der Quotient des Bogens, welcher von den Ordinaten der Endpuncte bestimmt wird, durch die Ordinate der Mitte, für eine constante Länge jenes Stückes, stets eine unveränderliche Gröfse. Ein Gleiches gilt von dem durch ein Stück auf der ersten Axe, den Ordinaten in seinen Endpuncten und dem zugehörigen Bogen der Kettenlinie begrenzten Sector.

4. Liegen die Scheitel einer Reihe von Kettenlinien, welche denselben Mittelpunct haben, auf einer und derselben Axe, und zieht man durch den gemeinsamen Mittelpunct irgend eine Gerade, welche einer derselben begegnet, so begegnet sie auch allen übrigen, und zwar sind, wenn von den beiden Durchschnittspuncten mit jeder einzelnen, der dem Mittelpuncte zunächst liegende, erster, der fernere dagegen zweiter genannt werden, die Tangenten in allen ersten, so wie auch in allen zweiten Durchschnittspuncten an den verschiedenen Kettenlinien einander parallel; berührt die Gerade eine dieser Kettenlinien, so berührt sie auch alle übrigen. Auch verhalten sich die Stücke der Geraden zwischen dem Mittelpuncte und zweien ersten (oder zweiten) Durchschnittspuncten, oder, im Falle sie berührt, zwischen dem Mittelpuncte und den Berührungspuncten, wie die jedesmaligen Parameter der Kettenlinien.

Die letztere Beziehung bietet, wie man leicht sieht, ein einfaches Mittel dar, um, wenn eine Kettenlinie gezeichnet ist, eine andere zu zeichnen, welche irgend einen gegebenen Parameter und mit jener denselben Mittelpunct und dieselbe Symmetrie-Axe haben soll.

---

## Druckfehler im 1sten Hefte dieses Bandes.

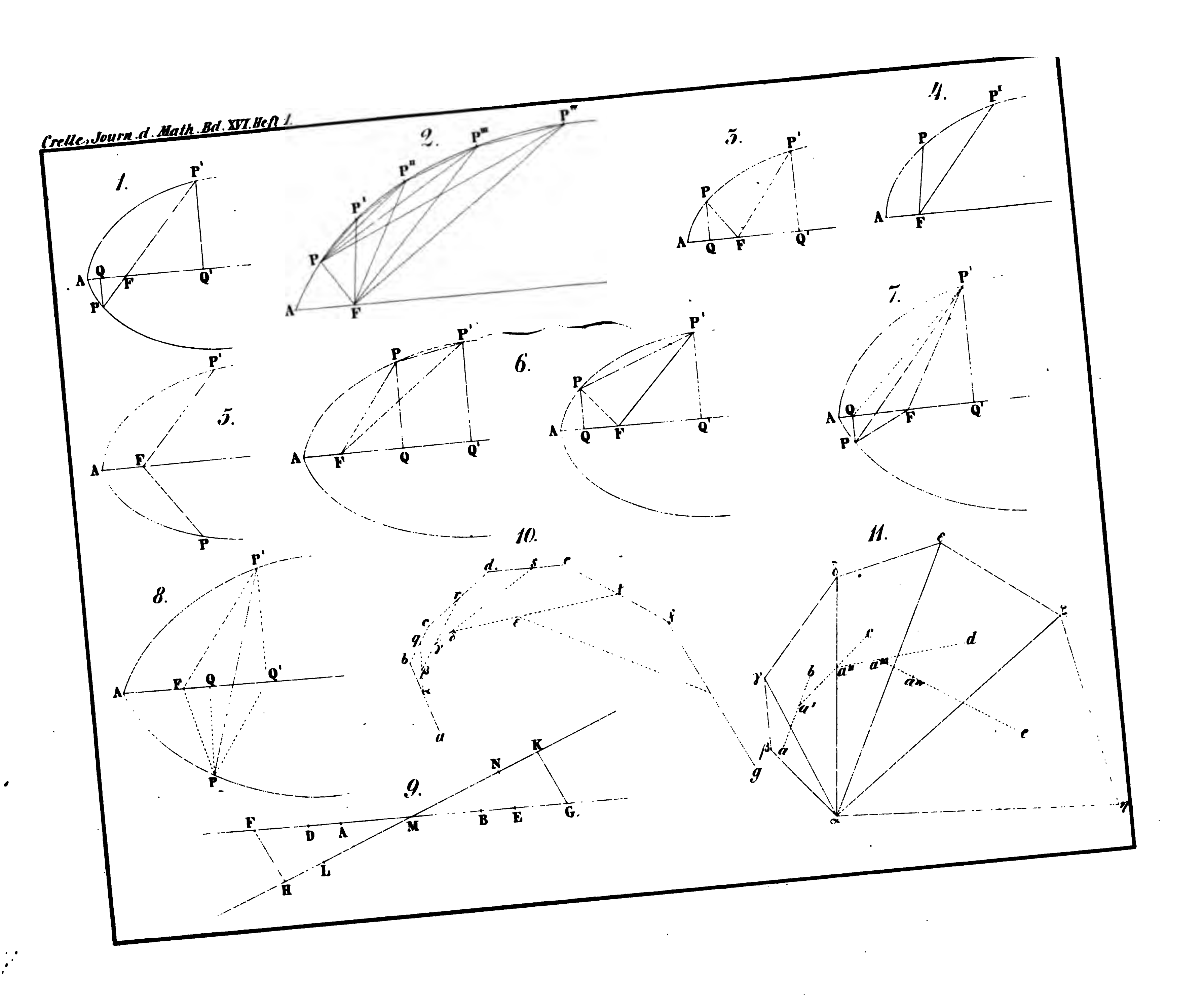
Pag. 62 beim Alter von 65 Jahren, Spalte 5, statt 27.21 lies 17,21
— 64 - - - 99 - Spalte 3, statt — lies 1

## Im 2ten Hefte dieses Bandes.

— 196 lin. 23 pro: redeatur, legas: reddatur
— — — 26 — venit l. venimus
— — — 28 — proportionales l. proportionalia
— — — 30 — tertiae l. tertii
— — — 34 — inveniendas l. inveniendos
— — — 35 — summam l. summum

## Im 4ten Hefte dieses Bandes.

— 366 — 372 lin. 1 loco *integralia elliptica* legas *integralibus ellipticis.*


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.

## Druckfehler im 1sten Hefte dieses Bandes.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pag. | 62 | beim Alter von | 65 Jahren, | Spalte 5, | statt | 27.21 | lies | 17,21 |
| — | 64 | - - - | 99 | - Spalte 3, | statt | — | lies | 1 |

## Im 2ten Hefte dieses Bandes.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| — | 196 | lin. | 23 | pro: | redeatur, legas: reddatur |
| — | — | — | 26 | — | venit l. venimus |
| — | — | — | 28 | — | proportionales l. proportionalia |
| — | — | — | 30 | — | tertiae l. tertii |
| — | — | — | 34 | — | inveniendas l. inveniendos |
| — | — | — | 35 | — | summam l. summum |

## Im 4ten Hefte dieses Bandes.

— 366 — 372 lin. 1 loco *integralia elliptica* legas *integralibus ellipticis*.

---

1.

2.

3.

4.

5.

6.

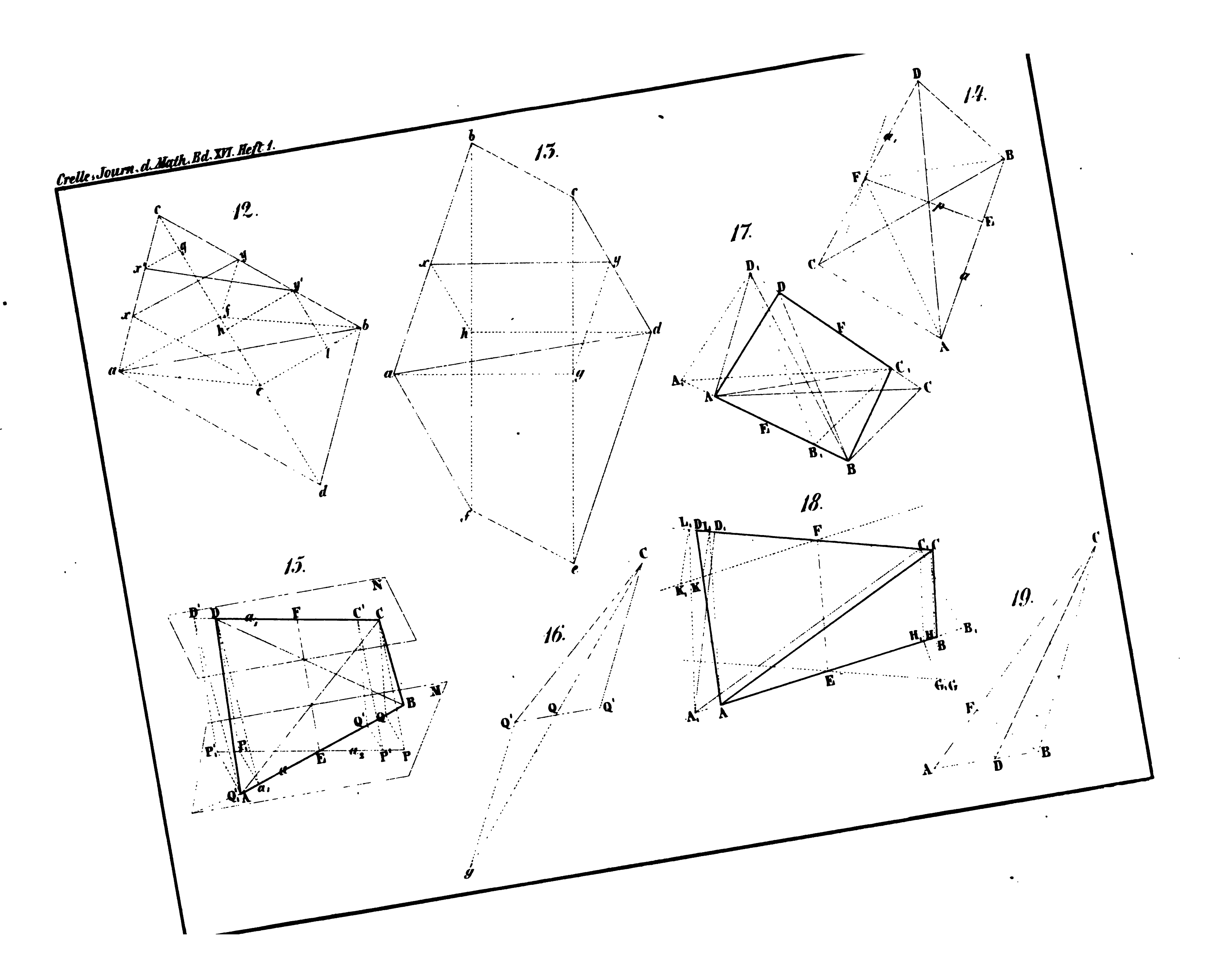
7.

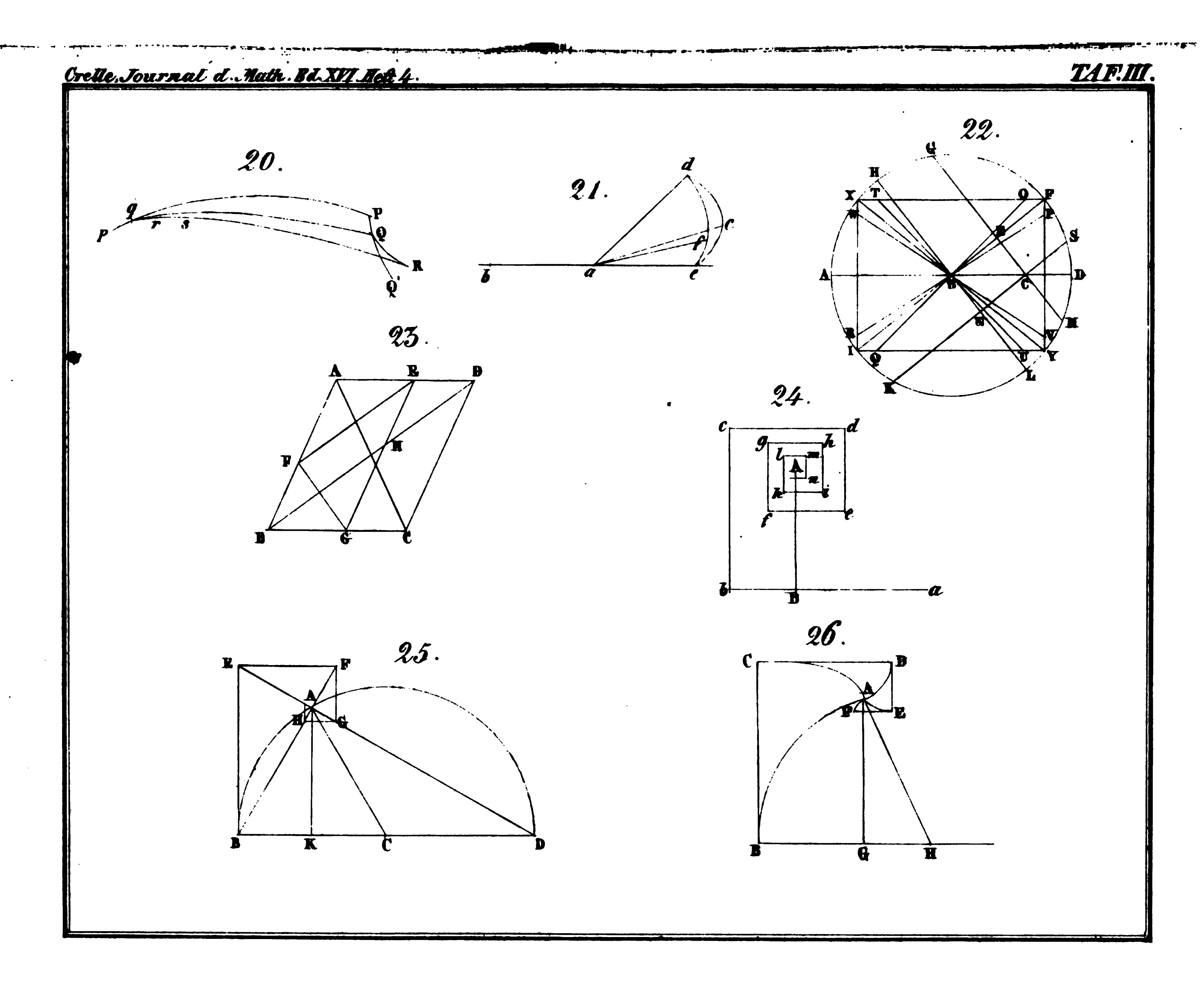
8.

9.

10.

11.


Crelle, Journ. d. Math. Bd. XVI. Heft 1.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.


20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.

STORAGE ARE/

115988

[redacted]

